COMPOSITIO MATHEMATICA

L. KANTOROWITSCH

Über die Vollständigkeit eines Systems von Funktionen, die von einem stetigen Parameter abhängen (Ein Beitrag zur Theorie der Integralgleichungen erster Art)

Compositio Mathematica, tome 2 (1935), p. 406-416

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1935__2__406_0>

Über die Vollständigkeit eines Systems von Funktionen, die von einem stetigen Parameter abhängen

(Ein Beitrag zur Theorie der Integralgleichungen erster Art)

von

L. Kantorowitsch

Leningrad

Es sei $K(x, y)$ eine innerhalb des Quadrats $(0, 1; 0, 1)$ summierbare Funktion zweier Veränderlichen, für die auch das Lebesguesche Doppelintegral

$$(1) \qquad \int_0^1 \int_0^1 K^2(x, y)\, dx\, dy = K_0^2$$

existiert [1]).

Faßt man y in $K(x, y)$ als Parameter auf, so erhält man eine Menge von Funktionen von x. Diese Menge wird als vollständig bezeichnet, wenn keine quadratisch summierbare Funktion $\Phi(x)$ existiert, die zu fast sämtlichen Funktionen $K(x, y)$ — d.h. für alle y mit Ausnahme von höchstens einer Nullmenge — orthogonal wäre:

$$(2) \qquad \int K(x, y)\, \Phi(x)\, dx = 0.$$

Bei einem System von orthogonalen und normierten Funktionen ist die Bedingung der Vollständigkeit bekanntlich durch die Parsevalsche Identität gegeben. Für die Vollständigkeit eines beliebigen abzählbaren Systems von Funktionen $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots$ besteht eine solche Bedingung in der Erfüllung der Parsevalschen Satzes für ein System von Funktionen, die durch

---

[1]) Alle in dieser Arbeit vorkommenden Integrale sind immer auf die gleichen Grenzen von 0 bis 1 zu beziehen, wir unterlassen daher in der Folge die Angabe der letzteren.

Orthogonalisation aus dem ursprünglichen System folgen, d.h. für das Funktionensystem [2])

$$(3) \qquad \psi_n(x) = \frac{\begin{vmatrix} \int \varphi_1^2, & \int \varphi_1\varphi_2, & \dots & \int \varphi_1\varphi_{n-1}, & \varphi_1 \\ \int \varphi_2\varphi_1, & \int \varphi_2^2, & \dots & \int \varphi_2\varphi_{n-1}, & \varphi_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int \varphi_n\varphi_1, & \int \varphi_n\varphi_2, & \dots & \int \varphi_n\varphi_{n-1}, & \varphi_n \end{vmatrix}}{\sqrt{\Delta_{n-1}\Delta_n}},$$

wo Δ_n die Gramsche Determinante der Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ bedeutet. Für jede quadratisch summierbare Funktion $f(x)$ muß also dann die folgende Identität stattfinden:

$$(3') \qquad \int f^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int f\psi_n dx\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\begin{vmatrix} \int \varphi_1^2 & \int \varphi_1\varphi_2 & \dots & \int \varphi_1 f \\ \int \varphi_2\varphi_1 & \int \varphi_2^2 & \dots & \int \varphi_2 f \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int \varphi_n\varphi_1 & \int \varphi_n\varphi_2 & \dots & \int \varphi_n f \end{vmatrix}}{\sqrt{\Delta_{n-1}\Delta_n}} \right)^2 .$$

Dabei wird selbstverständlich vorausgesetzt, daß von vornherein aus der Folge der Funktionen $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... diejenigen ausgeschlossen werden, die sich als lineare Kombinationen der vorhergehenden darstellen lassen.

Im vorliegenden Aufsatz geben wir die notwendige und hinreichende Bedingung für die Vollständigkeit eines von einem stetigen Parameter abhängigen Funktionensystems. Wir zeigen nämlich, daß eine solche Bedingung in einer Gleichung besteht, welche der Gleichung (3′) analog ist, mit dem einzigen Unterschied, daß auf der rechten Seite anstelle der einzelnen Glieder der Summe Mittelwerte von ähnlichen Ausdrücken stehen. Ein anderes weniger direktes Kennzeichen für die Vollständigkeit wurde übrigens in einer früheren Arbeit von Ch. H. Müntz angegeben [3]). Zum Beweise unseres Satzes werden wir das nachfolgende Lemma brauchen:

---

[2]) G. Kowalewski, Einführung in die Determinantentheorie, S. 224. Vgl. auch Riemann—Weber, Bd. I, S. 302.

[3]) Ch. H. Müntz [Mathem. Ann. **87** (1922), 139]. Fragen, die dem obigen Problem nahestehen, werden auch in Noten von Onicescu berührt [C. R. **183**, 1258; **184**, 365]. Vgl. auch Arbeiten von S. Lewin [Math. Zeitschr. **32** (1930), 491]. [Matematičeski Sbornik **39**, Heft 3, S. 3.]

Lemma. *Damit ein System von Funktionen $K_y(x) = K(x, y)$ vollständig sei, ist es notwendig und hinreichend, daß die Integralgleichung erster Art*

$$\int K(x, y)\varphi(y)\, dy = f(x) \tag{4}$$

für jede quadratisch summierbare Funktion $f(x)$ — kürzer $f(x) \in S_2$ — mit einem beliebig kleinen mittleren quadratischen Fehler erfüllt werden könne. D. h. für jedes $\varepsilon > 0$ muß eine Funktion $\varphi_\varepsilon(y)$ vorhanden sein, für die

$$\int \Big[\int K(x, y)\varphi_\varepsilon(y)\, dy - f(x)\Big]^2 dx < \varepsilon^2 \tag{5}$$

gilt.

Notwendig. Bestimmen wir nämlich zuerst ein System von Funktionen $\psi_{k,n}(x)$ folgendermaßen

$$\psi_{k,n}(x) = \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} K(x, y)\, dy \qquad [k = 1, 2, \ldots, n;\ n = 1, 2, 3, \ldots] \tag{6}$$

und konstruieren eine Funktion $K_n^*(x, y)$, indem wir

$$K_n^*(x, y) = n\psi_{k,n}(x); \quad \frac{k-1}{n} < y \leqq \frac{k}{n} \qquad [k = 1, 2, 3, \ldots, n] \tag{7}$$

setzen, so werden, wie unschwer zu erkennen, bei $n \to \infty$ die Funktionen $K_n^*(x, y)$ im Mittel gegen die Funktion $K(x, y)$ konvergieren, d.h. je nach dem Werte von $\varepsilon > 0$ kann ein solcher Wert von N angegeben werden, daß

$$\iint \Big[K(x, y) - K_n^*(x, y)\Big]^2 dx\, dy < \varepsilon^2 \quad \text{bei } n > N \tag{8}$$

gilt. Daraufhin zeigen wir, daß, wenn das System der Funktionen $K(x, y)$ abgeschlossen ist, für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ sich eine Funktion $\varphi_\varepsilon(x)$ finden läßt, die der Ungleichung (5) genügt.

Wir betrachten zunächst das System der Funktionen $\psi_{k,n}(x)$ aus (6) und stellen fest, daß hier ein abgeschlossenes System vorliegt. Tatsächlich existierte andernfalls eine zu allen $\psi_{k,n}(x)$ orthogonale Funktion $\Phi(x)$:

$$\int \Phi(x)\psi_{k,n}(x)\, dx = 0 \quad [k = 1, 2, \ldots, n;\ n = 1, 2, 3, \ldots]. \tag{9}$$

Wir bilden dann den Ausdruck

$$\sigma^2 = \int \Big[\int K(x, y)\Phi(x)\, dx\Big]^2 dy = \int \Big[\int \big(K(x,y) - K_n^*(x,y)\big)\Phi(x)\, dx\Big]^2 dy,$$

da ja, wie aus (7) und (9) erhellt, $\int K_n(x,y)\Phi(x)\, dx = 0$ ist. Wenden wir auf diesen Ausdruck die Schwarzsche Ungleichung an, so haben wir:

$$\sigma^2 \leqq \int\int\left(K(x,y)-K_n^*(x,y)\right)^2 dx\,dy \cdot \int\Phi^2(x)\,dx \leqq \varepsilon^2\int\Phi^2(x)\,dx.$$

Hieraus folgt, mit Rücksicht auf die beliebige Kleinheit von ε, $\sigma=0$ oder genauer: für alle y, vielleicht mit Ausnahme einer gewissen Menge von Maße Null, gilt

$$\int K(x,\,y)\Phi(x)\,dx=0,$$

was der Annahme von der Abgeschlossenheit des Systems der Funktionen $K(x,y)$ widerspricht.

Da das System der Funktionen $\psi_{k,n}(x)$ nach dem eben Bewiesenen vollständig ist, so können wir uns der auf der rechten Seite von (4) stehenden Funktion $f(x)$ mit Hilfe linearer Kombinationen der Funktionen $\psi_{k,n}(x)$ annähern, d.h. wir können für ein beliebiges $\varepsilon>0$ solche Werte von i_0, k_i, n_i, C_i finden, daß die Ungleichung

$$\int\left[f(x)-\sum_{i=1}^{i_0}C_i\psi_{k_i,\,n_i}(x)\right]^2 dx<\varepsilon^2$$

erfüllt ist.

Wir setzen nun

$$\varphi_\varepsilon(y)=\sum_{i=1}^{i_0}C_i(y) \tag{10}$$

wo die Funktion $C_i(y)$ folgendermaßen definiert ist

$$C_i(y)=\begin{cases}0 \text{ für } 0\leqq y<\dfrac{k_i-1}{n_i}\\ C_i \text{ für } \dfrac{k_i-1}{n_i}\leqq y\leqq\dfrac{k_i}{n_i}\\ 0 \text{ für } \dfrac{k_i}{n_i}<y\leqq 1,\end{cases}$$

und wollen nachweisen, daß die durch Gleichung (10) gegebene Funktion $\varphi_\varepsilon(y)$ der Ungleichung (5) genügt. Tatsächlich haben wir unter Benutzung von (6) und (10)

$$\int\left[\int K(x,y)\varphi_\varepsilon(y)\,dy-f(x)\right]^2 dx=\int\left[\sum_{i=1}^{i_0}C_i\int_{\frac{k_i-1}{n_i}}^{\frac{k_i}{n_i}}K(x,y)\,dy-f(x)\right]^2 dx=$$

$$=\int\left[\sum_{i=1}^{i_0}C_i\psi_{k_i,n_i}(x)-f(x)\right]^2 dx<\varepsilon^2,$$

d.h. die Bedingung (5) ist erfüllt.

Hinreichend. Es sei die gestellte Bedingung erfüllt. Zeigen wir, daß in einem solchen Falle jede Funktion $\Phi(x)$, die der Bedingung (2) für alle Werte von y — bis etwa auf eine gewisse Menge vom Maße Null — genügt, der Null äquivalent sein muß. Tatsächlich kann man auf Grund der gemachten Annahme für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ eine Funktion $\varphi_\varepsilon(y)$ derart finden, daß

$$\int\left[\int K(t, y)\varphi_\varepsilon(y)\,dy - \Phi(t)\right]^2 dt < \varepsilon^2 \tag{11}$$

ist. Betrachten wir die Größe

$$I^2 = \int\left[\Phi(t) - \int K(t, y)\varphi_\varepsilon(y)\,dy\right]\Phi(t)\,dt, \tag{12}$$

unter Benutzung von (2) ergibt sich

$$I^2 = \int \Phi^2(t)\,dt - \int\left(\int \Phi(t)K(t, y)\,dt\right)\varphi_\varepsilon(y)\,dy = \int \Phi^2(t)\,dt.$$

Andererseits haben wir auf Grund der Schwarzschen Ungleichung und von (11):

$$I^2 \leqq \left\{\int\left[\Phi(t) - \int K(t, y)\varphi_\varepsilon(y)\,dy\right]^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\int \Phi^2(t)\,dt\right]^{\frac{1}{2}} \leqq \varepsilon\left[\int \Phi^2(t)\,dt\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Aus einer Zusammenstellung dieser Ungleichung mit dem vorausgehenden Ausdruck für I^2 erhalten wir

$$\left\{\int \Phi^2(t)\,dt\right\}^{\frac{1}{2}} < \varepsilon,$$

woraus angesichts der beliebigen Kleinheit von $\varepsilon > 0$ sich fast überall $\Phi(t) = 0$ ergibt.

Hauptsatz. *Damit ein System von Funktionen $K(x, y) = K_y(x)$ vollständig sei, ist es notwendig und hinreichend, daß für jede Funktion $F(x) \in S_2$ die verallgemeinerte Parsevalsche Gleichung gelte:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\int \ldots \int}_{m} \frac{\left[\int \Delta_m(y_1, y_2, \ldots, y_m | x) F(x)\,dx\right]^2}{\Delta_m(y_1, y_2, \ldots, y_m)\Delta_{m-1}(y_1, y_2, \ldots, y_{m-1})}\, dy_1 dy_2 \ldots dy_m = \int F^2(x)\,dx, \tag{13}$$

wo $\Delta_m(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ die Gramsche Determinante für die Funktionen $K(x, y_1)$, $K(x, y_2)$, $\ldots$, $K(x, y_m)$ bedeutet, d.h.

$$\Delta_m(y_1, y_2, \ldots, y_m) = \begin{vmatrix} \int K^2(x, y_1)\,dx, \ldots, \int K(x, y_1)\,K(x, y_m)\,dx \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \int K(x, y_m)\,K(x, y_1)\,dx, \ldots, \int K^2(x, y_m)\,dx \end{vmatrix} \tag{14}$$

während $\Delta_m(y_1, y_2, \ldots, y_m | x)$ eine Determinante bedeutet, welche *sich von* $\Delta_m(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ *lediglich durch die letzte Spalte unterscheidet, nämlich*

$$\Delta_m(y_1, y_2, \ldots, y_m|x) = \begin{vmatrix} \int K^2(x, y_1)dx, \ldots, & \int K(x, y_1)K(x, y_{m-1})dx, K(x, y_1) \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \int K(x, y_m)K(x, y_1)dx, \ldots, & \int K(x, y_m)K(x, y_{m-1})dx, K(x, y_m) \end{vmatrix}.$$

Notwendig. Wir bemerken zunächst, daß die auf der linken Seite von (13) stehende Reihe konvergent ist, und daß deren Summe sicher $\leqq \int F^2(x)dx$ ausfällt. Betrachten wir in der Tat den Ausdruck

$$(16) \qquad \sum_{m=1}^{n} \frac{\left[\int \Delta_m(y_1, y_2, \ldots, y_m|x)F(x)dx\right]^2}{\Delta_m(y_1, y_2, \ldots, y_m)\Delta_{m-1}(y_1, y_2, \ldots, y_{m-1})}.$$

Dieser Ausdruck stellt die Summe der Quadrate der Fourierschen Koeffizienten der Funktion $F(x)$ dar [vgl. (3), (3′), (14), (15)], gebildet für ein durch Orthogonalisierung aus den Funktionen $K(x, y_1), \ldots, K(x, y_n)$ entstehendes Funktionensystem. Der Ausdruck (16) kann also die Größe $\int F^2(x)dx$ nicht übersteigen. Integrieren wir denselben nach $y_1, y_2, \ldots, y_n$, so ergibt sich, daß auch die Summe von n Gliedern der Reihe (13) jene Größe nicht übertrifft; daher ist die Reihe (13) konvergent, und ihre Summe

$$\leqq \int F^2(x)dx.$$

Um die Gleichung (13) vollständig zu beweisen, wollen wir von unserem Lemma Gebrauch machen. Da laut Voraussetzung das System von Funktionen $K(x, y)$ abgeschlossen ist, so wird auf Grund des Lemmas für $\varepsilon > 0$ eine Funktion $\varphi_\varepsilon(y)$ zu finden sein derart, daß

$$(17) \qquad \int \left[\int K(x, y)\varphi_\varepsilon(y)dy - F(x)\right]^2 dx < \varepsilon^2$$

ist. Konstruieren wir nunmehr eine Treppenfunktion $\varphi_n^*(y)$, indem wir setzen:

$$(18) \qquad \varphi_n^*(y) = n\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} \varphi_\varepsilon(y)dy \quad \text{für} \quad \frac{i-1}{n} < y \leqq \frac{i}{n} \quad [i = 1, 2, \ldots, n].$$

Können wir auch ein N so größ wählen, daß bei $n \geqq N$ die

Ungleichung

$$(19) \qquad \iint \Big[K(x, y) - K_n^*(x, y)\Big]^2 dy\,dx < \eta^2$$

wo η eine beliebige von ε unabhängige Große ist, zutrifft. Im weiteren wird es uns noch bequem sein, eine Funktion $K(y_1, y_2, \ldots, y_m | x, y)$ einzuführen, die wir folgendermaßen definieren:

$$(20) \quad K(y_1, y_2, \ldots, y_n | x, y) = K(x, y_i) \quad \text{für} \quad \frac{i-1}{n} < y \leqq \frac{i}{n}.$$

Wir bezeichnen nun mit $\alpha(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ das Minimum der mittleren quadratischen Abweichung einer linearen Kombination der Funktionen

$$(21) \qquad K(x, y_1), \quad K(x, y_2), \ldots, \quad K(x, y_n)$$

von der Funktion $F(x)$, d.h. die Größe

$$(22) \quad \alpha^2(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \\ = \int F^2(x)\,dx - \sum_{m=1}^{n} \frac{\Big[\int \varDelta_m(y_1, y_2, \ldots, y_m | x)\, F(x)\,dx\Big]^2}{\varDelta_m(y_1, y_2, \ldots, y_m)\varDelta_{m-1}(y_1, y_2, \ldots, y_{m-1})}$$

und wollen diese Größe abschätzen. Definitionsgemäß übersteigt sie nicht die mittlere quadratische Abweichung gegen die Funktion $F(x)$, die einer linearen Kombination der Funktionen (21) von der nachfolgenden Art zukommt:

$$\frac{1}{n}\varphi^*\left(\frac{1}{n}\right)K(x, y_1) + \ldots + \frac{1}{n}\varphi^*\left(\frac{n-1}{n}\right)K(x, y_{n-1}) + \frac{1}{n}\varphi^*(1)K(x, y_n) = \\ = \int K(y_1, y_2, \ldots, y_n | x, y)\,\varphi_\varepsilon(y)\,dy.$$

Also ist

$$(23) \quad \alpha(y_1, y_2, \ldots, y_n) \leqq \left\{\int \Big[\int K(y_1, y_2, \ldots, y_n | x, y)\ \varphi_\varepsilon(y)dy - F(x)\Big]^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} = \\ = \left\{\Big[\int \Big(\int K(x, y)\varphi_\varepsilon(y)dy - F(x)\Big) + \right. \\ \left. + \int \varphi_\varepsilon(y)\,(K(y_1, y_2, \ldots, y_n | x, y) - K(x, y))\,dy\Big]^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} \leqq \\ \leqq \left\{\int \Big[\int K(x, y)\varphi_\varepsilon(y)dy - F(x)\Big]^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} + \\ + \left\{\int \Big[\int \varphi_\varepsilon(y)\,(K(y_1, y_2, \ldots, y_n | x, y) - K(x, y))\,dy\Big]^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} \leqq$$

$$\leqq \varepsilon + \left\{\int \left[\varphi_\varepsilon(y)\right]^2 dy\right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{\int\int \left[K(y_1, y_2, \ldots, y_n|x, y) - K(x,y)\right]^2 dy\, dx\right\}^{\frac{1}{2}} \leqq$$

$$\leqq \varepsilon + N\left\{\int\int \left[K(y_1, y_2, \ldots, y_n|x, y) - K(x,y)\right]^2 dy\, dx\right\}^{\frac{1}{2}},$$

wo N eine nur von ε abhängige Konstante ist.

Schätzen wir nun den Ausdruck ab

$$\left\{n^n \int_{\delta_1}\int_{\delta_2} \cdots \int_{\delta_n} \alpha^2(y_1, y_2, \ldots, y_n)\, dy_1, dy_2 \ldots dy_n\right\}^{\frac{1}{2}},$$

wo δ_i eine Gesamtheit von Zahlen y ist, welche der Ungleichung $\frac{i-1}{n} < y < \frac{i}{n}$ genügen.

Indem, wir (7), (8), (20) und (23) gebrauchen, erhalten wir:

$$\left\{n^n \int_{\delta_1}\int_{\delta_2} \cdots \int_{\delta_n} \alpha^2(y_1, y_2, \ldots, y_n)\, dy_1, dy_2 \ldots dy_n\right\}^{\frac{1}{2}} \leqq$$

$$\leqq \varepsilon + \left\{n^n \int_{\delta_1}\int_{\delta_2} \cdots \int_{\delta_n} N^2 \int\int \left[K(y_1, y_2, \ldots, y_n|x, y) - K(x,y)\right]^2 dx\, dy\, dy_1 dy_2 \ldots dy_n\right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \varepsilon + N\left\{n^n \int_{\delta_1} \cdots \int_{\delta_n} \sum_{i=1}^{n} \int_{\delta_i}\int \left[K(x, y_i) - K(x, y)\right]^2 dx\, dy\, dy_1 dy_2 \ldots dy_n\right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \varepsilon + N\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \int_{\delta_i}\int_{\delta_i}\int \left[\left(K(x, y_i) - K^*(x, y_i)\right) + \left(K^*(x, y) - K(x, y)\right)\right]^2 dx\, dy_i dy\right\}^{\frac{1}{2}} \leqq$$

$$\leqq \varepsilon + \sqrt{2}N\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \int_{\delta_i}\int_{\delta_i}\int \left[K(x, y_i) - K^*(x, y_i)\right]^2 dx\, dy_i\, dy + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \int_{\delta_i}\int_{\delta_i}\int \left[K^*(x, y) - K(x, y)\right]^2 dx\, dy_i\, dy\right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \varepsilon + 2N\left\{\int\int \left[K(x, y) - K^*(x, y)\right]^2 dy\, dx\right\}^{\frac{1}{2}} \leqq \varepsilon + 2N\eta = \sigma,$$

wo σ eine beliebig kleine Größe ist.

Ungleichung (24) zeigt, daß eine Menge F von positivem Maß von Punkten des n-dimensionalen Raumes $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ sich derart angeben läßt, daß

(25) $\alpha(y_1, y_2, \ldots, y_n) \leqq \sigma$ bei $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in F$; $mF = q > 0$.

Wir nehmen jetzt eine Zahl p hinreichend groß, damit man habe

(26) $$(1-q)^p < \sigma^2$$

und bezeichnen mit E eine solche Menge von Punkten des np-

dimensionalen Raumes $(y_1, y_2, \ldots, y_{np})$, daß mindestens einer der p Punkte

$$(27) \quad (y_1, y_2, \ldots, y_n);\ (y_{n+1}, y_{n+2}, \ldots, y_{2n}), \ldots, \\ (y_{(p-1)n+1}, y_{(p-1)n+2}, \ldots, y_{np})$$

zu F gehöre; in CE sind augenscheinlich nur solche Punkte $(y_1, y_2, \ldots, y_{np})$ enthalten, daß keiner von den p Punkten (27) zu F gehört, dagegen alle zu CF gehören, weshalb

$$(28) \qquad mCE < (1-q)^p < \sigma^2$$

ist. Betrachten wir jetzt die Differenz von $\int F^2(x)\,dx$ und der Summe von np Gliedern der auf der rechten Seite von (13) stehenden Reihe.

Auf Grund von (22) ist diese Differenz nunmehr

$$\underbrace{\int \ldots \int}_{np} \alpha^2(y_1, y_2, \ldots, y_{np})\, dy_1 dy_2 \ldots dy_{np} = \int_E \ldots \int + \int_{CE} \ldots \int \leqq$$

$$\leqq (mE)\sigma^2 + (1-q)^p \int F^2(x)\,dx \leqq \sigma^2\Big(1 + \int F^2(x)\,dx\Big),$$

d.h. eine beliebig kleine Größe, und die Gleichung (13) muß also erfüllt sein.

Hinreichend. Es sei das System von Funktionen $K(x, y)$ nicht vollständig; dann existiert eine Funktion $\Phi(x)$ mit $\int \Phi^2(x)\,dx \neq 0$, welche orthogonal zu fast sämtlichen Funktionen $K(x, y)$ ist. Dann ist aber für diese Funktion $\Phi(x)$ Gleichung (13) ersichtlich nicht erfüllt, da alle Glieder der im linken Teile von (13) stehenden Reihe gleich Null sind (siehe (15)), während wir rechts eine von Null durchaus verschiedene Größe haben.

Bemerkung. Im obigen Lemma und im Hauptsatz wurden zwei Bedingungen für die Vollständigkeit eines Systems von Funktionen $K(x, y)$ gegeben. Da diese Bedingungen beide notwendig und hinreichend waren, so müssen sie auch untereinander äquivalent sein; damit ist gesagt, daß, wenn eine von diesen Bedingungen für jede Funktion $F(x) \epsilon S_2$ zutrifft, so auch die andere. Es kann aber auch das noch exaktere Ergebnis ausgesprochen werden, daß für eine gegebene $F(x) \epsilon S_2$ beide Bedingungen gleichzeitig entweder zutreffen oder nicht. Es gilt folgendes:

Damit die Integralgleichung (4), *in deren rechtem Teile die Funktion* $F(x)$ *steht, mit einem beliebig kleinen mittleren quadratischen Fehler erfüllt werden kann, ist notwendig und hinreichend, daß auch Gleichung* (13) *für diese Funktion erfüllt wird.*

Das erwähnte „Notwendig" ist für diesen Satz bereits bei der Beweisführung für den Hauptsatz mitbewiesen. Wir wollen jetzt auch den hinreichenden Charakter zeigen, indem wir nachweisen, daß, wenn für die Funktion $F(x)$ Gleichung (13) erfüllt ist, sich für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ eine Funktion $\varphi_\varepsilon(y)$ finden läßt, die der Ungleichung (5) genügt.

Wählen wir vorerst eine Zahl m_0 hinreichend groß, damit die Summe von m_0 Gliedern in linken Teil von (13) sich um weniger als ε^2 von $\int F^2(x)\,dx$ unterscheide. Bezeichnen wir ferner mit $\Delta_m^{(k,\,l)}$ das algebraische Komplement des Elements von Zeile k und Spalte l der Determinante Δ_m. Wir zeigen jetzt, daß die Funktion $\varphi_\varepsilon(y)$, bestimmt durch die Gleichung

$$=\sum_{m=1}^{m_0}\sum_{i=1}^{m}\underbrace{\int\cdots\int}_{m-1}\frac{\int\Delta_m(y_1,y_2,\ldots,y_{i-1},y,y_{i+1},\ldots,y_m\,|\,t)\,F(t)\,dt\,\Delta_m^{(i,\,m)}(y_1,\ldots,y_{i-1},y,y_{i+1},\ldots,y_m\,|\,x)}{\Delta_{m-1}(y_1,\ldots,y_{i-1},y,y_{i+1},\ldots,y_{m-1})\,\Delta_m(y_1,\ldots,y_{i-1},y,y_{i+1},\ldots,y_m)}\,dy_1\,dy_2\ldots dy_{i-1}\,dy_{i+1}\ldots dy_m$$

der Ungleichung (5) genügt.

Finden wir zuerst $\int K(x,y)\varphi(y)\,dy$ und ersetzen beim Integrieren im i-ten Summanden der zweiten Summe die Veränderliche y durch y_i; dann haben wir

$$x, y)\,\varphi_\varepsilon(y)\,dy =$$

$$_1\underbrace{\int\cdots\int}_{m}\frac{\int\Delta_m(y_1,y_2,\ldots,y_{i-1},y_i,y_{i+1},\ldots,y_m\,|\,t)\,F(t)\,dt\,\Delta_m(y_1,y_2,\ldots,y_m\,|\,x)}{A_{m-1}(y_1,y_2,\ldots,y_{m+1})\,\Delta_m(y_1,y_2,\ldots,y_m)}\,dy_1\,dy_2\ldots dy_m\,.$$

Nunmehr folgt

$$\int\left[F(x)-\int K(x,y)\,\varphi_\varepsilon(y)\,dy\right]^2 dx=\int\left[F(x)-\sum_{m=1}^{m_0}\underbrace{\int\cdots\int}_{m}\right]^2 dx=$$

$$=\int\left[\underbrace{\int\cdots\int}_{m}\left(F(x)-\sum_{m=1}^{m_0}\right)dy_1\,dy_2\ldots dy_m\right]^2 dx\leqq{}^{4)}$$

---

4) Wir benutzen hier die Ungleichung

$$\int\left[\underbrace{\int\cdots\int}_{m} f(x,y_1,y_2,\ldots,y_m)\,dy_1\,dy_2\ldots dy_m\right]^2 dx\leqq$$

$$\leqq\int\underbrace{\int\cdots\int}_{m} f^2(x,y_1,\ldots,y_m)\,dy_1,\,dy_2\ldots dy_m\,dx,$$

die unmittelbar aus der Schwarzschen folgt.

$$\leqq \int \underbrace{\int \ldots \int}_{m} \Big[F(x) - \sum_{m=1}^{m_0}\Big]^2 dy_1\, dy_2 \ldots dy_m\, dx =$$

$$= \underbrace{\int \ldots \int}_{m} \int \left[F(x) - \sum_{m=1}^{m_0} \frac{\int \varDelta_m(y_1, \ldots, y_m | t)\, F(t)\, dt\, \varDelta_m(y_1, \ldots, y_m | x)}{\varDelta_m(y_1, \ldots, y_m)\, \varDelta_{m-1}(y_1, \ldots, y_{m-1})}\right] dx\, dy_1 \ldots dy_m =$$

$$= \underbrace{\int \ldots \int}_{m} \left[\int F^2(x)\, dx - \sum_{m=1}^{m_0} \frac{\left[\int \varDelta_m(y_1, y_2, \ldots, y_m | x)\, F(x) dx\right]^2}{\varDelta_m(y_1, y_2, \ldots, y_m)\, \varDelta_{m-1}(y_1, y_2, \ldots, y_{m-1})}\right] dy_1\, dy_2 \ldots dy_m < \varepsilon^2.$$

Daraus erhellt, daß Ungleichung (5) tatsächlich erfüllt ist, w. z. b. w.

(Eingegangen den 15. Dezember 1933. Eingegangen mit Änderungen den 28. November 1934.)