COMPOSITIO MATHEMATICA

ANGELO TONOLO

Il teorema dei seni per i triangoli infinitesimi tracciati sopra una superficie

Compositio Mathematica, tome 2 (1935), p. 424-437

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1935__2__424_0>

Il teorema dei seni per i triangoli infinitesimi tracciati sopra una superficie

di

Angelo Tonolo

Padova

In una recente Memoria [1]) il Levi-Civita pose i fondamenti d'una geometria differenziale metrica delle terne di congruenze di linee tracciate sopra una superficie, e in particolare stabilì le basi d'una trigonometria dei triangoli infinitesimi costituiti dalle rispettive linee, arrivando ad un insieme di formule che danno il teorema dei seni in prima e in seconda approssimazione. In una conversazione Egli mi diceva che il metodo degli operatori da Lui sistematicamente adoperato nella Memoria, se conferiva a tutta la trattazione simmetria ed eleganza facendo intervenire le tre congruenze senza dare privilegio a nessuna, esigeva però sviluppi di calcolo un po' laboriosi, e che, cercando di conservare invece simmetria rispetto a due delle tre congruenze, si poteva sperare di ottenere le formule che danno il teorema dei seni in seconda approssimazione in modo più agile.

La presente ricerca ha pienamente confermato quanto presumeva l'eminente Collega. Avverto però che il raggiungimento delle formule in discorso, anche con il nuovo metodo, non fu agevole, avendo dovuto ricorrere a varî accorgimenti e sviluppi di calcolo che non sono immediati.

§ 1. *Preliminari.*

a) Sopra una superficie σ dello spazio ordinario sia data una terna di congruenze di linee, che supporremo ovunque distinte, nel senso che tali siano le tangenti alle tre linee che passano per uno stesso punto di σ. Avvertiamo subito che le considerazioni che andremo svolgendo saranno sempre riferite ad un intorno abbastanza piccolo di un generico punto della superficie, e per

---

[1]) TULLIO LEVI-CIVITA, Terne di congruenze sopra una superficie ed estensione della trigonometria [Compositio Math. 1 (1934), 115—162].

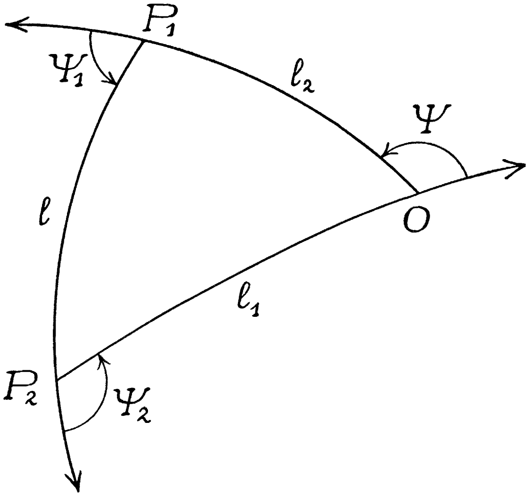
evitare ogni ulteriore discussione, assumeremo addirittura per campo σ un tale intorno. In conformità al nostro metodo, in cui deliberatamente si accorda funzione privilegiata a due — a priori qualunque — delle tre congruenze, è opportuno introdurre fin dal principio, e mantenere in seguito, simmetria binaria rispetto alle due congruenze prescelte. Giova pertanto assumere le loro linee a linee coordinate sopra σ, i cui parametri denoteremo con x^1, x^2, e scrivere il quadrato dell'elemento lineare ds di σ sotto la forma

$$ds^2 = a_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \tag{1}$$

ove $a_{\mu\nu}$ sono funzioni regolari di x^1, x^2. Relativamente alla terza congruenza, conviene ricorrere alle espressioni parametriche delle coordinate

$$x^1 = f(s, l) \quad x^2 = \varphi(s, l) \tag{2}$$

dei punti di una generica sua linea che indicheremo con 3, intendendo con s l'arco di essa, e con l un parametro variabile dall'una



all'altra linea della congruenza in discorso. Per il nostro scopo è bene identificare il parametro l con la lunghezza dell'arco $P_1 P_2$ di ogni singola 3 compreso fra le intersezioni di essa con le due linee coordinate $x^1 = 0$ (che chiameremo linea x^2, od anche linea 2) ed $x^2 = 0$ (che chiameremo linea x^1, od anche linea 1) spiccate da O. Inoltre l'arco s riteniamo venga contato a partire dal punto P_1 positivamente nel verso $P_1 P_2$.

Fissiamo ora un triangolo $O P_1 P_2$, tutto contenuto in σ, i cui lati OP_2, OP_1, P_1P_2 appartengano rispettivamente alle linee 1, 2, 3, e il cui perimetro sia percorso nel verso OP_1P_2 (verso naturale, secondo Levi-Civita).

In conformità a questo verso, sarà P_2O la direzione positiva della linea 1, OP_1 la direzione positiva della linea 2, e P_1P_2 quella della linea 3. Indicando allora con l, l_1, l_2 le lunghezze dei lati del triangolo, rispettivamente opposti ai vertici O, P_1, P_2, le coordinate curvilinee di questi saranno $(0, 0)$, $(0, l_2)$, $(-l_1, 0)$. Si tenga presente che ciascuno di questi lati deve risguardarsi infinitesimo, sia che ciò s'intenda nel senso abituale del Calcolo, sia invece nel senso che le lunghezze l, l_1, l_2 hanno misure del *primo ordine* rispetto ad una prescelta unità di lunghezza, misure, cioè, che non superano una certa frazione propria.

b) Denotiamo con ψ, ψ_1, ψ_2 rispettivamente gli angoli (compresi fra 0 e π, gli estremi esclusi) di cui devono ruotare, nel verso naturale, attorno ai vertici O, P_1, P_2 la direzione positiva della linea 1 per sovrapporsi a quella della linea 2, la direzione positiva della linea 2 per sovrapporsi a quella della linea 3, la direzione positiva della linea 3 per sovrapporsi a quella della linea 1. Se designiamo allora con $\lambda_1^1\ \lambda_1^2$; $\lambda_2^1\ \lambda_2^2$; $\lambda^1\ \lambda^2$ i parametri delle linee 1, 2, 3, e con a il discriminante della forma (1), si hanno le formule seguenti, valide in valore assoluto e segno,

$$(3)\qquad \begin{aligned} \sin\psi &= \sqrt{a}\begin{vmatrix} \lambda_1^1 & \lambda_1^2 \\ \lambda_2^1 & \lambda_2^2 \end{vmatrix} &\qquad \cos\psi &= a_{\mu\nu}\lambda_1^\mu\lambda_2^\nu \\ \sin\psi_1 &= \sqrt{a}\begin{vmatrix} \lambda_2^1 & \lambda_2^2 \\ \lambda^1 & \lambda^2 \end{vmatrix} &\qquad \cos\psi_1 &= a_{\mu\nu}\lambda_2^\mu\lambda^\nu \\ \sin\psi_2 &= \sqrt{a}\begin{vmatrix} \lambda^1 & \lambda^2 \\ \lambda_1^1 & \lambda_1^2 \end{vmatrix} &\qquad \cos\psi_2 &= \alpha_{\mu\nu}\lambda^\mu\lambda_1^\nu, \end{aligned}$$

nelle quali il radicale deve essere preso positivamente.

c) Per il calcolo della curvatura geodetica in un punto d'una linea tracciata sopra σ, l'algoritmo più spedito è il seguente. Per non introdurre nuovi simboli, identificheremo la linea data con la linea 3 di parametri $\lambda^1\ \lambda^2$, avvertendo che il procedimento sussiste inalterato per ogni linea di σ. Si costruisca dapprima la forma quadratica nei parametri $\lambda^1\ \lambda^2$

$$L = \tfrac{1}{2} a_{\mu\nu}\lambda^\mu\lambda^\nu,$$

e si formino poi le derivate parziali rispetto a questi parametri

$$\frac{\partial L}{\partial\lambda^1},\quad \frac{\partial L}{\partial\lambda^2}.$$

Queste dànno senz'altro i momenti della linea in quistione. Fissato un punto P di coordinate x^1, x^2 della linea 3, si ponga poi

$$L_{x^1}=\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda^1}\right)-\frac{\partial L}{\partial x^1}$$

$$L_{x^2}=\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda^2}\right)-\frac{\partial L}{\partial x^2}.$$

I binomî lagrangiani ora scritti sono le componenti covarianti del vettore di curvatura geodetica [2]) (derivate, nel senso che conviene ad una varietà riemanniana, del versore tangenziale rispetto all'arco s della linea in discorso). La sua proiezione secondo la normale alla linea 3 nel punto P (ruotata di 90° nel verso diretto a partire dalla direzione positiva della tangente che è quella fissata sull'arco) dà, in valore assoluto e segno, la curvatura geodetica γ della linea 3 nel punto P. Pertanto, se indichiamo con $\bar{\lambda}^1\,\bar{\lambda}^2$ i parametri della suddetta direzione normale, abbiamo

$$\gamma=\bar{\lambda}^1 L_{x^1}+\bar{\lambda}^2 L_{x^2}.$$

Ma avendosi

$$\bar{\lambda}^1=-\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial L}{\partial \lambda^2},\quad \bar{\lambda}^2=\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial L}{\partial \lambda^1},$$

risulta in definitiva la formula

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{a}}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial L}{\partial \lambda^1} & \dfrac{\partial L}{\partial \lambda^2}\\ L_{x^1} & L_{x^2}\end{vmatrix}, \tag{4}$$

ove il radicale va sempre preso positivamente.

§ **2.** *Calcolo dei seni degli angoli* ψ_1, ψ_2 *e delle curvature geodetiche in* O *delle linee* 1, 2, 3 *passanti per* O. *Altre formule.*

a) Per semplificare il calcolo dichiarato nel titolo conviene, senza cambiare beninteso linee coordinate, scegliere i loro parametri x^1, x^2 in modo che si abbia

$$a_{11}=1 \text{ per } x^2=0,\quad a_{22}=1 \text{ per } x^1=0. \tag{5}$$

Ciò può sempre essere effettuato. Continueremo a denotare con x^1, x^2 quei parametri per cui sono soddisfatte le condizioni (5). Si ha intanto il vantaggio di poter identificare le coordinate x_1

---

[2]) Cfr. T. Levi-Civita, Lezioni di Calcolo differenziale assoluto [Bologna, Nicola Zanichelli], pag. 154.

ed x_2 dei punti delle linee $x^2 = 0$ ed $x^1 = 0$ con i rispettivi archi s_1 ed s_2, misurati, a partire da O, nei versi già fissati sulle linee coordinate.

Applichiamo lo sviluppo di Taylor ai secondi membri delle equazioni (2) rispetto all'arco s mettendo in evidenza le potenze di s fino alla seconda. Dovendo essere $x^1 = 0$ per $s = 0$, ed $x^2 = 0$ per $s = l$, si ha

$$(6) \qquad \begin{aligned} x^1 &= s(\alpha_0 + \alpha_1 s) + ③ \\ x^2 &= (l - s)(\beta_0 + \beta_1 s) + ③ \end{aligned}$$

nelle quali i resti degli sviluppi sono stati indicati con ③ perchè di terzo grado in s. Sia avvertito che, in generale, con la notazione ⓝ intendiamo una quantità di grado n almeno rispetto agli argomenti l, l_1, l_2, s, x^1, x^2, il quale grado corrisponde al l'ordine d'infinitesimo quando il triangolo $O P_1 P_2$, come è stato già dichiarato, si risguardi infinitesimo. Le quantità α_0, α_1, β_0, β_1 che figurano nelle (6) dipenderanno, in generale, dal parametro l. Ma noi possiamo ritenere che α_1, β_1 siano indipendenti da l: infatti le differenze $\alpha_1(l) - \alpha_1(0)$, $\beta_1(l) - \beta_1(0)$ sono almeno di primo grado in l; d'altra parte nelle formule (6) $\alpha_1(l)$, $\beta_1(l)$ vanno moltiplicate per s^2 ed $s(l - s)$, onde le differenze

$$\{\alpha_1(l) - \alpha_1(0)\}s^2, \quad \{\beta_1(l) - \beta_1(0)\}s(l - s)$$

contengono termini di terzo grado almeno negli argomenti s ed l, i quali possono essere conglobati nei termini ③ delle formule in quistione. Si può quindi surrogare $\alpha_1(l)s^2$ e $\beta_1(l)s(l - s)$ con $\alpha_1(0)s^2$ e $\beta_1(0)s(l - s)$.

Applichiamo ancora lo sviluppo di Taylor ai coefficienti a_{11}, a_{12}, a_{22} della forma (1) tenendo presente le condizioni (5), e inoltre che $a_{12} = \sqrt{a_{11}a_{22}} \cos \psi$.

Si ottiene

$$(7) \qquad \begin{aligned} a_{11} &= 1 + e_2 x^2 + ② \\ a_{12} &= \cos \psi + f_1 x^1 + f_2 x^2 + ② \\ a_{22} &= 1 + g_1 x^1 + ②. \end{aligned}$$

Sempre in forza delle (5), i parametri delle linee 1, 2, 3 sono rispettivamente, trascurando nelle (6) i rest ③,

$$\lambda_1^1 = 1, \quad \lambda_1^2 = 0; \qquad \lambda_2^1 = 0, \quad \lambda_2^2 = 1;$$

$$\lambda^1 = \frac{dx^1}{ds} = \alpha_0(l) + 2\alpha_1 s, \qquad \lambda^2 = \frac{dx^2}{ds} = \beta_1 l - \beta_0(l) - 2\beta_1 s.$$

Ne consegue che in virtù della seconda e terza delle (3), si ha

$$\sin\psi_1 = -\,\alpha_0(l)\sqrt{a_{11}-a_{12}^2}$$
$$\sin\psi_2 = (\beta_0(l)+\beta_1 l)\sqrt{a_{22}-a_{12}^2},$$

perchè nel punto P_1 $s=0$ e nel punto P_2 $s=l$. Il radicale $\sqrt{a_{11}-a_{12}^2}$ va calcolato nel punto P_1 di coordinate $0, l_2$, mentre il radicale $\sqrt{a_{22}-a_{12}^2}$ è riferito al punto P_2 di coordinate $-l, 0$. Applicando ancora lo sviluppo di Taylor a questi radicali, si ricavano le formule definitive

$$(8)\qquad \begin{aligned} \sin\psi_1 &= -\,\alpha_0(l)\left\{\sin\psi + \frac{e_2-2f_2\cos\psi}{2\sin\psi}\,l_2 + ②\right\}\\ \sin\psi_2 &= \{\beta_0(l)+\beta_1 l\}\left\{\sin\psi - \frac{g_1-2f_1\cos\psi}{2\sin\psi}\,l_1 + ②\right\}. \end{aligned}$$

b) Consideriamo le due solite linee 1, 2 passanti per O, e la linea 3 relativa ora al punto O, per calcolare le rispettive curvature geodetiche in questo punto, col processo indicato nel § precedente.

Per la linea 1, avendosi $\lambda_1^1=1$ $\lambda_1^2=0$, posto

$$L=\tfrac{1}{2}a_{\mu\nu}\lambda_1^\mu\lambda_1^\nu,$$

risulta

$$\frac{\partial L}{\partial\lambda_1^1}=a_{11}\qquad \frac{\partial L}{\partial\lambda_1^2}=a_{12},$$
$$\frac{\partial L}{\partial x^1}=\frac{1}{2}\frac{\partial a_{11}}{\partial x^1}\qquad \frac{\partial L}{\partial x^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial a_{11}}{\partial x^2}.$$

Osservando che $\dfrac{d}{ds_1}=\dfrac{\partial}{\partial x^1}$, si ha

$$L_{x^1}=\frac{da_{11}}{ds_1}-\frac{1}{2}\frac{\partial a_{11}}{\partial x^1}=\frac{1}{2}\frac{\partial a_{11}}{\partial x^1}$$
$$L_{x^2}=\frac{da_{12}}{ds_1}-\frac{1}{2}\frac{\partial a_{11}}{\partial x^2}=\frac{\partial a_{12}}{\partial x^1}-\frac{1}{2}\frac{\partial a_{11}}{\partial x^2}.$$

Quindi nel punto O, per le (7),

$$\frac{\partial L}{\partial\lambda_1^1}=1,\quad \frac{\partial L}{\partial\lambda_1^2}=\cos\psi,\quad L_{x^1}=0,\quad L_{x^2}=f_1-\tfrac{1}{2}e_2.$$

E pertanto, ricorrendo alla (4), la curvatura geodetica γ_1 della linea 1 nel punto O è data dalla formula

$$\gamma_1 \sin\psi = f_1 - \tfrac{1}{2} e_2. \tag{9}$$

Un analogo procedimento per il calcolo della curvatura geodetica γ_2 della linea 2 nel punto O conduce alla formula

$$\gamma_2 \sin\psi = \tfrac{1}{2} g_1 - f_2. \tag{10}$$

Riferiamoci ora alla linea 3 passante per O, le cui equazioni si hanno dalle (6) ponendovi $l = 0$.

Esse sono, a meno di termini di terzo ordine,

$$\begin{aligned} x^1 &= \alpha_0 s + \alpha_1 s^2 \\ x^2 &= -\beta_0 s - \beta_1 s^2. \end{aligned} \tag{11}$$

Avvertiamo che, per semplificare la scrittura, ora e in seguito, le notazioni α_0, β_0 stanno ad indicare le determinazioni di $\alpha_0(l)$, $\beta_0(l)$ per $l = 0$.

Qui abbiamo

$$\lambda^1 = \frac{dx^1}{ds} = \alpha_0 + 2\alpha_1 s, \qquad \lambda^2 = \frac{dx^2}{ds} = -(\beta_0 + 2\beta_1 s).$$

Perciò, in conformità al metodo sviluppato nel § precedente, posto

$$L = \tfrac{1}{2} a_{\mu\nu} \lambda^\mu \lambda^\nu,$$

risulta

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda^1} = a_{11}\lambda^1 + a_{12}\lambda^2, \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda^2} = a_{21}\lambda^1 + a_{22}\lambda^2.$$

Derivando rispetto all'arco s, e poi ponendo $s = 0$, si ottiene, in forza delle (7),

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda^1}\right) &= 2(\alpha_1 - \beta_1 \cos\psi) - \alpha_0\beta_0(f_1 + e_2) + \beta_0^2 f_2 \\ \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda^2}\right) &= 2(\alpha_1 \cos\psi - \beta_1) - \alpha_0\beta_0(f_2 + g_1) + \alpha_0^2 f_1. \end{aligned}$$

Nel punto O $(x^1 = 0,\ x^2 = 0)$, si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x^1} &= -\alpha_0\beta_0 f_1 + \frac{\beta_0^2}{2} g_1 \\ \frac{\partial L}{\partial x^2} &= -\alpha_0\beta_0 f_2 + \frac{\alpha_0^2}{2} e_2. \end{aligned}$$

E quindi i binomî lagrangiani sono, con referenza al punto O,

$$(12)\qquad \begin{aligned} L_{x^1} &= 2(\alpha_1-\beta_1\cos\psi) - \alpha_0\beta_0 e_2 + \beta_0^2(f_2-\tfrac{1}{2}g_1) \\ L_{x^2} &= 2(\alpha_1\cos\psi-\beta_1) - \alpha_0\beta_0 g_1 + \alpha_0^2(f_1-\tfrac{1}{2}e_2). \end{aligned}$$

Infine, sempre nel punto O,

$$(13)\qquad \frac{\partial L}{\partial\lambda^1} = \alpha_0 - \beta_0\cos\psi, \qquad \frac{\partial L}{\partial\lambda^2} = \alpha_0\cos\psi - \beta_0.$$

Surrogando allora le (12), (13) nella formula (4), introducendo poi le curvature geodetiche γ_1, γ_2 già calcolate, dopo qualche riduzione si perviene alla formula finale che dà la curvatura γ della linea 3 passante per O in questo punto:

$$(14)\qquad \begin{aligned} \gamma\sin\psi = {} & 2\sin^2\psi(\alpha_1\beta_0-\alpha_0\beta_1) + \gamma_1\alpha_0^2\sin\psi(\alpha_0-\beta_0\cos\psi) + \\ & + \gamma_2\beta_0^2\sin\psi(\alpha_0\cos\psi-\beta_0) + \\ & + \alpha_0\beta_0 g_1(\beta_0\cos\psi-\alpha_0) + \alpha_0\beta_0 e_2(\alpha_0\cos\psi-\beta_0). \end{aligned}$$

c) Il nostro metodo richiede la determinazione di altre formule che ora andiamo a ricavare. Consideriamo le equazioni (11) della linea 3 passante per O. Il fatto che s non è un parametro qualunque, ma proprio l'arco della linea in discorso, è espresso dalla condizione

$$a_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 1,$$

la quale deve sussistere identicamente rispetto ad s, in base alle (11) stesse. La materiale sostituzione, trascurando le potenze di s superiori alla prima, fornisce un risultato del tipo

$$E_0 + E_1 s = 1,$$

donde

$$E_0 = 1 \quad E_1 = 0,$$

le E_0, E_1 dipendendo da $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1$ nonchè dai coefficienti e_2, f_1, f_2, g_1 degli sviluppi (7). Effettuando il calcolo si trova:

$$(15)\qquad \begin{aligned} E_0 &= \alpha_0^2 + \beta_0^2 - 2\alpha_0\beta_0\cos\psi = 1 \\ E_1 &= 4\alpha_1(\alpha_0-\beta_0\cos\psi) + 4\beta_1(\beta_0-\alpha_0\cos\psi) - \\ & \quad - 2\alpha_0\beta_0(\alpha_0 f_1-\beta_0 f_2) - \beta_0\alpha_0^2 e_2 + \alpha_0\beta_0^2 g_1 = 0. \end{aligned}$$

Infine, osservando che per $s = l$ la x^1 deve ridursi a $-l_1$, e che per $s = 0$ la x^2 deve ridursi a l_2, dalle equazioni (6), trascurando i termini (3), si traggono ancora le relazioni seguenti:

$$(16)\qquad \begin{aligned} \alpha_0(l)l + \alpha_1 l^2 &= -l_1 \\ \beta_0(l)l &= l_2. \end{aligned}$$

§ 3. *Il teorema dei seni in seconda approssimazione.*

Un giudizioso maneggio delle nove formule (8), (9), (10), (14), (15), (16) conduce al teorema dei seni in seconda approssimazione. Intanto per non generare confusione, e per brevità di notazioni, in questo § indicheremo con $(\psi_1)_1$, $(\psi_2)_2$ gli angoli che nei precedenti §§ furono designati con ψ_1, ψ_2, mentre riserveremo questa notazione per indicare gli angoli (precisati nel modo già dichiarato) che la linea 2 forma con 3, e che la linea 3 forma con 1, queste linee passando ora tutte e tre per il medesimo punto O. Ne consegue che si può scrivere la relazione

$$\psi + \psi_1 + \psi_2 = 2\pi. \tag{17}$$

Applichiamo le (3) alle tre linee 1, 2, 3 passanti per O. Si ha ora in questo punto

$$\lambda_1^1 = 1 \quad \lambda_1^2 = 0; \qquad \lambda_2^1 = 0 \quad \lambda_2^2 = 1; \qquad \lambda^1 = \alpha_0 \quad \lambda^2 = -\beta_0;$$

$$a_{11} = 1 \qquad a_{12} = \cos\psi \qquad a_{22} = 1.$$

Quindi

$$\sin\psi_1 = -\alpha_0 \sin\psi \quad \cos\psi_1 = \alpha_0 \cos\psi - \beta_0;$$

$$\sin\psi_2 = \beta_0 \sin\psi \qquad \cos\psi_2 = \alpha_0 - \beta_0 \cos\psi.$$

Facciamo figurare questi angoli ψ_1, ψ_2 nella formula (14) e nella seconda delle (15); inoltre, in quest'ultima, sostituiamo al posto di f_1, f_2 le espressioni fornite dalle (9), (10); si ottiene allora il sistema di due equazioni lineari nelle α_1, β_1

$$\left\{\begin{aligned}
2\alpha_1 \sin\psi_2 + 2\beta_1 \sin\psi_1 &= \gamma + \frac{\sin\psi_1 \sin\psi_2\,(e_2\cos\psi_1 - g_1\cos\psi_2)}{\sin^3\psi} - \\
&\quad - \frac{\gamma_1 \cos\psi_2 \sin^2\psi_1 + \gamma_2\cos\psi_1\sin^2\psi_2}{\sin^2\psi}, \\
2\alpha_1\cos\psi_2 - 2\beta_1\cos\psi_1 &= \frac{\sin\psi_1\sin\psi_2(g_1\sin\psi_2 + e_2\sin\psi_1)}{\sin^3\psi} - \\
&\quad - \frac{\sin\psi_1\sin\psi_2(\gamma_2\sin\psi_2 - \gamma_1\sin\psi_1)}{\sin^2\psi}.
\end{aligned}\right.$$

Esso è certamente risolubile rispetto alle α_1, β_1 perchè il determinante dei coefficienti è

$$-4(\sin\psi_2\cos\psi_1 + \cos\psi_2\sin\psi_1)$$

e vale pertanto $4\sin\psi \neq 0$, tenendo conto della relazione (17). La risoluzione del sistema ora scritto dà

$$
(18)\quad \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{\gamma_1 \cos\psi \sin^2\psi_1 + \gamma_2' \sin^2\psi_2 - \gamma\cos\psi_1 \sin^2\psi}{2\sin^3\psi} + \\ \qquad\qquad + \dfrac{\sin\psi_1 \sin\psi_2 (g_1\cos\psi - e_2)}{2\sin^4\psi}, \\ \beta_1 = \dfrac{\gamma_1 \sin^2\psi_1 + \gamma_2 \cos\psi \sin^2\psi_2 - \gamma\cos\psi_2 \sin^2\psi}{2\sin^3\psi} + \\ \qquad\qquad + \dfrac{\sin\psi_1 \sin\psi_2 (g_1 - e_2\cos\psi)}{2\sin^4\psi}. \end{cases}
$$

Quindi, surrogando nelle (8) al posto di $\alpha_0(l)$, $\beta_0(l)$ le espressioni che si ricavano dalle (16), e al posto di α_1, β_1 le (18), si ottiene intanto:

$$
(19)\quad \begin{cases} \dfrac{l}{\sin\psi}(\sin\psi_1)_1 = \left[l_1^2 + l^2\left\{\dfrac{\gamma_1\cos\psi\sin^2\psi_1+\gamma_2\sin^2\psi_2-\gamma\cos\psi_1\sin^2\psi}{2\sin^3\psi} + \right.\right. \\ \qquad \left.\left. + \dfrac{\sin\psi_1\sin\psi_2(g_1\cos\psi-e_2)}{2\sin^4\psi}\right\}\right]\left[1+\dfrac{e_2-2f_2\cos\psi}{2\sin^2\psi}l_2 + ②\right] \\ \dfrac{l}{\sin\psi}(\sin\psi_2)_2 = \left[l_2^2 + l^2\left\{\dfrac{\gamma_1\sin^2\psi_1+\gamma_2\cos\psi\sin^2\psi_2-\gamma\cos\psi_2\sin^2\psi}{2\sin^3\psi} + \right.\right. \\ \qquad \left.\left. + \dfrac{\sin\psi_1\sin\psi_2(g_1-e_2\cos\psi)}{2\sin^4\psi}\right\}\right]\left[1-\dfrac{g_1-2f_1\cos\psi}{2\sin^2\psi}l_1 + ②\right]. \end{cases}
$$

È noto [3]) che in *prima approssimazione*, trascurando cioè i termini del second'ordine, vale il teorema dei seni; si ha cioè

$$
(20)\quad \frac{l}{\sin\psi} = \lambda + ② \quad \frac{l_1}{(\sin\psi_1)_1} = \lambda + ② \quad \frac{l_2}{(\sin\psi_2)_2} = \lambda + ②,
$$

ove λ è una lunghezza del prim'ordine. Si può assumere [4])

$$
(21)\qquad \lambda = \frac{1}{3}\left(\frac{l}{\sin\psi} + \frac{l_1}{(\sin\psi_1)_1} + \frac{l_2}{(\sin\psi_2)_2}\right).
$$

---

[3]) Levi-Civita, loc. cit. [1]), Cap. III, § 2.

[4]) Per un triangolo rettilineo del piano, il valore comune dei tre rapporti $\dfrac{l}{\sin\psi}$, $\dfrac{l_1}{(\sin\psi_1)_1}$, $\dfrac{l_2}{(\sin\psi_2)_2}$ vale notoriamente il diametro della circonferenza circoscritta al triangolo stesso. Si può quindi in tale caso assumere come valore di questo diametro l'espressione simmetrica

$$
(\alpha)\qquad \frac{1}{3}\left(\frac{l}{\sin\psi} + \frac{l_1}{(\sin\psi_1)_1} + \frac{l_2}{(\sin\psi_2)_2}\right),
$$

e convenire poi per un triangolo qualsiasi curvilineo, sia piano, sia tracciato sopra una superficie generica, di assumere la (α) come definizione di diametro. (Levi-Civita, loc. cit. [1]) Cap. III, § 4.)

Dalle precedenti (20) si ricava

$$(22)\qquad \begin{aligned} l_1 l_2 &= \lambda^2 (\sin\psi_1)_1 (\sin\psi_2)_2 + ③ \\ l^2 &= \lambda^2 \sin^2\psi + ③. \end{aligned}$$

Siccome $(\sin\psi_1)_1$, $(\sin\psi_2)_2$ si trovano moltiplicati per la quantità λ^2, così, a meno di termini del terz'ordine che raggrupperemo in ③, possiamo surrogare nei secondi membri delle relazioni (22) addirittura $(\sin\psi_1)_1$, $(\sin\psi_2)_2$ con $\sin\psi_1$, $\sin\psi_2$, e quindi scrivere

$$\begin{aligned} l_1 l_2 &= \lambda^2 \sin\psi_1 \sin\psi_2 + ③ \\ l^2 &= \lambda^2 \sin^2\psi + ③, \end{aligned}$$

donde la relazione

$$(23)\qquad l^2 \sin\psi_1 \sin\psi_2 = l_1 l_2 \sin^2\psi + ③.$$

Nelle (19) eliminiamo le f_1, f_2 mediante le (9), (10): si ricava allora

$$\frac{e_2 - 2f_2\cos\psi}{2\sin^2\psi} = \frac{e_2 - g_1\cos\psi}{2\sin^2\psi} + \gamma_2 \operatorname{cotg}\psi$$

$$\frac{g_1 - 2f_1\cos\psi}{2\sin^2\psi} = \frac{g_1 - e_2\cos\psi}{2\sin^2\psi} - \gamma_1 \operatorname{cotg}\psi.$$

Sviluppiamo ora il prodotto nei secondi membri delle formule (19), ed osserviamo che il coefficiente dell'addendo $\dfrac{g_1\cos\psi - e_2}{2\sin^4\psi}$ nel primo prodotto, e quello dell'addendo $\dfrac{g_1 - e_2\cos\psi}{2\sin^4\psi}$ nel secondo, è proprio

$$l^2 \sin\psi_1 \sin\psi_2 - l_1 l_2 \sin^2\psi.$$

Se quindi teniamo conto soltanto dei termini del primo e del second'ordine, dopo qualche riduzione ben facile, si hanno le relazioni seguenti, *valide in seconda approssimazione*,

$$(24)\qquad \begin{aligned} \frac{l}{\sin\psi}(\sin\psi_1)_1 - l_1 &= \lambda^2 \sin\psi_1 \sin\psi_2\, A \\ \frac{l}{\sin\psi}(\sin\psi_2)_2 - l_2 &= \lambda^2 \sin\psi_1 \sin\psi_2\, B, \end{aligned}$$

ove

$$2A = \frac{\cos\psi\sin\psi_1}{\sin\psi\sin\psi_2}\gamma_1 + \frac{2\cos\psi\sin\psi_1 + \sin\psi_2}{\sin\psi\sin\psi_1}\gamma_2 - \frac{\sin\psi\cos\psi_1}{\sin\psi_1\sin\psi_2}\gamma$$

$$2B = \frac{2\cos\psi\sin\psi_2 + \sin\psi_1}{\sin\psi\sin\psi_2}\gamma_1 + \frac{\cos\psi\sin\psi_2}{\sin\psi\sin\psi_1}\gamma_2 - \frac{\sin\psi\cos\psi_2}{\sin\psi_1\sin\psi_2}\gamma.$$

Eliminando nelle (24) $\frac{l}{\sin\psi}$ ricorrendo alla (21), si ottiene il sistema lineare

$$\begin{cases} 2l_1 + \dfrac{(\sin\psi_1)_1}{(\sin\psi_2)_2} l_2 = 3\lambda(\sin\psi_1)_1 - \lambda^2 \sin\psi_1 \sin\psi_2 A \\ \dfrac{(\sin\psi_2)_2}{(\sin\psi_1)_1} l_1 + 2l_2 = 3\lambda(\sin\psi_2)_2 - \lambda^2 \sin\psi_1 \sin\psi_2 B, \end{cases}$$

dal quale si trae

$$\text{(25)} \qquad \frac{l_1}{(\sin\psi_1)_1} = \lambda\left[1 + \lambda\left(\sin\psi_1 \frac{B}{3} - \frac{2}{3}\sin\psi_2 A\right)\right]$$

$$\text{(26)} \qquad \frac{l_2}{(\sin\psi_2)_2} = \lambda\left[1 + \lambda\left(\sin\psi_2 \frac{A}{3} - \frac{2}{3}\sin\psi_1 B\right)\right],$$

donde, dalla (21),

$$\text{(27)'} \qquad \frac{l}{\sin\psi} = \lambda\left[1 + \lambda\left(\sin\psi_2 \frac{A}{3} + \sin\psi_1 \frac{B}{3}\right)\right].$$

Le formule (25), (26), (27) costituiscono nel triangolo infinitesimo $O P_1 P_2$ il *teorema dei seni in seconda approssimazione.*

Per ricavare dalle nostre formule quelle del Levi-Civita introduciamo ciò che Egli chiama la *curvatura triangolare* τ, alla quale si può dare questa espressione

$$\tau = \sum_{1}^{3}{}_h \gamma_h \sin\psi_h,$$

ove ora, e nel seguito, indicheremo con ψ_3 l'angolo ψ e con γ_3 la curvatura geodetica γ.

Fissiamo l'attenzione sulla relazione (25).

Si ha:

$$\text{(28)} \qquad \sin\psi_1 \frac{B}{3} - \frac{2}{3}\sin\psi_2 A = \gamma_1 \sin\psi_1 \frac{\sin\psi_1}{6\sin\psi_2\sin\psi_3} -$$
$$- \gamma_2 \sin\psi_2 \frac{3\sin\psi_1\cos\psi_3 + 2\sin\psi_2}{6\sin\psi_1\sin\psi_3} +$$
$$+ \gamma_3 \sin\psi_3 \frac{2\cos\psi_1\sin\psi_2 - \cos\psi_2\sin\psi_1}{6\sin\psi_1\sin\psi_2}.$$

Fra gli angoli ψ_1, ψ_2, ψ_3, che ora si riferiscono allo stesso punto O, sussiste la relazione $\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 = 2\pi$. Quindi

$$\frac{\sin\psi_1}{\sin\psi_2\sin\psi_3} = -\frac{\cos\psi_2\sin\psi_3+\sin\psi_2\cos\psi_3}{\sin\psi_2\sin\psi_3} =$$

$$= -\operatorname{cotg}\psi_2 - \operatorname{cotg}\psi_3 = -\sum_1^3{}_h \operatorname{cotg}\psi_h + \operatorname{cotg}\psi_1 .$$

Possiamo scrivere intanto

$$(29)\qquad \gamma_1\sin\psi_1\frac{\sin\psi_1}{6\sin\psi_2\sin\psi_3} =$$

$$= -\frac{1}{6}\gamma_1\sin\psi_1\sum_1^3{}_h \operatorname{cotg}\psi_h + \frac{1}{6}\gamma_1\cos\psi_1 .$$

Abbiamo poi

$$\frac{3\sin\psi_1\cos\psi_3+2\sin\psi_2}{\sin\psi_1\sin\psi_3} = \operatorname{cotg}\psi_3 + 2\left(\operatorname{cotg}\psi_3 + \frac{\sin\psi_2}{\sin\psi_1\sin\psi_3}\right).$$

Ma

$$\sin\psi_2 = -(\cos\psi_1\sin\psi_3+\sin\psi_1\cos\psi_3),$$

donde

$$\frac{\sin\psi_2}{\sin\psi_1\sin\psi_3} = -\operatorname{cotg}\psi_1 - \operatorname{cotg}\psi_3 .$$

Ne risulta che si può scrivere

$$(30)\qquad -\gamma_2\sin\psi_2\frac{3\sin\psi_1\cos\psi_3+2\sin\psi_2}{6\sin\psi_1\sin\psi_3} =$$

$$= -\frac{1}{6}\gamma_2\sin\psi_2\sum_1^3{}_h \operatorname{cotg}\psi_h + \frac{1}{6}\gamma_2\cos\psi_2 + \frac{1}{2}\gamma_2\operatorname{cotg}\psi_1\sin\psi_2 .$$

Infine si ha

$$\frac{2\cos\psi_1\sin\psi_2-\sin\psi_1\cos\psi_2}{\sin\psi_1\sin\psi_2} = -\sum_1^3{}_h \operatorname{cotg}\psi_h + 3\operatorname{cotg}\psi_1 + \operatorname{cotg}\psi_3 .$$

Ne segue che

$$(31)\qquad \gamma_3\sin\psi_3\frac{2\cos\psi_1\sin\psi_2-\cos\psi_2\sin\psi_1}{6\sin\psi_1\sin\psi_2} =$$

$$= -\frac{1}{6}\gamma_3\sin\psi_3\sum_1^3{}_h \operatorname{cotg}\psi_h + \frac{1}{6}\gamma_3\cos\psi_3 + \frac{1}{2}\gamma_3\operatorname{cotg}\psi_1\sin\psi_3 .$$

Sommando le (29), (30), (31) si ricava

$$\sin\psi_1\frac{B}{3} - \frac{2}{3}\sin\psi_2 A = -\frac{\tau}{2}\sum_1^3{}_h \operatorname{cotg}\psi_h + \frac{1}{6}\sum_1^3{}_h \gamma_h\cos\psi_h +$$

$$+ \operatorname{cotg}\psi_1\left(\frac{1}{2}\sin\psi_1\gamma_1 + \frac{1}{2}\sin\psi_2\gamma_2 + \frac{1}{2}\sin\psi_3\gamma_3\right) - \frac{1}{2}\gamma_1\cos\psi_1,$$

donde la formula definitiva

$$\sin\psi_1 \frac{B}{3} - \frac{2}{3}\sin\psi_2 A = -\frac{1}{2}\gamma_1\cos\psi_1 + \frac{3}{2}\tau\operatorname{cotg}\psi_1 - \\ - \frac{1}{2}\tau\sum_1^3{}_h \operatorname{cotg}\psi_h + \frac{1}{6}\sum_1^3{}_h \gamma_h\cos\psi_h.$$

Il secondo membro di questa identità è quella quantità che il Levi-Civita indica con g_1. La (25) si può quindi scrivere così:

$$\frac{l_1}{(\sin\psi_1)_1} = \lambda(1+\lambda g_1). \tag{32}$$

Posto ancora:

$$g_2 = -\frac{1}{2}\gamma_2\cos\psi_2 + \frac{3}{2}\tau\operatorname{cotg}\psi_2 - \frac{1}{2}\tau\sum_1^3{}_h\operatorname{cotg}\psi_h + \frac{1}{6}\sum_1^3{}_h\gamma_h\cos\psi_h$$

$$g_3 = -\frac{1}{2}\gamma_3\cos\psi_3 + \frac{3}{2}\tau\operatorname{cotg}\psi_3 - \frac{1}{2}\tau\sum_1^3{}_h\operatorname{cotg}\psi_h + \frac{1}{6}\sum_1^3{}_h\gamma_h\cos\psi_h,$$

le relazioni (26), (27), con un calcolo simile a quello ora sviluppato, si trasformano nelle altre

$$\frac{l_2}{(\sin\psi_2)_2} = \lambda(1+\lambda g_2) \tag{33}$$

$$\frac{l_3}{(\sin\psi_3)_3} = \lambda(1+\lambda g_3). \tag{34}$$

Le (32), (33), (34) sono le formule che il Levi-Civita ha ottenuto per il teorema dei seni in seconda approssimazione [5]).

(Pervenuta il 9 Aprile 1934.)

---

[5]) Loc. cit. [1]), Cap. III, § 6.