

COMPOSITIO MATHEMATICA

W. MITROPOLSKY

Sur les propriétés arithmétiques des valeurs des fonctions entières

Compositio Mathematica, tome 3 (1936), p. 190-198

http://www.numdam.org/item?id=CM_1936__3__190_0

© Foundation Compositio Mathematica, 1936, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Sur les propriétés arithmétiques des valeurs des fonctions entières

par

W. Mitropolsky

Moscou

Dans l'étude „Über ganzwertige ganze Funktionen”¹⁾ M. G. Pólya démontre le théorème suivant:

Soit $g(x)$ une fonction entière et $M(r)$ le maximum de $|g(x)|$ dans le cercle $|x| \leq r$. Si les valeurs

$$\dots g(-n), \dots, g(-1), g(0), \dots, g(n), \dots$$

sont des nombres entiers et rationnels et si

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^{\frac{1}{2}} M(r)}{\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^r} = 0,$$

$g(x)$ est un polynôme.

Ensuite M. A. Guelfond dans l'étude „Sur un théorème de M. G. Pólya”²⁾ considère le cas où une fonction entière et ses $p - 1$ premières dérivées prennent des valeurs entières pour les points $0, 1, 2, \dots, n$. M. A. Guelfond a trouvé les conditions auxquelles doit satisfaire une fonction entière $g(x)$ pour que cette fonction soit un polynôme, à savoir

$$|g(x)| < A e^{\alpha|x|}, \text{ où } \alpha < p \log \left(1 + e^{\frac{p-1}{p}}\right).$$

La présente étude a pour but d'examiner aussi le cas des valeurs négatives de l'argument x . Nous verrons que les conditions auxquelles doit satisfaire dans ce cas la fonction entière $g(x)$ sont analogues à celles du théorème de M. A. Guelfond et du théorème de M. G. Pólya.

1. Considérons les polynômes $P_{k+1, q}(x)$ définis par les relations suivantes:

¹⁾ Rendiconti Palermo **40** (1915), 1—16.

Rendicont Accad. Linc. Roma (6) **10** (1929), 569—574.

$$\begin{aligned}
 P_{01}(x) &= 1; & P_{11}(x) &= x; & P_{12}(x) &= x^2; \dots; & P_{1p}(x) &= x^p; \\
 P_{21}(x) &= x^p(x-1); & P_{22}(x) &= x^p(x-1)(x+1); \dots; \\
 P_{2,2p}(x) &= [x(x^2-1)]^p; & P_{31}(x) &= [x(x^2-1)]^p(x-2); \\
 P_{32}(x) &= [x(x^2-1)]^p(x-2)(x+2); \dots; & P_{3,2p}(x) &= \\
 & & &= [x(x^2-1)(x^2-2^2)]^p;
 \end{aligned}$$

$$P_{k+1,q}(x) = [x(x^2-1) \dots (x^2-(k-1)^2)]^p (x-k)^{\lfloor \frac{q+1}{2} \rfloor} (x+k)^{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor},$$

$q = 1, 2, \dots, 2p; k = 0, 1, 2, \dots, n;$ et $P_{k+1,2p+1}(x) = P_{k+2,1}(x);$
 cette dernière formule montre que quand l'indice q a atteint la valeur $2p$, il recommence à croître à partir de 1 et l'indice k augmente de 1.

Par exemple, si $q = 2s - 1,$

$$P_{k+1,2s-1}(x) = [x(x^2-1) \dots (x^2-(k-1)^2)]^p (x-k)^s (x+k)^{s-1};$$

et si $q = 2s,$

$$P_{k+1,2s}(x) = [x(x^2-1) \dots (x^2-(k-1)^2)]^p (x-k)^s (x+k)^s.$$

Prenant pour base l'identité facile à vérifier

$$\frac{P_{k+1,q-1}(x)}{P_{k+1,q}(\zeta)} + \frac{P_{k+1,q}(x)}{P_{k+1,q}(\zeta)} \cdot \frac{1}{\zeta - x} = \frac{P_{k+1,q-1}(x)}{P_{k+1,q-1}(\zeta)} \cdot \frac{1}{\zeta - x},$$

développons la fraction $\frac{1}{\zeta - x}$ en série

$$(1) \quad \frac{1}{\zeta - x} = \frac{P_{01}(x)}{P_{11}(\zeta)} + \frac{P_{11}(x)}{P_{12}(\zeta)} + \dots + \frac{P_{k+1,q-1}(x)}{P_{k+1,q}(\zeta)} + \frac{P_{k+1,q}(x)}{P_{k+1,q}(\zeta)} \cdot \frac{1}{\zeta - x}.$$

Démontrons que si la fonction entière $g(x)$ satisfait à la condition

$$|g(x)| < A e^{\alpha|x|}, \quad \text{où } \alpha < 2p \log(1 + \sqrt{2}),$$

$g(x)$ peut être développée en série de polynomes $P_{k+1,q}(x).$

Multiplions l'égalité (1) par $\frac{1}{2\pi i} g(\zeta) d\zeta$ et intégrons le long

du contour c_n , qui entoure les points $0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n.$ Nous aurons

$$(2) \quad g(x) = A_0 + A_{11}x + A_{12}x^2 + \dots + A_{n+1,q-1}P_{n+1,q-1}(x) + R_{n+1,q}(x),$$

$$\text{où } A_{n+1,q-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_n} \frac{g(\zeta) d\zeta}{P_{n+1,q}(\zeta)}$$

$$\text{et } R_{n+1,q}(x) = \frac{P_{n+1,q}(x)}{2\pi i} \int_{c_p} \frac{g(\zeta) d\zeta}{P_{n+1,q}(\zeta)} \cdot \frac{1}{\zeta - x}.$$

Evaluons maintenant $R_{n+1, q}(x)$. Prenons comme contour d'intégration la circonférence $|\zeta| = rn$, où $r = \sqrt{2}$.

Nous obtenons

$$\begin{aligned}
 |R_{n+1, q}(x)| &< \frac{|P_{n+1, q}(x)|}{2\pi} \\
 &= \frac{Ae^{arn} 2\pi rn}{[rn(r^2n^2-1) \cdots (r^2n^2-(n-1)^2)]^p (rn-n)^{\left[\frac{q+1}{2}\right]} (rn+n)^{\left[\frac{q}{2}\right]}} \\
 &= \frac{Arn}{(rn-n)^{\left[\frac{q+1}{2}\right]} (rn+n)^{\left[\frac{q}{2}\right]}} \cdot \\
 &\quad \cdot \frac{[x(x^2-1) \cdots (x^2-(n-1)^2)]^p (x-n)^{\left[\frac{q+1}{2}\right]} (x+n)^{\left[\frac{q}{2}\right]} e^{arn} \Gamma^p(rn-n)}{\Gamma^p(rn+n+1)} < \\
 &< \frac{Arn(N+n)^{\left[\frac{q+1}{2}\right]} (N+n)^{\left[\frac{q}{2}\right]}}{(rn-n)^{\left[\frac{q+1}{2}\right]} (rn+n)^{\left[\frac{q}{2}\right]}} \cdot \\
 &\quad \cdot \frac{[1 \cdot 2 \cdots N(N+1) \cdots (N+n-1)]^{2p} e^{arn} \Gamma^p(rn-n)}{\Gamma^p(rn+n+1)},
 \end{aligned}$$

nous supposons ici que $|x| < N$, où N est un nombre fini, et nous remplaçons dans l'expression $|P_{n+1, q}(x)|$ chaque facteur linéaire $x \pm k$ par la somme $N + k$; nous multiplions enfin le second membre par $1 \cdot 2 \cdots N$.

Ensuite nous aurons

$$\begin{aligned}
 |R_{n+1, q}(x)| &< \frac{Arn(N+n)^{\left[\frac{q+1}{2}\right] + \left[\frac{q}{2}\right]}}{(rn-n)^{\left[\frac{q+1}{2}\right]} (rn+n)^{\left[\frac{q}{2}\right]}} \cdot \frac{(n!)^{2p} \cdot (2n)^{2p(N-1)} e^{arn} \Gamma^p(rn-n)}{\Gamma^p(rn+n+1)} = \\
 &= \varphi(n) \frac{e^{arn} (n!)^{2p} \Gamma^p(rn-n)}{\Gamma^p(rn+n+1)},
 \end{aligned}$$

où $\varphi(n)$ est une fonction rationnelle de n .

Evaluons $(n!)^{2p}$, $\Gamma^p(rn-n)$, $\Gamma^p(rn+n+1)$ par la formule de Stirling et faisons quelques transformations:

$$\begin{aligned}
 |R_{n+1, q}(x)| &< \varphi(n) \frac{e^{arn+o(n)} [n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi}]^{2p} [(rn-n-1)^{rn-n-\frac{1}{2}} e^{-rn+n+1} \sqrt{2\pi}]^p}{[(rn+n)^{rn+n+\frac{1}{2}} e^{-rn-n} \sqrt{2\pi}]^p} < \\
 &< \varphi_1(n) \frac{e^{arn+o(n)} [n^{2n} n^{rn-n} (r-1)^{rn-n}]^p}{[n^{rn+n} (r+1)^{rn+n}]^p} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \varphi_1(n) e^{arn-pn(r+1) \log(r+1)+pn(r-1) \log(r-1)+o(n)} = \\
&= \varphi_1(n) e^{arn-pnr[\log(r+1)-\log(r-1)]-pn[\log(r+1)+\log(r-1)]+o(n)} = \\
&= \varphi_1(n) e^{arn-pnr \log \frac{(r+1)^2}{r^2-1} -pn \log(r^2-1)+o(n)} = \\
&= \varphi_1(n) e^{[a-2p \log(1+\sqrt{2})]rn-pn \log(2-1)+o(n)} = \\
&= \varphi_1(n) e^{[a-2p \log(1+\sqrt{2})]rn+o(n)},
\end{aligned}$$

où $\varphi_1(n)$ est aussi une fonction rationnelle de n .

Puisque $\alpha < 2p \log(1+\sqrt{2})$, $|R_{n+1, q}(x)| = 0(1)$, quand $n \rightarrow \infty$.

Ceci démontre le

LEMME I. Une fonction entière $g(x)$ qui satisfait à la condition

$$|g(x)| < Ae^{\alpha|x|},$$

où $\alpha < 2p \log(1+\sqrt{2})$, peut être développée en une série

$$g(x) = A_0 + A_{11}x + A_{12}x^2 + \dots + A_{n+1, q-1} P_{n+1, q-1}(x) + \dots$$

qui converge en tous les points finis du plan de la variable complexe x .

2. Examinons particulièrement les coefficients

$$A_{n+1, q-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_p} \frac{g(\zeta) d\zeta}{P_{n+1, q}(\zeta)}.$$

Développons l'expression

$$\frac{1}{P_{n+1, q}(\zeta)} = \frac{1}{[\zeta(\zeta^2-1) \dots (\zeta^2-(n-1)^2)]^p (\zeta-n)^s (\zeta+n)^{s'}},$$

où $s = \left[\frac{q+1}{2} \right]$ et $s' = \left[\frac{q}{2} \right]$,

en fractions élémentaires

$$\begin{aligned}
(3) \quad \frac{1}{P_{n+1, q}(\zeta)} &= \sum_{k=1}^p \frac{u_{0k}}{\zeta^k} + \sum_{k=1}^p \frac{u_{1k}}{(\zeta-1)^k} + \sum_{k=1}^p \frac{u'_{1k}}{(\zeta+1)^k} + \\
&+ \dots + \sum_{k=1}^p \frac{u_{n-1, k}}{(\zeta-n-1)^k} + \sum_{k=1}^p \frac{u'_{n-1, k}}{(\zeta+n-1)^k} + \\
&+ \sum_{k=1}^s \frac{u_{nk}}{(\zeta-n)^k} + \sum_{k=1}^{s'} \frac{u'_{nk}}{(\zeta+n)^k},
\end{aligned}$$

où les coefficients u_{0k} , u_{1k} , \dots , u_{nk} , u'_{nk} sont des constantes.

Introduisons la fonction

$$v_{tn}(\zeta) = \zeta^p(\zeta^2-1)^p \dots (\zeta^2-(t-1)^2)^p (\zeta+t)^p (\zeta^2-(t+1)^2)^p \dots$$

$$(\zeta^2-(n-1)^2)^p (\zeta-n)^s (\zeta+n)^{s'}$$

et désignons par ω_{2n} le plus petit commun multiple des nombres $2, 3, \dots, 2n, \dots$

Nous trouvons

$$\left[\frac{d}{d\zeta} v_{tn}(\zeta) \right]_{\zeta=t} = \frac{p}{t} + \frac{p}{t-1} + \frac{p}{t+1} + \dots +$$

$$+ \frac{p}{t+n-1} + \frac{s}{t-n} + \frac{s'}{t+n}.$$

Il est évident que $\frac{v'_{tn}(t)}{v_{tn}(t)} \omega_{2n}$ est un nombre entier. Nous voyons de même que $\frac{v^{(i)}_{tn}(t)}{v_{tn}(t)} \omega_{2n}^i$ est aussi un nombre entier.

Multiplions maintenant l'égalité (3) par $(\zeta-t)^p$ et posons dans l'égalité obtenue $\zeta=t$.

Nous aurons

$$(4) \quad \frac{1}{v_{tn}(t)} = u_{tp}.$$

Il en résulte que $u_{tp}(2n!)^p$ est un nombre entier. Ecrivons l'égalité (3) sous la forme

$$\frac{1}{P_{n+1, q}(\zeta)} = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=1}^p \frac{u_{mk}}{(\zeta-m)^k} + \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{k=1}^p \frac{u'_{mk}}{(\zeta+m)^k} +$$

$$+ \sum_{k=1}^s \frac{u_{nk}}{(\zeta-n)^k} + \sum_{k=1}^{s'} \frac{u'_{nk}}{(\zeta+n)^k}$$

et transportons dans le second membre tous les termes contenant

$$\frac{1}{(\zeta-t)^{k'}}, \quad k' \geq k,$$

$$\frac{1}{P_{n+1, q}(\zeta)} - \sum_{k'=k}^p \frac{u_{tk'}}{(\zeta-t)^{k'}} = \sum_{k'=1}^{k-1} \frac{u_{tk'}}{(\zeta-t)^{k'}} + \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq t}}^{n-1} \sum_{k=1}^p \frac{u_{mk}}{(\zeta-m)^k} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{k=1}^p \frac{u'_{mk}}{(\zeta+m)^k} + \sum_{k=1}^s \frac{u_{nk}}{(\zeta-n)^k} + \sum_{k=1}^{s'} \frac{u'_{nk}}{(\zeta+n)^k}.$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par $(z-t)^k$ et réduisons le second membre au même dénominateur.

$$\begin{aligned} \frac{(z-t)^k}{v_{tn}(z)(z-t)^p} - \sum_{k'=k}^p \frac{u_{tk'}}{(z-t)^{k'}} (z-t)^k &= \frac{1 - \sum_{k'=k}^p u_{tk'} v_{tn}(z) (z-t)^{p-k'}}{v_{tn}(z) (z-t)^{p-k}} = \\ &= \frac{1 - v_{tn}(z)(z-t)^{p-k} u_{tk} - v_{tn}(z)(z-t)^{p-k-1} u_{t, k+1} - \dots - v_{tn}(z) u_{tp}}{v_{tn}(z) (z-t)^{p-k}}. \end{aligned}$$

La limite de cette expression doit être égale à 0, quand $z = t$, car la limite du second membre est égale à 0, quand $z = t$.

Appliquant à la dernière expression la règle de l'Hospital, nous obtenons

$$\begin{aligned} (p-k)! v_{tn}(t) u_{tk} + u_{t, k+1} \left[\frac{d^{p-k}}{dz^{p-k}} v_{tn}(z) (z-t)^{p-k-1} \right]_{z=t} + \\ + \dots + u_{tp} \left[\frac{d^{p-k} v_{tn}(z)}{dz^{p-k}} \right]_{z=t} = 0, \end{aligned}$$

que nous mettons sous la forme

$$\begin{aligned} (p-k)! v_{tn}(t) u_{tk} + (p-k)! v'_{tn}(t) u_{t, k+1} + \\ + \binom{p-k}{2} (p-k-2)! v''_{tn}(t) u_{t, k+2} + \\ + \dots + \binom{p-k}{\nu} (p-k-\nu)! v_{tn}^{(\nu)}(t) u_{t, k+\nu} + \dots + v_{tn}^{(p-k)}(t) u_{tp} = 0, \end{aligned}$$

d'où

$$(5) \quad (p-k)! u_{tk} = - \sum_{\nu=1}^{p-k} \binom{p-k}{\nu} (p-k-\nu)! u_{t, k+\nu} \frac{v_{tn}^{(\nu)}(t)}{v_{tn}(t)}.$$

Démontrons que le produit

$$(2n!)^p \cdot u_{ti} \cdot p! \omega_{2n}^{p-i}$$

est un nombre entier pour chaque $i = 1, 2, \dots, p$.

Supposons que le produit $(2n!)^p \cdot u_{ti} \cdot p! \omega_{2n}^{p-i}$ soit un nombre entier pour $i = k+1, k+2, \dots, p$.

Multiplions l'égalité (5) par $(2n!)^p \omega_{2n}^{p-k}$. Nous obtenons immédiatement, que $(2n!)^p (p-k)! \omega_{2n}^{p-k} u_{tk}$ est un nombre entier. Dans le cas $i = p$ notre supposition est déjà démontrée (form. 4).

D'après la méthode d'induction complète notre supposition est démontrée.

Ainsi est établi le

LEMME II. Le multiple

$$(2n!)^p \cdot \omega_{2n}^{p-1} \cdot p! u_{tk}$$

est un nombre entier pour chaque t et k , $0 \leq t \leq n$; $1 \leq k \leq p$.

Outre ces deux lemmes introduisons encore le lemme III, connu dans la théorie analytique des nombres.

LEMME III.

$$\omega_{2n} < e^{2n+o(n)^3}.$$

3. Au moyen des trois lemmes précédents démontrons le théorème fondamental.

THÉORÈME. Si la fonction entière $g(x)$ et ses $p-1$ premières dérivées prennent des valeurs entières pour

$$x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n, \dots$$

et si

$$|g(x)| < Ae^{\alpha|x|}, \text{ où } \alpha < 2p \log \left(\frac{1}{2} e^{\frac{1}{p}-1} + \sqrt{\frac{1}{4} e^{\frac{2}{p}-2} + 1} \right),$$

$g(x)$ est un polynôme.

Démonstration. On voit facilement que

$$2p \log \left(\frac{1}{2} e^{\frac{1}{p}-1} + \sqrt{\frac{1}{4} e^{\frac{2}{p}-2} + 1} \right) < 2p \log (1 + \sqrt{2})$$

pour chaque $p \geq 1$. Donc la fonction $g(x)$ satisfait aux conditions du lemme I et peut être développée en série de polynômes $P_{n,q}(x)$

$$(6) \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{n,q} P_{n,q}(x), \quad 1 \leq q \leq 2p,$$

où

$$(7) \quad A_{n+1,q-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_n} \frac{g(z) dz}{[z(z^2-1) \dots (z^2-(n-1)^2)]^p (z-n)^{\lfloor \frac{q+1}{2} \rfloor} (z+n)^{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor}}.$$

³⁾ En effet, $\omega_{2n} = 2^{\lfloor \frac{\log 2n}{\log 2} \rfloor} \cdot 3^{\lfloor \frac{\log 2n}{\log 3} \rfloor} \dots p^{\lfloor \frac{\log 2n}{\log p} \rfloor}$, où $2, 3, \dots, p$ sont des nombres premiers $< 2n$. Ensuite

$$\begin{aligned} \omega_{2n} &= e^{\sum_{q=1}^p \left[\frac{\log 2n}{\log q} \right] \log q} < e^{\sum_{q=1}^p \left[\frac{\log 2n}{\log q} \right] \log q} = \\ &= e^{\pi(2n) \log 2n} = e^{\left[\frac{2n}{\log 2n} + O\left(\frac{2n}{\log^2 2n} \right) \right] \log 2n} = e^{2n+o(n)}, \end{aligned}$$

où $\pi(2n) = \frac{2n}{\log 2n} + O\left(\frac{2n}{\log^2 2n} \right)$ est le nombre de tous les nombres premiers moindres que $2n$.

En appliquant la formule (3), mettons $A_{n+1, q-1}$ sous la forme suivante:

$$\begin{aligned}
 (7') \quad A_{n+1, q-1} &= \sum_{t=0}^{n-1} \sum_{k=1}^p \frac{u_{tk}}{2\pi i} \int_{c_n} \frac{g(\zeta) d\zeta}{(\zeta-t)^k} + \sum_{t=1}^{n-1} \sum_{k=1}^p \frac{u'_{tk}}{2\pi i} \int_{c_n} \frac{g(\zeta) d\zeta}{(\zeta+t)^k} + \\
 &+ \sum_{k=1}^s \frac{u_{tk}}{2\pi i} \int_{c_n} \frac{g(\zeta) d\zeta}{(\zeta-n)^k} + \sum_{k=1}^{s'} \frac{u'_{tk}}{2\pi i} \int_{c_n} \frac{g(\zeta) d\zeta}{(\zeta+n)^k} = \\
 &= \sum_{t=0}^{n-1} \sum_{k=1}^p \frac{u_{tk} g^{(k-1)}(t)}{(k-1)!} + \sum_{t=1}^{n-1} \sum_{k=1}^p \frac{u'_{tk} g^{(k-1)}(t)}{(k-1)!} + \\
 &+ \sum_{k=1}^s \frac{u_{nk} g^{(k-1)}(t)}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{s'} \frac{u'_{nk} g^{(k-1)}(t)}{(k-1)!},
 \end{aligned}$$

où $s = \left[\frac{q+1}{2} \right]$ et $s' = \left[\frac{q}{2} \right]$.

Multiplions les deux membres de cette égalité par

$$(2n!)^p \cdot (p!)^2 \cdot \omega_{2n}^{p-1}.$$

Il résulte du lemme II que le produit

$$\begin{aligned}
 (2n!)^p \cdot (p!)^2 \cdot \omega_{2n}^{p-1} \cdot A_{n+1, q-1} &= \\
 &= \sum_{t=0}^{n-1} \sum_{k=1}^p \frac{(2n!)^p \cdot (p!)^2 \cdot \omega_{2n}^{p-1} \cdot u_{tk} g^{(k-1)}(t)}{(k-1)!} + \\
 &+ \sum_{t=1}^{n-1} \sum_{k=1}^p \frac{(2n!)^p \cdot (p!)^2 \cdot \omega_{2n}^{p-1} \cdot u'_{tk} \cdot g^{(k-1)}(t)}{(k-1)!} + \\
 &+ \sum_{k=1}^s \frac{(2n!)^p \cdot (p!)^2 \cdot \omega_{2n}^{p-1} \cdot u_{tk} \cdot g^{(k-1)}(t)}{(k-1)!} + \\
 &+ \sum_{k=1}^{s'} \frac{(2n!)^p \cdot (p!)^2 \omega_{2n}^{p-1} \cdot u'_{tk} \cdot g^{(k-1)}(t)}{(k-1)!}
 \end{aligned}$$

est un nombre entier, car $g^{(k-1)}(t)$ est un nombre entier pour $k = 1, 2, \dots, p$.

Evaluons maintenant $A_{n+1, q-1}$. Prenons pour cela dans l'égalité (7) comme contour d'intégration la circonférence

$$|\zeta| = rn, \text{ où } r = \sqrt{1 + 4e^{-\frac{2}{p} + 2}}.$$

Nous aurons

$$(8) \quad |A_{n+1, q-1}| < \frac{C e^{arn} \Gamma^p(rn-n)}{\Gamma^p(rn+n+1)}$$

où C est une constante.

En multipliant les deux membres de l'égalité (8) par $(2n!)^p (p!)^2 \omega_{2n}^{p-1}$ et prenant en considération le lemme III, nous obtenons

$$\begin{aligned} |(2n!)^p \cdot (p!)^2 \cdot \omega_{2n}^{p-1} \cdot A_{n+1, q-1}| &< \\ &< \frac{C e^{arn} \Gamma^p(rn-n) \Gamma^p(2n+1) e^{2n(p-1)+o(n)}}{\Gamma^p(rn+n+1)}. \end{aligned}$$

En remplaçant $\Gamma^p(rn-n)$, $\Gamma^p(2n+1)$, $\Gamma^p(rn+n+1)$ par la formule de Stirling, après quelques transformations analogues à celles déjà faites pour évaluer $R_{n+1, q}(x)$, (p.p. 3 et 4), nous trouvons

$$\begin{aligned} |(2n!)^p (p!)^2 \cdot \omega_{2n}^{p-1} \cdot A_{n+1, q-1}| &< \\ &< e^{\left[\alpha - 2p \log \left(\frac{1}{2} e^{\frac{1}{p}-1} + \sqrt{\frac{1}{4} e^{\frac{2}{p}-2} + 1} \right) \right] rn + o(n)} \end{aligned}$$

d'où il résulte que

$$|(2n!)^p \cdot (p!)^2 \cdot \omega_{2n}^{p-1} \cdot A_{n+1, q-1}| = o(1), \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Ce produit étant un nombre entier, il faut que l'on ait à partir d'un certain $n \geq n_1$,

$$|(2n!)^p \cdot (p!)^2 \cdot \omega_{2n}^{p-1} \cdot A_{n+1, q-1}| = 0,$$

c'est à dire $|A_{n+1, q-1}| = 0$, et

$$g(x) = \sum_{n=0}^{n_1-1} A_{n, q} P_{n, q}(x)$$

ce qui démontre le théorème.

4. Posons dans l'expression

$$2p \log \left(\frac{1}{2} e^{\frac{1}{p}-1} + \sqrt{\frac{1}{4} e^{\frac{2}{p}-2} + 1} \right)$$

$p = 1$. Nous obtenons

$$2 \log \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 1} \right) = \log \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right),$$

c'est-à-dire la constante du théorème de M. G. Pólya.

(Reçu le 5 août 1935.)