A. MARKOFF

Sur une propriété caractéristique des polynomes trigonométriques

Compositio Mathematica, tome 3 (1936), p. 305-309
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1936__3__305_0>

Sur une propriété caractéristique des polynomes trigonométriques

par

A. Markoff

Leningrad

---

1. Le but de cette note est la démonstration du théorème suivant:

THÉORÈME. *Soit $f(x)$ une fonction continue périodique de période 1 d'une variable réelle, les valeurs de cette fonction étant des nombres réels ou complexes. Deux cas seulement sont alors possibles: ou bien la somme*

$$\sum_{k=1}^{n} f(k\alpha) \tag{1}$$

considérée comme fonction de l'entier positif n, est bornée pour chaque valeur constante irrationnelle de α; ou bien les valeurs irrationnelles de α pour lesquelles cette somme est une fonction bornée de n forment un ensemble de 1ère catégorie. Le premier cas a lieu quand on peut représenter la fonction $f(x)$ sous la forme

$$f(x) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{2\pi kix} \tag{2}$$

où N est un entier positif et où les a_k sont des constantes, avec en particulier $a_0 = 0$; le second cas a lieu quand $f(x)$ n'admet pas une telle représentation.

2. Nous commençons par un lemme simple concernant la catégorie de certains ensembles.

LEMME 1. *Soit*

$$f_1, f_2, \ldots$$

une suite de fonctions continues d'une variable réelle définies sur tout l'axe réel R; Z_s l'ensemble des zéros de la fonction f_s. Si l'ensemble

$$Z = \sum_{s=1}^{\infty} Z_s \tag{3}$$

est partout dense sur R, alors les valeurs de x pour lesquelles la borne inférieure de $|f_s(x)|$, quand s varie, est positive, forment un ensemble de 1^re^ catégorie.

Démonstration. Désignons par F_n $(n=1, 2, \ldots)$ l'ensemble des nombres x pour lesquels on a

$$|f_s(x)| \geqq \frac{1}{n} \qquad (s=1, 2, \ldots).$$

Les ensembles F_n sont fermés en vertu de la continuité des fonctions f_s. Ces ensembles sont évidemment sans points communs avec l'ensemble Z. On a autrement dit

$$Z \subset R - F_n \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

L'ensemble Z étant partout dense par hypothèse, il en résulte que les ensembles fermés F_n sont non denses.

Mais l'ensemble en question de tous les x pour lesquels la borne inférieure de $|f_s(x)|$ quand s varie est positive n'est autre chose que la somme de tous les F_n. Cet ensemble est donc de 1^re^ catégorie, c.q.f.d.

3. Lemme 2. *Soit $f(x)$ une fonction continue périodique de période* 1 *d'une variable réelle, α un nombre irrationnel, C une constante positive telle qu'on ait*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(k\alpha)\right| \leqq C \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

On a alors

$$\left|\sum_{k=1}^{n} e^{2\pi m k i\alpha} \int_0^1 f(x) e^{-2\pi m i x} dx\right| \leqq 2C \tag{5}$$

$$(n=1, 2, \ldots;\ m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Démonstration. En vertu de la périodicité de la fonction f et de l'inégalité (4) nous avons

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(p+q\alpha+k\alpha)\right| \leqq 2C$$

$$(p=0, \pm 1, \pm 2, \ldots;\ q=0, 1, 2, \ldots).$$

Les nombres $p+q\alpha$ ici obtenus forment un ensemble partout dense, α étant un nombre irrationnel. Nous obtenons donc en vertu de la continuité de la fonction f

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(x+k\alpha)\right| \leqq 2C \qquad (n=1, 2, \ldots;\ -\infty<x<\infty),$$

et cela donne

$$\left|\sum_{k=1}^{n} e^{2\pi mki\alpha}\int_0^1 f(x)e^{-2\pi mix}\,dx\right| = \left|\sum_{k=1}^{n}\int_{-k\alpha}^{1-k\alpha} f(x+k\alpha)\,e^{-2\pi mix}\,dx\right| =$$

$$= \left|\int_0^1 e^{-2\pi mix}\sum_{k=1}^{n} f(x+k\alpha)\,dx\right| \leqq 2C,$$

c.q.f.d.

Lemme 3. *Si les conditions du lemme 2 sont satisfaites, alors*

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0. \tag{6}$$

Démonstration. En posant $m=0$ dans l'inégalité (5) nous obtenons

$$n\left|\int_0^1 f(x)\,dx\right| \leqq 2C \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

ce qui donne l'égalité (6).

Lemme 4. *Si les conditions du lemme 2 sont satisfaites, alors*

$$\left|\frac{1}{1-e^{-2\pi mi\alpha}}\int_0^1 f(x)e^{-2\pi mix}\,dx\right| \leqq C \tag{7}$$
$$(m = \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Démonstration. Quand $m \neq 0$, l'inégalité (5) peut être mise sous la forme

$$|1-e^{2\pi nmi\alpha}|\left|\frac{1}{1-e^{-2\pi mi\alpha}}\int_0^1 f(x)e^{-2\pi mix}\,dx\right| \leqq 2C \tag{8}$$
$$(n = 1, 2, \ldots).$$

Mais la borne supérieure de $|1-e^{2\pi nmi\alpha}|$, quand n varie, est égale à 2, α étant un nombre irrationnel. L'inégalité (7) est donc une conséquence de l'inégalité (8).

4. Lemme 5. *Si les hypothèses du théorème sont satisfaites et si*

$$\int_0^1 f(x)e^{-2\pi kix}\,dx \neq 0$$

pour une infinité de valeurs entières de k, alors les valeurs irrationnelles de α pour lesquelles la somme (1) *est une fonction bornée de n forment un ensemble de 1^{re} catégorie.*

Démonstration. Il existe d'après l'hypothèse une suite k_1, $k_2, \ldots$ de nombres entiers satisfaisant aux conditions

$$0 < |k_1| < |k_2| < \ldots, \tag{9}$$

$$\int_0^1 f(x)e^{-2\pi k_s ix}dx \neq 0 \qquad (s=1,\ 2,\ldots).$$

Posons

$$f_s(x) = \frac{1-e^{-2\pi k_s ix}}{a_{k_s}} \qquad (s=1,\ 2,\ldots),$$

où

(10) $$a_k = \int_0^1 f(x)e^{-2\pi kix}\,dx \quad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots),$$

et désignons par Z_s l'ensemble des zéros de la fonction f_s. Ce dernier ensemble est composé de tous les nombres de la forme $\frac{p}{k_s}$ où p est un entier. L'ensemble (3) est donc partout dense en vertu de (9) et on peut appliquer le lemme 1. L'ensemble P des nombres irrationnels α pour lesquels la borne inférieure, quand s varie, de

$$\left|\frac{1-e^{-2\pi k_s i\alpha}}{a_{k_s}}\right|$$

est positive, est de 1^{re} catégorie d'après ce lemme.

Soit Q l'ensemble des valeurs irrationnelles de α pour lesquelles les quantités $\frac{a_k}{1-e^{-2\pi ki\alpha}}$ forment un ensemble borné, X l'ensemble en question de tous les α irrationnels pour lesquels la somme (1) est une fonction bornée de n. On a évidemment

$$Q \subset P$$

et d'après le lemme 4

$$X \subset Q.$$

L'ensemble P étant de 1re catégorie, il en résulte que X est aussi de 1re catégorie, c.q.f.d.

5. Lemme 6. *Si la fonction f est un polynome trigonométrique de la forme* (2) *avec $a_0 = 0$, alors la somme* (1) *est une fonction bornée de n quel que soit le nombre irrationnel α.*

Démonstration. Nous avons dans ce das

$$\sum_{k=1}^{n} f(k\alpha) = \sum_{s=-N}^{N}{}' a_s \frac{e^{2\pi nsi\alpha}-1}{1-e^{-2\pi si\alpha}},$$

où la petite marque sur le signe Σ indique qu'il s'agit d'une somme incomplète: la lettre s ne prend pas la valeur zéro. Cela donne

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(k\alpha)\right| \leqq 2 \sum_{s=-N}^{N}{}' \left|\frac{a_s}{1 - e^{-2\pi s i \alpha}}\right|$$

et notre lemme est démontré.

6. Il ne reste maintenant qu'à ajouter quelques mots pour compléter la démonstration du théorème énoncé au commencement de cette note.

Considérons le système des coefficients de Fourier (10) de la fonction f. Deux cas peuvent se présenter. Ou bien il existe un entier positif N tel que $a_k = 0$ dès que $|k| > N$, ou bien un tel N n'existe pas. Dans le premier cas, le second membre de l'égalité (2) est la série de Fourier de f et, comme cette fonction est continue, elle est égale à ce polynome trigonométrique. D'ailleurs, si $a_0 = 0$, la somme (1) est d'après le lemme 6 une fonction bornée de n quel que soit le nombre irrationnel α. C'est le premier cas du théorème énoncé. Si $a_0 \neq 0$, il suit du lemme 3 que l'ensemble des α irrationnels pour lesquels la somme (1) est une fonction bornée de n ne contient aucun point, donc il est de 1^{re} catégorie. D'après le lemme 5 il est encore de 1^{re} catégorie s'il n'existe aucun entier positif N tel que $a_k = 0$ pour $|k| > N$. C'est le second cas du théorème énoncé.

Institut de mathématiques et de mécanique (Université d'Etat, Léningrad).

(Reçu le 21 janvier 1936. Reçu avec des modifications le 3 juin 1936.)