COMPOSITIO MATHEMATICA

REINHOLD BAER
FRIEDRICH LEVI

Freie Produkte und ihre Untergruppen

Compositio Mathematica, tome 3 (1936), p. 391-398
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1936__3__391_0>

Freie Produkte und ihre Untergruppen

von

Reinhold Baer und Friedrich Levi
Princeton N. J. Calcutta

Kürzlich hat Herr A. Kurosch [1]) den Schreierschen Satz [2]), daß jede Untergruppe einer freien Gruppe selbst wieder eine freie Gruppe ist, auf die Untergruppen der freien Produkte von beliebigen Gruppen verallgemeinert. Er bewies nämlich: Jede Untergruppe eines freien Produktes $\mathfrak{G}$ ist ein freies Produkt, dessen Faktoren eine freie Gruppe und zu Untergruppen der Faktoren von $\mathfrak{G}$ konjugierte Gruppen sind.

Der kombinatorische, eine komplizierte doppelte transfinite Induktion benutzende Kuroschsche Beweis des Untergruppensatzes wird hier durch einen topologischen Beweis ersetzt werden, der eine Verallgemeinerung des zweiten Johannsonschen Beweises [3]) des Schreierschen Untergruppensatzes darstellt. Dieser Beweis gestattet es auch, den Untergruppensatz wesentlich zu verschärfen. Er liefert nämlich eine Zerlegung mit möglichst großen zu Untergruppen der Faktoren von $\mathfrak{G}$ konjugierten Faktoren und diese Zerlegung hat für manche Anwendungen wichtige Eigenschaften, insbesondere ist sie in gewissem Sinne eindeutig.

Wie der Kuroschsche Untergruppensatz den Beweis des Isomorphiesatzes liefert, daß zwei Zerlegungen einer Gruppe in frei unzerlegbare Faktoren isomorph sind, so liefert der verschärfte Untergruppensatz den Beweis des Verfeinerungssatzes, daß irgend zwei freie Produktzerlegungen einer Gruppe isomorphe Verfeinerungen besitzen [3a]). Der Kuroschsche Isomorphiesatz ist dann ein Spezialfall dieses Verfeinerungssatzes.

---

[1]) A. Kurosch [Math. Ann. **109** (1934, 647—660].

[2]) O. Schreier [Abh. Hamburg **5** (1927), 161—183].

[3]) J. Johannson [Skrifter Norsk Vid. Akad. Oslo, Mat.-nat. Kl. **1** (1931), No. 1].

[3a]) Dies ist umso bemerkenswerter, als der entsprechende Satz für direkte Produkte falsch ist; vergl. z.B. R. Baer, [Quart. J. Oxford **6** (1935), 217—221], W. Krull, Sitz.-Ber. Heidelberg **1932**, Nr. 19.

BEZEICHNUNGEN:

$\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ = Durchschnitt von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$.

$\mathfrak{A} * \mathfrak{B}$ = Freies Produkt von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$.

$\overset{*}{\Pi}\mathfrak{A}_\nu$ = Freies Produkt der $\mathfrak{A}_\nu$.

$\mathfrak{U} \subset \mathfrak{A}$ bedeutet: $\mathfrak{U}$ ist Untergruppe von $\mathfrak{A}$.

$\mathfrak{A} \backsim \mathfrak{B}$ bedeutet: $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind [einstufig] isomorph.

Aus der Definition des freien Produktes folgen zunächst fast unmittelbar die drei Sätze:

I. *Ist* $\mathfrak{G} = \overset{*}{\Pi}\mathfrak{G}_\nu$ *und* $\mathfrak{G}_\sigma \neq \mathfrak{G}_\varrho$, *so sind* $\mathfrak{G}_\sigma$ *und* $\mathfrak{G}_\varrho$ *nicht in* $\mathfrak{G}$ *konjugiert.*

Führt man nämlich in $\mathfrak{G}$ die Relation $\mathfrak{G}_\varrho = 1$ ein, so werden alle Konjugierten von $\mathfrak{G}_\varrho$ zu 1; es bleibt aber $\mathfrak{G}_\sigma$ unverändert. Wären also $\mathfrak{G}_\varrho$ und $\mathfrak{G}_\sigma$ konjugiert, so müßten beide Gruppen von Anfang an $= 1$ sein, entgegen der Voraussetzung $\mathfrak{G}_\varrho \neq \mathfrak{G}_\sigma$.

II. *Ist* $\mathfrak{G} = \mathfrak{A} * \mathfrak{B}$ *und* $\mathfrak{N}$ *der kleinste* $\mathfrak{A}$ *enthaltende Normalteiler von* $\mathfrak{G}$, *so ist* $\mathfrak{B} \backsim \mathfrak{G}/\mathfrak{N}$.

Durch die Relation $\mathfrak{A} = 1$ wird $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ reduziert und andererseits zu $\mathfrak{B}$ isomorph.

III. *Ist* $\mathfrak{G} = \mathfrak{A} * \overset{*}{\Pi}\mathfrak{B}_\nu = \mathfrak{C} * \overset{*}{\Pi}\mathfrak{D}_\nu$, *und ist jeweils* $\mathfrak{B}_\nu$ *zu* $\mathfrak{D}_\nu$ *in* $\mathfrak{G}$ *konjugiert, so ist* $\mathfrak{A} \backsim \mathfrak{C}$.

Die Relationen $\mathfrak{B}_\nu = 1$ und $\mathfrak{D}_\nu = 1$ sind äquivalent. Durch ihre Einführung wird $\mathfrak{G}$ einerseits zu $\mathfrak{A}$, andererseits zu $\mathfrak{C}$ isomorph.

UNTERGRUPPENSATZ: *Es sei* $\mathfrak{U}$ *eine Untergruppe von* $\mathfrak{G} = \overset{*}{\Pi}\mathfrak{G}_\nu$. *Dann gibt es eine Zerlegung von* $\mathfrak{U}$:

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{F} * \overset{*}{\Pi}\mathfrak{U}_i, \tag{1}$$

so daß

1.) $\mathfrak{F}$ *eine freie Gruppe und*

$$\mathfrak{U}_i = \mathfrak{U} \cap w_i \mathfrak{G}_\nu w_i^{-1} \quad \textit{mit} \quad \nu = \nu(i) \quad \textit{und} \quad w_i \quad \textit{aus} \quad \mathfrak{G},$$

2.) *zu jeder Gruppe* $\mathfrak{U} \cap w\mathfrak{G}_\nu w^{-1} \neq 1$ *mit beliebigen* ν, w *genau ein* $\mathfrak{U}_j$ *in* $\mathfrak{U}$ *konjugiert ist.*

Topologische Vorbemerkung zum Beweis:

Zu jeder beliebigen Gruppe $\mathfrak{A}$ gibt es einen Komplex A, dessen Fundamentalgruppe $\mathfrak{A}$ ist. [Man kann sich einen solchen Komplex A z.B. dadurch verschaffen, daß man in einem Dehnschen Gruppenbild von $\mathfrak{A}$ jeden einer erzeugenden Relation entsprechenden Zyklus mit einer zweidimensionalen Zelle ausfüllt und dann alle Punkte [4]) des Gruppenbildes identifiziert.] A kann unendlich viele Elemente enthalten, insbesondere können Punkte auftreten, an die (eventuell nicht abzählbar) unendlich viele Strecken angeheftet sind. Es gehört aber zu jeder zweidimensionalen Zelle ein endlicher Zyklus als Berandung und je zwei Punkte von A sind durch einen endlichen Streckenzug auf A verbunden. Zu jeder Untergruppe $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{A}$ gehört ein — bis auf Isomorphismen eindeutig bestimmter [5]) — unverzweigter Überlagerungskomplex E, dessen Fundamentalgruppe $\mathfrak{E}$ ist. Ein Komplex, der keine Zyklen (und folglich keine zweidimensionalen Zellen) enthält, heißt Baum. Man kann von einem Punkte O von A ausgehend eine [aufsteigende] Folge von Bäumen B_0, $B_1, \ldots$ konstruieren, deren Vereinigungsmenge wieder ein Baum B ist, der alle Punkte des Komplexes A enthält: es sei etwa $B_0 = O$, und B_{i+1} entstehe aus B_i, indem man alle die Punkte von A, die zwar nicht zu B_i gehören, aber mit Hilfe einer Strecke von B_i aus erreichbar sind, mit einer solchen Strecke an B_i anheftet. Bei dieser speziellen Konstruktion gehören alle von O ausgehenden, in einem anderen Punkte endigenden Strecken zu B. — Ist B' ein auf A liegender Baum und zieht man B' in einen Punkt zusammen, d.h. deformiert man A so in einen Komplex A^*, daß B' in einen Punkt übergeht, so hat A^* dieselbe Fundamentalgruppe wie A; denn durch den Prozeß des Zusammenziehens werden die geschlossenen Wege von A und A^* eineindeutig aufeinander abgebildet und zwar nullhomotope auf nullhomotope.

Beweis: Es sei nun $\mathfrak{G} = \overset{*}{\prod}\mathfrak{G}_\nu$. Zu jedem $\mathfrak{G}_\nu$ werde ein Komplex Γ_ν konstruiert, dessen Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}_\nu$ ist; A_ν sei der jeweilige „Bezugspunkt'' (Anfangspunkt der die Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}_\nu$ bestimmenden Wege). Jedem Γ_ν wird eine für den Komplex charakteristische „*Farbe*'' zugeteilt. Die Γ_ν sind punktfremd; durch Strecken $t_\nu = A_\nu O$ werden sie in O zu einem Komplex Γ mit der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ und dem Bezugspunkt O zusammengeheftet. Die Strecken t_ν werden farblos gelassen; da sie zu keinem einfachen Zyklus gehören, kann man ihnen die Gruppeneins zuordnen. $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{G}$ ist dann Fundamentalgruppe eines Γ unverzweigt überlagerten Komplexes Φ. Von Γ werden die Farben und Wegebezeichnungen auf Φ durchgedrückt.

---

[4]) Punkt, Strecke u. s. f. sind stets im Sinne der kombinatorischen Topologie zu verstehen.

[5]) Vergl. etwa: H. Seifert & W. Threlfall, Lehrbuch der Topologie [Leipzig 1934], 193.

Hierbei mögen über O bzw. A_ν bzw. t_ν die Punkte O^1, $O^2, \ldots$ bzw. $A_\nu^1, A_\nu^2, \ldots$ bzw. die Strecken t_ν^1, $t_\nu^2, \ldots$ liegen. Dabei sei O^1 der Bezugspunkt für $\mathfrak{U}$. Läßt man die $O^\varkappa$ und t_ν^μ weg, so zerfällt Φ in einfarbige Komplexe Φ_i. Wegen der Unverzweigtheit der Überlagerung ist jeder Punkt $O^\varkappa$ zu genau einem Φ_i von vorgegebener Farbe benachbart. Man kann daher zwei gleichfarbige Φ_i nicht durch einen Weg von farblosen t_ν^μ, sondern nur unter Benutzung anderer Farben verbinden.

Φ_i sei mit $\mathfrak{G}_\nu$ gleichfarbig. Unter den auf Φ_i liegenden Punkten A_ν^μ wähle man P_i als Bezugspunkt der Fundamentalgruppe $\mathfrak{H}_i$ von Φ_i aus. Ferner sei w_i ein — zunächst noch beliebiger — Weg O^1P_i auf Φ. Dann ist:

$$\mathfrak{H}_i \subset \mathfrak{G}_\nu, \quad \mathfrak{U}_i = w_i\, \mathfrak{H}_i w_i^{-1} \subset \mathfrak{U}. \tag{2}$$

Zieht man jedes Φ_i in den zugehörigen Punkt P_i zusammen, so geht Φ in einen Streckenkomplex Σ über. Seine Fundamentalgruppe mit O^1 als Bezugspunkt heiße $\mathfrak{F}$.

Es wird jetzt über die w_i so verfügt, daß die so definierten $\mathfrak{U}_i$ und $\mathfrak{F}$ die im Untergruppensatz geforderte Zerlegung (1) liefern.

Zu diesem Zweck konstruiere man auf jedem Φ_i einen alle Punkte von Φ_i enthaltenden Baum B_i und ergänze diese B_i zu einem alle Punkte von Φ enthaltenden Baum B. Zieht man jedes Φ_i in den zugehörigen Punkt P_i zusammen, so entsteht aus B ein alle Punkte von Σ enthaltender Baum B_0. Durch diesen, im übrigen beliebigen Baum B_0 und die Bäume B_i ist B eindeutig bestimmt. w_i ist dann der O^1 mit P_i verbindende Weg aus B. Zieht man B nach O^1 zusammen, so geht Φ in Φ^*, Σ in Σ^*, $w_i + \Phi_i$ in Φ_i^* über. Es besteht Φ^* aus den nur im Punkte O^1 zusammengehefteten Komplexen Σ^* und Φ_i^*. Die Fundamentalgruppen von Φ^*, Σ^*, Φ_i^* sind $\mathfrak{U}$ bzw. $\mathfrak{F}$ bzw. $\mathfrak{U}_i$. Es gilt also (1). Da Σ^* aus in O^1 zusammengehefteten Zyklen besteht (jedes nicht zu B gehörige t_ν^μ liefert einen Zyklus) ist $\mathfrak{F}$ eine freie Gruppe. Wegen (2) ist $\mathfrak{U}_i \subset \mathfrak{U} \cap w_i\, \mathfrak{G}_\nu w_i^{-1}$. Um die Richtigkeit von 1.) nachzuweisen, genügt es also, zu zeigen, daß $w_i g w_i^{-1}$ zu $\mathfrak{U}_i$ gehört, falls es zu $\mathfrak{U}$ gehört und dabei g mit $\mathfrak{U}_i$ gleichfarbig ist.

Es entspricht $w_i g w_i^{-1}$ auf Φ ein Weg $O^1 w_i P_i \gamma P_i w_i^{-1} O^1$. Das Stück γ hat die Farbe von P_i, muß also (von etwaigen farblosen der 1 zugeordneten Strecken t_ν^μ abgesehen) ganz in Φ_i verlaufen. Also gehört $w_i g w_i^{-1}$ zu $\mathfrak{U}_i$. Die Bedingung 1.) ist mithin erfüllt.

Zu jedem Element $\neq 1$ einer von 1 verschiedenen Gruppe

$\mathfrak{K} = \mathfrak{U} \cap w\mathfrak{G}_\mu w^{-1}$ gehört ein auf Φ geschlossener Weg

$$O^1 w A^\varkappa_\mu \gamma A^\varkappa_\mu w^{-1} O^1. \tag{3}$$

Der Streckenzug γ hat die Farbe von $\mathfrak{G}_\mu$, liegt also ganz in dem Φ_j, auf dem $A^\varkappa_\mu$ liegt. Setzt man andererseits in (3) für γ einen von $A^\varkappa_\mu$ ausgehenden, auf Φ_j liegenden, geschlossenen Streckenzug ein, so erhält man ein Element von $\mathfrak{K}$. Es ist daher $\mathfrak{K} = ww_j^{-1}\mathfrak{U}_j w_j w^{-1}$ und mithin $\mathfrak{K}$ zu $\mathfrak{U}_j$ in $\mathfrak{G}$ konjugiert. Um zu beweisen, daß $\mathfrak{K}$ auch in $\mathfrak{U}$ zu $\mathfrak{U}_j$ konjugiert ist, wähle man auf Φ_j einen von $A^\varkappa_\mu$ nach P_j führenden Weg. Dieser ist einem Element g' von $\mathfrak{G}_\mu$ überlagert und $wg'w_j^{-1}$ ist auf Φ ein geschlossener Weg überlagert, also Element von $\mathfrak{U}$. Wegen $\mathfrak{G}_\mu = g'\mathfrak{G}_\mu(g')^{-1}$ ist

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{U} \cap (wg')\mathfrak{G}_\mu(wg')^{-1} = (wg'w_j^{-1})\mathfrak{U}_j(wg'w_j^{-1})^{-1}$$

in $\mathfrak{U}$ zu $\mathfrak{U}_j$ konjugiert. Wäre $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{U}$ zu $\mathfrak{U}_k \neq \mathfrak{U}_j$ konjugiert, so müßten $\mathfrak{U}_j$ und $\mathfrak{U}_k$ zu einander in $\mathfrak{U}$ konjugiert sein, was nach I unmöglich ist. Damit ist der Untergruppensatz bewiesen.

Wendet man den Untergruppensatz auf einen Normalteiler $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{G}$ an, so sieht man, daß jedes $\mathfrak{U}_i$ zu einem $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{G}_\nu$ konjugiert ist. $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{G}_\nu$ ist Normalteiler von $\mathfrak{G}_\nu$. Die nicht trivialen Normalteiler eines freien Produktes von einfachen Faktoren sind daher freie Gruppen.

Folgerung 1.: *Sind* $\mathfrak{U} = \mathfrak{F} * \overset{*}{\prod} \mathfrak{U}_i$ *und* $\mathfrak{U} = \mathfrak{F}' * \overset{*}{\prod} \mathfrak{U}'_i$ *zwei den Bedingungen des Untergruppensatzes genügende Zerlegungen von* $\mathfrak{U}$, *so ist* $\mathfrak{F} \backsim \mathfrak{F}'$ *und jedes* $\mathfrak{U}_i$ *ist zu genau einem* $\mathfrak{U}'_j$ *in* $\mathfrak{U}$ *konjugiert und umgekehrt.*

Beweis: Wegen Bedingung 2.) des Untergruppensatzes ist jedes $\mathfrak{U}'_j$ zu einem $\mathfrak{U}_i$ konjugiert und umgekehrt. Aus I. folgt, daß diese Beziehung eineindeutig sein muß, und wegen III. ist $\mathfrak{F} \backsim \mathfrak{F}'$.

Die $\mathfrak{U}_i$ durchlaufen ein vollständiges Repräsentantensystem der Klassen von in $\mathfrak{U}$ konjugierten Gruppen $\mathfrak{K} = \mathfrak{U} \cap w\mathfrak{G}_\nu w^{-1} \neq 1$. Man kann nun diese Repräsentanten so auswählen, daß

a) *ein beliebig vorgegebenes* $\mathfrak{K}$ *zu den Faktoren* $\mathfrak{U}_i$ *gehört,* oder daß

b) *alle* $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{G}_\nu \neq 1$ *zugleich zu den Faktoren* $\mathfrak{U}_i$ *gehören.*

Es ist nämlich $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{U}$ zu einem $\mathfrak{U}_j$ aus einer entsprechend dem Untergruppensatz vorgenommen Zerlegung (1) konjugiert. Durch inneren Automorphismus von $\mathfrak{U}$ geht diese Zerlegung also in eine mit $\mathfrak{K}$ als Faktor über. Um aber die Bedingung b) zu erfüllen, hat man im Beweis des Untergruppensatzes den Baum B_0 so zu wählen, daß alle von O^1 ausgehenden Strecken zu ihm gehören.

Das ist (vergl. die topologische Vorbemerkung) stets möglich.

Dagegen ist es i. A. unzulässig, das Repräsentantensystem ganz beliebig zu wählen, wie folgendes

Beispiel zeigt:

$\mathfrak{U} = \mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 * \mathfrak{G}_2$. $a \neq 1$ aus $\mathfrak{G}_1$, $b \neq 1$ aus $\mathfrak{G}_2$.

$\mathfrak{U}_1 = \mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{U}_2 = \mathfrak{G}_2$.

$\mathfrak{U}_1' = aba\,\mathfrak{G}_1(aba)^{-1}$, $\mathfrak{U}_2' = aba\,\mathfrak{G}_2(aba)^{-1}$.

Dann sind $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$ und $\mathfrak{U}_1'$, $\mathfrak{U}_2'$ zulässige Wahlen des Repräsentantensystems, aber $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2'$ und ebenso $\mathfrak{U}_1'$, $\mathfrak{U}_2$ unzulässige.

Ändert man die Zerlegung (1) dadurch ab, daß man Faktoren $\mathfrak{U}_i$, welche freie Gruppen sind, aus $\overset{*}{\Pi}$ herausnimmt und mit $\mathfrak{F}$ frei multipliziert, so genügt die Zerlegung der Bedingung 1.), aber nicht mehr 2.) Man sieht leicht ein, daß man alle Zerlegungen, die nur 1.) genügen, auf diese Art erhält.

Folgerung 2: *Der Durchschnitt von zwei freien Faktoren einer Gruppe ist selbst ein freier Faktor.*

Beweis: Es sei $\mathfrak{A} * \mathfrak{L} = \mathfrak{U} * \mathfrak{H}$. Dann zerlege man $\mathfrak{U}$ nach dem Untergruppensatz als Untergruppe von $\mathfrak{A} * \mathfrak{L}$. Die Zerlegung kann (nach Zusatz a oder b) so eingerichtet werden, daß $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{U}$ als Faktor auftritt. Es ist also $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{U}$ freier Faktor von $\mathfrak{U}$ und folglich von $\mathfrak{U} * \mathfrak{H} = \mathfrak{A} * \mathfrak{L}$.

Folgerung 3: *Ist $\mathfrak{G} = \overset{*}{\Pi}\mathfrak{G}_\nu$, $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{N}$ die von allen Gruppen $\mathfrak{K}_j = w_j \mathfrak{G}_\nu w_j^{-1} \cap \mathfrak{U}$ erzeugte Untergruppe, so ist $\mathfrak{N}$ das freie Produkt eines Teilsystems der $\mathfrak{K}_j$.*

Beweis: Es sei

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{F} * \overset{*}{\Pi}\mathfrak{U}_i \tag{1}$$

eine den Bedingungen des Untergruppensatzes genügende Zerlegung von $\mathfrak{U}$. Jedes $\mathfrak{K}_j$ ist dann zu einem $\mathfrak{U}_i$ in $\mathfrak{U}$ konjugiert. Die Zerlegung (1) induziert dann in der Untergruppe $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{U}$ eine Zerlegung

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{F}^n * \overset{*}{\Pi}\mathfrak{N}_\mu,$$

wobei in die freie Gruppe $\mathfrak{F}^n$ auch etwaige $\mathfrak{F}$ überlagerte Faktoren aufgenommen sind. Nun ist jedes $\mathfrak{K}_j = v\mathfrak{U}_i v^{-1} = v\mathfrak{U}_i v^{-1} \cap \mathfrak{N}$ (mit v aus $\mathfrak{U}$) nach Bedingung 2.) des auf $\mathfrak{U}$ angewandten Untergruppensatzes zu einem $\mathfrak{N}_\mu$ in $\mathfrak{N}$ konjugiert. Der kleinste, alle $\mathfrak{K}_j$ enthaltende Normalteiler von $\mathfrak{N}$ liegt also im kleinsten $\overset{*}{\Pi}\mathfrak{N}_\mu$ enthaltenden Normalteiler. Da die $\mathfrak{K}_j$ die Gruppe $\mathfrak{N}$ erzeugen, sind beide Normalteiler $= \mathfrak{N}$. Aus II folgt dann, daß $\mathfrak{F}^n = 1$

und daher $\mathfrak{N} = \overset{*}{\Pi}\, \mathfrak{N}_\mu$ ist. Jedes $\mathfrak{N}_\mu$ ist aber zu einem $\mathfrak{U}_i$ konjugiert und daher ein $\mathfrak{K}_j$.

Folgerung 4: *Eine Gruppe kann nicht zugleich frei zerlegbar und direkt zerlegbar sein.*

Beweis: Es seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ von 1 verschieden und $\mathfrak{A} * \mathfrak{B} = \mathfrak{C} \times \mathfrak{D}$. Ist nun $a \neq 1$ ein Element von $\mathfrak{A}$, g ein Element von $\mathfrak{A} * \mathfrak{B}$, so kann a nur dann mit g vertauschbar sein, wenn g auch zu $\mathfrak{A}$ gehört. $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ sind miteinander elementweise vertauschbar; da sie nicht zugleich Untergruppen von $\mathfrak{A}$ sein können, muß $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C} = 1$ sein. Ebenso ist $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C} = 1$. Nun ist $\mathfrak{C}$ Normalteiler von $\mathfrak{A} * \mathfrak{B}$ und daher auch zu allen mit $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$ konjugierten Gruppen fremd. Zerlegt man $\mathfrak{C}$ als Untergruppe von $\mathfrak{A} * \mathfrak{B}$ nach dem Untergruppensatz, so ergibt sich, daß $\mathfrak{C}$ eine freie Gruppe ist. Ebenso ist auch $\mathfrak{D}$ eine zu $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ fremde freie Gruppe. Zerlegt man $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}$ in seine Komponenten, so erkennt man, daß $\mathfrak{A} \backsim \mathfrak{A}/\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}$ zu seiner Komponente in $\mathfrak{C}$ isomorph ist. Diese ist aber als Untergruppe der freien Gruppe $\mathfrak{C}$ selbst frei. Ebenso ist $\mathfrak{B}$ und mithin auch $\mathfrak{A} * \mathfrak{B}$ frei, also direkt unzerlegbar.

Verfeinerungssatz: *Es seien*

$$\mathfrak{G} = \overset{*}{\Pi}\, \mathfrak{A}_\nu \quad \textit{und} \quad \mathfrak{G} = \overset{*}{\Pi}\, \mathfrak{B}_\mu \tag{4}$$

freie Zerlegungen derselben Gruppe $\mathfrak{G}$. *Dann kann man durch* $\mathfrak{A}_\nu = \overset{*}{\Pi}\, \mathfrak{A}_{\nu k} * \mathfrak{F}_\nu^a$ *und* $\mathfrak{B}_\mu = \overset{*}{\Pi}\, \mathfrak{B}_{\mu i} * \mathfrak{F}_\mu^b$ *verfeinerte Zerlegungen* $\mathfrak{G} = \overset{*}{\underset{\nu, k}{\Pi}} \mathfrak{A}_{\nu k} * \overset{*}{\underset{\nu}{\Pi}} \mathfrak{F}_\nu^a$ *und* $\mathfrak{G} = \overset{*}{\underset{\mu, i}{\Pi}}\, \mathfrak{B}_{\mu i} * \overset{*}{\underset{\mu}{\Pi}}\, \mathfrak{F}_\mu^b$ *finden, derart, daß die* $\mathfrak{A}_{\nu k}$ *und* $\mathfrak{B}_{\mu i}$ *paarweise zu einander konjugiert und* $\overset{*}{\underset{\nu}{\Pi}} \mathfrak{F}_\nu^a$, $\overset{*}{\underset{\mu}{\Pi}} \mathfrak{F}_\mu^b$ *isomorphe freie Gruppen sind.*

Beweis: Man zerlege jedes $\mathfrak{A}_\nu$ nach dem Untergruppensatz entsprechend der zweiten Zerlegung von $\mathfrak{G}$ und ebenso jedes $\mathfrak{B}_\mu$ entsprechend der ersten Zerlegung. Dann ist $\mathfrak{A}_{\nu k} = \mathfrak{A}_\nu \cap w_k \mathfrak{B}_\varrho w_k^{-1}$, und $\mathfrak{B}_{\mu i} = \mathfrak{B}_\mu \cap u_i \mathfrak{A}_\sigma u_i^{-1}$ ist konjugiert zu $u_i^{-1} \mathfrak{B}_\mu u_i \cap \mathfrak{A}_\sigma$, also konjugiert zu einem $\mathfrak{A}_{\sigma t}$. Nach I kann $\mathfrak{B}_{\mu i}$ zu keinem anderen $\mathfrak{A}_{\nu k}$ konjugiert sein. Es ist also jeder Faktor aus $\overset{*}{\underset{\mu, i}{\Pi}}\, \mathfrak{B}_{\mu i}$ zu genau einem Faktor aus $\overset{*}{\underset{\nu, k}{\Pi}} \mathfrak{A}_{\nu k}$ konjugiert umd umgekehrt. Aus III folgt dann noch $\overset{*}{\underset{\nu}{\Pi}} \mathfrak{F}_\nu^a \backsim \overset{*}{\underset{\mu}{\Pi}} \mathfrak{F}_\mu^b$.

Folgerung: *Sind in* (4) *alle* $\mathfrak{A}_\nu$ *frei unzerlegbare Gruppen, so läßt sich jedes* $\mathfrak{B}_\mu$ *als freies Produkt frei unzerlegbarer Gruppen* *darstellen. Sind die* $\mathfrak{B}_\mu$ *gleichfalls frei unzerlegbar, so ist jedes nicht freie* $\mathfrak{A}_\nu$ *zu genau einem* $\mathfrak{B}_\mu$ *konjugiert und umgekehrt und das Produkt der freien* $\mathfrak{A}_\nu$ *ist dem Produkt der freien* $\mathfrak{B}_\mu$ *isomorph.*

Es liegt die Vermutung nahe, daß zwischen zwei freien Zerlegungen einer Gruppe in frei-unzerlegbare Faktoren eine Möglichkeit des Austausches entsprechender Faktoren in Analogie zu den Sätzen von Remak und O. Schmidt über direkte Zerlegung besteht. Wie aber das S. [6] 396 angegebene Beispiel lehrt, gilt ein derartiger Austauschsatz nicht.

(Eingegangen den 23. Oktober 1934.)