COMPOSITIO MATHEMATICA

A. HEYTING

Bemerkungen zu dem Aufsatz von Herrn Freudenthal "Zur intuitionistischen Deutung logischer Formeln"

Compositio Mathematica, tome 4 (1937), p. 117-118
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1937__4__117_0>

Bemerkungen zu dem Aufsatz von Herrn Freudenthal „Zur intuitionistischen Deutung logischer Formeln"

von

A. Heyting

Enschede

1. Faßt man einen *Satz* auf als den sprachlichen Ausdruck für eine *Tatsache*, so wird der Sinn des Satzes erst durch seinen Beweis gegeben, denn die einzigen Tatsachen in der intuitionistischen Mathematik sind die mathematischen Beweise und Konstruktionen. Dieser Schluß fehlt für *Aufgaben*, denn eine Aufgabe ist nicht der Ausdruck für eine Tatsache. In einer Aufgabe sind bestimmte mathematische Systeme gegeben; gesucht wird ein mathematisches System, das sie alle enthält.

2. Betrachten wir das Beispiel von Hrn. F.: „Aus der Rationalität der Eulerschen Konstanten folgt die ihrer Quadratwurzel". Eine Lösung dieser Aufgabe könnte z.B. in der Weise erfolgen, daß ein gewandter Analytiker aus den drei Gleichungen (1) die Definition der Eulerschen Konstanten C, (2) $C = \frac{m}{n}$, (3) $(m, n) = 1$ durch Umformung m und n in quadratischer Gestalt erhält: $m = [\varphi(m, n)]^2$, $n = [\psi(m, n)]^2$, wo φ und ψ ganzzahlige Funktionen sind. Prinzipiell braucht der numerische Wert von m und n dazu nicht bekannt zu sein (wenn er sich auch in diesem Fall *nachher* aus den letzten beiden Gleichungen ermitteln ließe). Sobald man eine mögliche Form der Lösung angeben kann, ist sicher mit der Aufgabe ein Sinn verbunden.

3. Daß die Aufgabe $a \supset b$ u.U. gelöst werden kann, ohne daß die Lösung von a bekannt ist, zeigt folgendes einfache Beispiel. Unter a verstehe ich die Aufgabe: „In der dezimalen Entwicklung von π eine Ziffernfolge 0123456789 zu finden", unter b die Aufgabe: „In der dezimalen Entwicklung von π eine Ziffernfolge 012345678 zu finden". Offenbar kann b durch eine sehr einfache Konstruktion auf a zurückgeführt werden.

4. Die weiteren Bemerkungen von Hrn. F. führen auf die

Aufstellung einer intuitionistischen Klassenlogik hinaus. Sein Ansatz scheint mir aber nur auf Mengen anwendbar; so könnte der Satz: „Jede in (0,1) volle Funktion ist gleichmäßig stetig" nach Hrn. Freudenthal erst gedeutet werden, nachdem eine Menge aller vollen Funktionen definiert wäre, was doch wohl erst auf Grund dieses Satzes möglich ist. Soll man deshalb den Satz samt dem Brouwerschen Beweis als sinnlos verwerfen? Abgesehen von der praktischen Durchführbarkeit würde eine solche Einschränkung der Freiheit bei der Bildung von mathematischen Begriffen der intuitionistischen Geisteshaltung widersprechen.

5. Die genaue Bedeutung des Ausdrucks „jedes Element der Menge M" ist schwer zu umschreiben; ich glaube aber nicht, daß die Formulierung des Verf., der dazu gerät, von zwei verschiedenen Exemplaren desselben Individuums zu sprechen, zur Klarheit wesentlich beiträgt. Vorläufig gebe ich der folgenden Formulierung den Vorzug: Jedes Element der Menge M hat die Eigenschaft E, wenn man, bevor man anfängt, durch Wahlen ein Element von M zu bestimmen, sicher ist, daß, wie die Wahlen auch ausfallen, nach einer endlichen Anzahl von Wahlen das Erfülltsein von E sich herausstellen wird.

(Eingegangen den 16. Oktober 1935.)

NACHWORT VON HANS FREUDENTHAL.

In dem Beispiel unter 2 kann ich m und n ohneweiteres nur als Buchstaben, nicht als natürliche Zahlen deuten. Der intuitionistische (über das Sprachliche und Heuristische hinausgehende) Sinn einer Aussage wie in diesem Beispiel (Ähnliches gilt für 3) muß meiner Meinung nach noch gefunden werden, vielleicht im Prädikatenkalkül. Daß ein solcher Kalkül nur auf Mengen, nicht auf Spezies anwendbar sein könnte, wie in 4 vermutet wird, halte ich für unwahrscheinlich.

(Eingegangen den 29. April 1936.)