COMPOSITIO MATHEMATICA

HANS FREUDENTHAL

Bettische Gruppe mod. 1 und Hopfsche Gruppe

Compositio Mathematica, tome 4 (1937), p. 235-238

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1937__4__235_0>

Bettische Gruppe mod. 1 und Hopfsche Gruppe

von

Hans Freudenthal
Amsterdam

In Fußnote [8]) der Arbeit „Die Hopfsche Gruppe, . . .“ [1]) haben wir angegeben, daß man die Beziehungen zwischen der Hopfschen Gruppe und den Homologieeigenschaften eines kompakten Raumes einfacher aussprechen und beweisen kann, wenn man mit der Bettischen Gruppe co mod 1 [2]) arbeitet. Es gilt dann der

Satz: *Bettische Gruppe co mod* 1 (*höchster Dimension*) *und Hopfsche Gruppe sind Charakteregruppen mod* 1 *voneinander.*

Dieser Satz beruht auf einem

Hilfssatz: *Q sei ein Teilpolyeder des $(d+1)$-dimensionalen Polyeders P, $\mathfrak{H}^d(Q, P)$* [3]) *sei die Gruppe der Zyklen aus Q co mod* 1, *die in P co mod* 1 *beranden. S^d sei die d-dimensionale Sphäre. Notwendig und hinreichend für die Fortsetzbarkeit der Abbildung* [4]) *$fQ \subset S^d$ zu einer Abbildung $fP \subset S^d$ ist die Beziehung $f\mathfrak{H}^d(Q, P) = 0$.*

Das ist nichts Anderes als der Erweiterungssatz von H. Hopf [5]), nur co mod 1 formuliert. Die Formulierung co mod 1 gestattet es, den Hilfssatz etwas einfacher zu beweisen; prinzipiell unterscheidet sich unser Beweis aber kaum vom Hopfschen.

In **1** beweisen wir den Hilfssatz, in **2** beweisen wir unsern Satz für Polyeder, in **3** allgemein. Ob auch der Hilfssatz allgemein (d.h. für kompakte Räume statt Polyeder) gilt, ist uns nicht bekannt. Dagegen ergibt sich aus unserm Satz ohne weiteres:

Zwei Abbildungen eines d-dimensionalen kompakten Raumes in die S^d gehören dann und nur dann zur selben Abbildungsklasse,

---

[1]) Compositio Math. **2** (1935), 134—162.

[2]) Diese Sprechweise habe ich in vorstehender Arbeit [Compositio Math, **4** (1935), 145—234] eingeführt; co mod 1 soll heißen: mit den reellen Zahlen mod 1 als Koeffizientenbereich.

[3]) Auch diese Bezeichnung stammt aus vorstehender Arbeit.

[4]) Es handelt sich hier nur um eindeutige stetige Abbildungen.

[5]) Commentarii Helvet. **5** (1933), 39—54, Satz 2.

wenn sie denselben Homomorphismus der d-ten Bettischen Gruppe co mod 1 induzieren [6]).

1. Die Notwendigkeit der Bedingung des Hilfssatzes ist evident; wir beweisen, daß sie hinreichend ist. Dabei dürfen wir f bekanntlich als simplizial voraussetzen.

$\mathfrak{K}^d(Q)$ bzw. $\mathfrak{K}^d(P)$ sei die Gruppe der Linearformen k^d aus den d-dimensionalen Simplexen von Q bzw. P mit reellen Zahlen mod 1 als Koeffizienten. $\mathfrak{H}^d(P)$ sei die Gruppe *der* $k^d \subset \mathfrak{K}^d(P)$, die Rand eines k^{d+1} (Linearform aus den $(d+1)$-dimensionalen Simplexen von P) sind. $\mathfrak{K}^d(Q)$ und $\mathfrak{H}^d(P)$ sind *abgeschlossene* Untergruppen von $\mathfrak{K}^d(P)$.

$\chi_i(k^d)$ gebe an, mit welchem Koeffizienten das i-te Simplex u_i^d von S^d in fk^d auftritt. χ_i ist ein stetiger Charakter mod 1 von $\mathfrak{K}^d(Q)$. Wir setzen nun χ_i auf ganz $\mathfrak{K}^d(P)$ stetig fort, und zwar setzen wir $\chi_i = 0$ auf $\mathfrak{H}^d(P)$. Dann ist χ_i auf der von $\mathfrak{K}^d(Q)$ und $\mathfrak{H}^d(P)$ erzeugten Gruppe U als Charakter mod 1 stetig definiert. Daß diese Definition wirklich eindeutig ist, sieht man so:

Sei $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$, $x_\nu \subset \mathfrak{K}^d(Q)$, $y_\nu \subset \mathfrak{H}^d(P)$. Dann ist $x = x_1 - x_2 \subset \mathfrak{K}^d(Q)$, $y = y_1 - y_2 \subset \mathfrak{H}^d(P)$ und $x + y = 0$, also $x = -y \subset \mathfrak{K}^d(Q) \wedge \mathfrak{H}^d(P)$ [7]) $= \mathfrak{H}^d(Q, P)$. Nach Voraussetzung ist dann aber $\chi_i(x) = \chi_i(y) = 0$. Also ist $\chi_i(x_1) = \chi_i(x_2)$, $\chi_i(y_1) = \chi_i(y_2)$, also wirklich $\chi_i(x_1+y_1) = \chi_i(x_2+y_2)$.

Das auf der Untergruppe U der Torusgruppe $\mathfrak{K}^d(P)$ stetig definierte χ_i läßt sich nun auf ganz $\mathfrak{K}^d(P)$ als stetiger Charakter mod 1 fortsetzen [8]).

Zu einem d-dimensionalen Simplex t_k^d von P gehört die abgeschlossene Untergruppe αt_k^d von $\mathfrak{K}^d(P)$ (α reell mod 1). Durch χ_i wird sie stetig homomorph in die Additionsgruppe der reellen Zahlen mod 1 abgebildet. Es gibt also ein ganzzahliges p_{ik} derart, daß $\chi_i(\alpha t_k^d) = p_{ik}\alpha$ identisch in α mod 1 gilt. Genau wie H. Hopf [9]) erweitern wir f auf die Gesamtheit der t^d derart, daß für jedes k gilt: $ft_k^d = \sum\limits_i p_{ik} u_i^d$. Da dann jedes Element von $\mathfrak{H}^d(P)$, insbesondere also der Rand jedes t^{d+1}, durch f auf 0 abgebildet wird, läßt sich f auf ganz P als Abbildung in die S^n fortsetzen [9]).

2. Die Hopfsche Gruppe des Polyeders P^d kann man (siehe

---

6) Das ist (für Polyeder) im Wesentlichen der Hopfsche Satz 1, a. a. O. [5]).

7) $\wedge$ bedeutet die Durchschnittsbildung.

8) Siehe etwa J. W. Alexander, L. Zippin [Annals of Math. (2) **36** (1935), 71—85], 78, Corollary.

9) a. a. O. [5]), 49.

8 a.a.O. [1]) so erhalten: Man betrachtet „spezielle" Abbildungen $fP^d \subset S^d$, $gP^d \subset S^d$ (die jedes $(d-1)$-dimensionale Simplex in den Nordpol abbilden), versteht unter $(f+g)k^d$ den Ausdruck $fk^d + gk^d$ (k^d=Linearform co mod 1 in den d-dimensionalen Simplexen von P^d) und identifiziert zwei Abbildungen, die zur selben Klasse gehören.

Um unsern Satz (für Polyeder) zu beweisen, brauchen wir nach L. Pontrjagin [10]) nur zu zeigen, daß die Bettische Gruppe co mod 1 und die Hopfsche Gruppe ein primitives Gruppenpaar bilden, sobald einer Abbildungsklasse, repräsentiert durch die „spezielle" Abbildung f, und einem Element der Bettischen Gruppe co mod 1, repräsentiert durch einen Zyklus z^d, als „Produkt" der Koeffizient α von S^d in $fz^d = \alpha S^d$ zugeordnet wird.

Daß es zu jedem $z^d \neq 0$ ein f gibt mit $fz^d \neq 0$ ist klar; man nehme nur ein Simplex t^d, das in z^d mit nichtverschwindendem Koeffizienten (mod 1) auftritt, und bilde es in naheliegender Weise auf S^d und alles Übrige auf den Nordpol ab.

Aus den Hilfssatz schließt man in bekannter Weise [11]), daß $fz^d \neq 0$ (identisch in z^d) die Unwesentlichkeit von f nach sich zieht [12]). Zu jedem wesentlichen f gibt es also ein z^d mit $fx^d \neq 0$. Das Gruppenpaar ist also wirklich primitiv.

3. Wir dürfen uns den d-dimensionalen kompakten Raum, den wir untersuchen, in eine R_n-adische Folge P_n d-dimensionaler Polyeder entwickelt denken [13])

$$\varphi_n^m P_m \subset P_n .$$

Diese Entwicklung induziert [14]) eine G_n-adische Entwicklung der Bettischen Gruppe co mod 1 von R in die Folge der Bettischen Gruppen $\mathfrak{B}^d(P_n)$:

$$\varphi_n^m \mathfrak{B}^d(P_m) \subset \mathfrak{B}^d(P_n).$$

Weiter induziert sie aber [15]) eine G_n-ale Entwicklung der Hopfschen

---

[10]) Annals of Math. (2) 35 (1934), 361—388, Theorem 5. Doch ist man auf die Pontrjaginsche Theorie eigentlich nicht angewiesen, da es sich hier um die elementaren Fälle handelt — die Hopfsche Gruppe ist eine Gruppe von endlich vielen Erzeugenden.

[11]) a. a. O. [6]), 43—45.

[12]) Der Hilfssatz wird also nicht annähernd in seinem vollen Umfang angewendet.

[13]) Vorstehende Arbeit [2]), Kap. VI. Die Tatsache, die wir hier verwenden, ist jedoch viel elementarer, da wir keine auf -R_n-adische Entwicklung brauchen.

[14]) a. a. O. [2]), Nr. 40, Hauptsatz V, Folgerung 1.

[15]) a. a. O. [1]), 155 oben.

Gruppe $H(R)$ von R in der Folge der Hopfschen Gruppen $H(R_n)$:

$$H(P_n)\varphi_n^m \subset H(P_m);$$

wir schreiben hier das Funktionszeichen hinter das Argument, weil ein Element von $H(P_n)$, repräsentiert durch die Abbildung $f_n P_n \subset S^d$, durch φ_n^m abgebildet wird auf ein Element von $H(P_m)$, repräsentiert durch die Abbildung $f_m P_m \subset S^d$ mit $f_n \varphi_n^m = f_m$.

Nach **2** bilden $\mathfrak{B}^d(P_n)$ und $H(P_n)$ ein primitives Gruppenpaar mod 1. Dabei ist, wenn der Zyklus z_n ein Element von $\mathfrak{B}^d(P_n)$ repräsentiert,

$$f_n(\varphi_n^m z_m) = (f_n \varphi_n^m) z_m.$$

Die Limesgruppen der beiden Folgen bilden also [16]) ebenfalls ein primitives Gruppenpaar mod 1, was wir beweisen wollten.

(Eingegangen den 2. November 1935.)

[16]) a. a. O. [2]), Nr. 20—21.