COMPOSITIO MATHEMATICA

A. KHINTCHINE

Über singuläre Zahlensysteme

Compositio Mathematica, tome 4 (1937), p. 424-431
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1937__4__424_0>

Über singuläre Zahlensysteme

von

A. Khintchine

Moskau

---

1. Im folgenden bedeuten alle lateinischen Buchstaben ganze rationale, alle griechischen reelle Zahlen.

Es ist schon mehrmals betont worden, daß die Schwierigkeiten, auf die die Erforschung der simultanen Approximationen mehrerer reeller Zahlen mittels rationaler Brüche stößt, und die formal mit der Abwesenheit eines befriedigenden mehrdimensionalen kettenbruchähnlichen Algorithmus zusammenhängen, ihren wahren Grund im Wesen des Problems haben, indem nämlich einige der wichtigsten Gesetzmäßigkeiten, die den eindimensionalen Fall beherrschen und seine Erforschung wesentlich erleichtern, sich auf das mehrdimensionale Problem grundsätzlich nicht übertragen lassen. Die zwei wichtigsten Beispiele dieses Sachverhalts sind wohl die folgenden.

A. Ist θ irrational, so gibt es beliebig große Zahlen λ, für die die Ungleichungen

$$|q\theta - p| < \frac{1}{\lambda}, \; q > 0$$

nur mit $q > \frac{\lambda}{2}$ gelöst werden können [1]).

Demgegenüber gibt es bei jedem $n > 1$ *linear unabhängige* reelle Zahlen $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ mit folgender Eigenschaft: für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes $\lambda > \lambda_0 = \lambda_0(\varepsilon)$ können die Ungleichungen

$$|q\theta_i - p_i| < \frac{1}{\lambda} \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

mit $0 < q < \varepsilon\lambda^n$ gelöst werden [2]).

---

[1]) Vgl. z.B. Koksma, Diophantische Approximationen [Springer 1935], (im folgenden als K. zitiert), Kap. III, Satz 24.

[2]) K., Kap. V, Satz 8(*b*).

Ein Zahlensystem $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$, dem diese Eigenschaft zukommt, wollen wir als *singulär* bezeichnen; bei $n = 1$ sind alle rationalen Zahlen und nur diese singulär; bei jedem $n > 1$ gibt es hingegen linear unabhängige singuläre Systeme (jedes linear abhängige System ist trivialerweise singulär).

B. Ist θ irrational, α beliebig reell, so ist die Ungleichung

$$|q\theta - p - \alpha| < \frac{1}{q}$$

mit beliebig großen q lösbar[3]).

Demgegenüber gibt es bei jedem $n > 1$ *linear unabhängige* $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ und dazu reelle $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, so daß die Ungleichungen

$$|q\theta_i - p_i - \alpha_i| < \frac{C}{q^{\frac{1}{n}}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

wie groß auch C sei, höchstens eine endliche Anzahl von Lösungen besitzen[4]).

Die soeben erklärte Eigenschaft des Zahlensystems $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ wollen wir mit B bezeichnen. Bei $n = 1$ besitzen alle rationalen Zahlen und nur diese die Eigenschaft B. Bei jedem $n > 1$ gibt es hingegen linear unabhängige Systeme $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$, denen diese Eigenschaft zukommt (für linear abhängige Systeme ist das trivialerweise der Fall).

Die Gegenüberstellung dieser Ergebnisse läßt schon vermuten, daß zwischen den singulären Systemen und denjenigen mit der Eigenschaft B gewisse Beziehungen bestehen müssen; fallen doch bei $n = 1$ die beiden Klassen vollständig zusammen. Es ist auch bekannt, daß man zum Beweise der Existenz von Systemen mit der Eigenschaft B gerade die singulären Systeme benutzte.

Hier soll gezeigt werden, daß die beiden Begriffe bei jedem n vollständig zusammenfallen: *alle singulären Systeme und nur diese haben die Eigenschaft* B, so daß den beiden Erscheinungen in Wirklichkeit dieselbe Singularität zugrunde liegt. Nur der Kürze halber soll der Beweis für $n = 2$ durchgeführt werden; seine Verallgemeinerung auf beliebige n ist sehr naheliegend.

Zum Schluß beweisen wir, daß bei jedem n die Menge der singulären $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$ das n-dimensionale Maß Null hat.

2. Das Zahlenpaar (θ_1, θ_2) sei singulär. Dann läßt sich zu-

---

[3]) K., Kap. VI, Satz 1.

[4]) K., Kap. VII, Satz 3.

nächst folgendes behaupten: *zu jedem* $\varepsilon > 0$ *und jedem* $\lambda_1 \geqq \lambda_0 = \lambda_0(\varepsilon)$ *gibt es ganze Zahlen* x_1, x_2, x_3, *die die Ungleichungen*

$$(1) \qquad | x_1\theta_1 + x_2\theta_2 + x_3 | < \frac{1}{\lambda_1}, \quad 0 < \varrho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < \varepsilon\sqrt{\lambda_1}$$

erfüllen [5]). Wir bezeichnen im folgenden mit $\varrho = \varrho(\lambda_1)$ die kleinste positive Zahl $\varrho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, die der ersten Ungleichung (1) genügt. Offenbar ist ϱ eine niemals abnehmende Funktion von λ_1, und es ist $\varrho = o(\sqrt{\lambda_1})$. Die nacheinanderfolgenden Werte von ϱ seien

$$(2) \qquad \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n, \ldots$$

Die Zahl ϱ_n der Reihe (2) heiße *normal*, wenn $\varrho_{n+1} > a\varrho_n$ ist, wo $a > 1$ eine später näher zu bestimmende (absolute) Konstante bedeutet. Wir wählen aus der Zahlenfolge (2) eine Teilfolge

$$(3) \qquad \varrho_{n_1}, \varrho_{n_2}, \ldots, \varrho_{n_k}, \ldots;$$

um die Vorschrift für diese Wahl anzugeben, müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

A) Die Anzahl der normalen ϱ_n in (2) sei endlich; für $n \geqq n_1$ ist also ϱ_n nicht normal; in diesem Fall sei allgemein $\varrho_{n_{k+1}}$ die kleinste Zahl der Reihe (2), die größer als $a\varrho_{n_k}$ ist $(k=1, 2, \ldots)$; in (3) ist dann $\varrho_{n_{k+1}} > a\varrho_{n_k}$; ferner ist

$$\varrho_{n_{k+1}-1} \leqq a\varrho_{n_k}, \quad \varrho_{n_{k+1}} \leqq a\varrho_{n_{k+1}-1}$$

(letzteres weil $\varrho_{n_{k+1}-1}$ nicht normal ist), woraus durch Multiplikation

$$\varrho_{n_{k+1}} \leqq a^2\varrho_{n_k}$$

folgt.

B) Die Anzahl der normalen ϱ_n in (2) sei unendlich. In diesem Fall werden zunächst alle normalen ϱ_n in die Teilfolge (3) aufgenommen. Es seien ϱ_k, ϱ_l $(k < l)$ zwei unmittelbar nacheinanderfolgende normale Glieder der Folge (2); ϱ_{l_1} sei das größte Glied, das $< \frac{1}{a}\varrho_l$ ist; offenbar ist $\varrho_{l_1} \geqq \varrho_k$; ϱ_{l_1} wird in die Folge

[5]) Vgl. meine Abhandlung „Über die angenäherte Auflösung linearer Gleichungen in ganzen Zahlen" [erscheint demnächst in Acta Arithmetica], No. 3 Behauptung (A). In der dortigen Terminologie lautet die Behauptung des Textes: $\Phi(\theta) = 0$, wenn $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ singulär ist.

aufgenommen, aber alle etwaigen zwischen ϱ_{l_1} und ϱ_l liegenden Glieder von (2) werden gestrichen; ist $\varrho_{l_1} > \varrho_k$, so sei ϱ_{l_2} die größte Zahl der Reihe (2), die $< \frac{1}{a}\,\varrho_{l_1}$ ist; offenbar ist $\varrho_{l_2} \geqq \varrho_k$; ϱ_{l_2} wird in die Teilfolge aufgenommen, während alle etwaigen zwischen ϱ_{l_2} und ϱ_{l_1} liegenden Glieder von (2) gestrichen werden; der Prozeß wird fortgesetzt bis einmal $\varrho_{i_1} = \varrho_k$ wird, was offenbar nach endlich vielen Schritten notwendig eintreten muß. Indem man die geschilderte Konstruktion für jedes Paar konsekutiver normaler ϱ_n durchführt, erhält man in eindeutiger Weise die Teilfolge (3). Für diese gilt nun offenbar erstens $\varrho_{n_{k+1}} > a\varrho_{n_k}$; ist ferner $\varrho_{n_k} < \varrho_s \leqq \varrho_{n_{k+1}}$, so gilt zweitens $\varrho_s \geqq \frac{1}{a}\,\varrho_{n_{k+1}}$, da ϱ_{n_k} nach Definition die größte Zahl von (2) ist, die kleiner als $\frac{1}{a}\,\varrho_{n_{k+1}}$ ausfällt.

Es genügt somit in beiden Fällen die Teilfolge (3) den beiden Forderungen:

1. $\varrho_{n_{k+1}} > a\varrho_{n_k}$ $\qquad (k = 1, 2, \ldots)$;
2. für $\varrho_{n_k} < \varrho_s \leqq \varrho_{n_{k+1}}$ ist $\varrho_{n_{k+1}} \leqq a^2\varrho_s$.

Nun ist jedes ϱ_{n_k} nach seiner Definition ein Wert der Funktion $\varrho(\lambda_1)$; man hat also[6] $\varrho_{n_k} = \sqrt{\{x_1^{(k)}\}^2 + \{x_2^{(k)}\}^2}$ und

$$|\, x_1^{(k)}\theta_1 + x_2^{(k)}\theta_2 + x_3^{(k)} \,| < \frac{1}{\lambda_1}\,. \tag{4}$$

Wir betrachten in der $\xi\eta$-Ebene die Schar der parallelen Geraden

$$x_1^{(k)}\xi + x_2^{(k)}\eta + y^{(k)} = 0, \tag{5}$$

wo $x_1^{(k)}$ und $x_2^{(k)}$ fest gedacht sind, während $y^{(k)}$ ganzzahlig veränderlich ist. Denkt man sich eine beliebige zu (5) senkrechte Parallelenschar gezogen, in der der gegenseitige Abstand von zwei benachbarten Geraden ebenfalls $\frac{1}{\varrho_{n_k}}$ ist, so wird die Ebene in Quadrate von der Seitenlänge $\frac{1}{\varrho_{n_k}}$ zerlegt. Jedes dieser Quadrate verkleinern wir nun konzentrisch im linearen Verhältnis 1 : 2; die neuentstandenen Quadrate von der Seitenlänge $\frac{1}{2\varrho_{n_k}}$ sollen als *Quadrate vom Rang k* bezeichnet werden.

---

[6]) Sollten zu einem ϱ_{n_k} mehrere Zahlenpaare $(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$ gehören, so soll stets nur eines von ihnen in Betracht gezogen werden.

Es ist nun klar, daß falls man die oben eingeführte Zahl a genügend groß wählt, jedes Quadrat vom Rang k ein Quadrat vom Rang $k+1$ in seinem Inneren enthalten muß ($a=8$ genügt schon). Folglich gibt es eine Folge von Quadraten $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots$, so daß Q_k ein Quadrat von Rang k ist und ganz innerhalb Q_{k-1} liegt. Man bezeichne mit (α_1, α_2) die Koordinaten des Punktes, der allen Q_k gemeinsam ist. Offenbar ist dann der Punkt (α_1, α_2) für jedes k von jeder Geraden der Schar (5) zum mindesten um $\frac{1}{4\varrho_{n_k}}$ entfernt, so daß

$$(6) \qquad | x_1^{(k)}\alpha_1 + x_2^{(k)}\alpha_2 + y^{(k)} | \geqq \frac{1}{4} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

gilt.

Ich behaupte nun, daß (θ_1, θ_2) in bezug auf das Zahlenpaar (α_1, α_2) die Eigenschaft B hat. Denn wären die Ungleichungen

$$| q\theta_1 - p_1 - \alpha_1 | < \frac{C}{\sqrt{q}}, \quad | q\theta_2 - p_2 - \alpha_2 | < \frac{C}{\sqrt{q}}$$

mit beliebig großem q lösbar, so hätte man

$$(7) \quad \theta_1 = \frac{p_1}{q} + \frac{\alpha_1}{q} + \frac{\delta_1 C}{q^{\frac{3}{2}}}, \; \theta_2 = \frac{p_2}{q} + \frac{\alpha_2}{q} + \frac{\delta_2 C}{q^{\frac{3}{2}}}, \; | \delta_1 | < 1, \; | \delta_2 | < 1.$$

Ist nun ε eine positive Zahl, die später näher bestimmt werden soll, und setzt man

$$\lambda = \frac{q}{(2C\varepsilon)^{\frac{2}{3}}},$$

bestimmt ferner die Zahlen s und k durch

$$\varrho_s = \varrho(\lambda), \quad \varrho_{n_k} < \varrho_s \leqq \varrho_{n_{k+1}},$$

so ist $\varrho_{n_{k+1}} = \varrho(\lambda_1)$, $\lambda_1 \geqq \lambda$; es gibt also ganze Zahlen $x_1^{(k+1)}$, $x_2^{(k+1)}$, $x_3^{(k+1)}$ mit

$$| x_1^{(k+1)}\theta_1 + x_2^{(k+1)}\theta_2 + x_3^{(k+1)} | < \frac{1}{\lambda_1} \leqq \frac{1}{\lambda} = \frac{(2C\varepsilon)^{\frac{2}{3}}}{q},$$

und dabei ist für genügend großes q nach 2. und wegen $\varrho(\lambda) = o(\sqrt{\lambda})$

$$\{x_1^{(k+1)}\}^2 + \{x_2^{(k+1)}\}^2 = \varrho_{n_{k+1}}^2 < a^4\varrho_s^2 < \varepsilon^2\lambda.$$

Wegen (7) erhält man

$$\left|\frac{x_1^{(k+1)}p_1+x_2^{(k+1)}p_2+x_3^{(k+1)}q}{q}+\frac{x_1^{(k+1)}\alpha_1+x_2^{(k+1)}\alpha_2}{q}\right|<\frac{1}{\lambda}+\frac{2C\varrho_{n_{k+1}}}{q^{\frac{3}{2}}}<$$

$$<\frac{(2C\varepsilon)^{\frac{2}{3}}}{q}+\frac{2C\varepsilon\sqrt{\lambda}}{q^{\frac{3}{2}}}=\frac{2(2C\varepsilon)^{\frac{2}{3}}}{q},$$

also bei geeignet gewähltem ganzen z

$$|\,x_1^{(k+1)}\alpha_1+x_2^{(k+1)}\alpha_2+z\,|<2(2C\varepsilon)^{\frac{2}{3}},$$

was mit (6) in Widerspruch steht, wenn ε genügend klein gewählt war. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

3. Nun sei das Zahlenpaar (θ_1, θ_2) nicht singulär. Dann gibt es eine feste positive Zahl γ mit folgender Eigenschaft: es gibt beliebig große Zahlen λ_1, so daß die Ungleichungen

$$(8)\qquad |\,q\theta_i-p_i\,|<\frac{1}{\lambda_1}\quad (i=1,2)\quad (0<q<\gamma\lambda_1^2)$$

keine Lösungen in ganzen q, p_i haben. Man wähle ein derartiges λ_1, und q sei die kleinste natürliche Zahl, die zusammen mit passend gewählten p_1, p_2 die beiden ersten Ungleichungen (8) befriedigt; es ist also

$$(9)\qquad q\geqq\gamma\lambda_1^2.$$

Man bezeichne mit d_i den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen q, p_i $(i=1,2)$, und setze $q=q'_i d_i$, $p_i=p'_i d_i$ $(i=1,2)$.

α_1, α_2 seien beliebige reelle Zahlen. Man setze

$$[q'_i\alpha_i]=s_i\quad (i=1,\ 2),$$

und bestimme b_1, b_2, r_1, r_2 aus den Kongruenzen

$$p'_i b_i\equiv 1,\quad p'_i r_i\equiv s_i\quad (\mathrm{mod}\ q'_i)\quad (i=1,2);$$

endlich setze man

$$(10)\qquad r_2-r_1=m.$$

Nach einem früher von mir bewiesenen Satze [7]) gibt es dann vier Zahlen x_1, x_2, y_1, y_2, die den Bedingungen

$$(11)\qquad x_1b_1-x_2b_2\equiv m\quad (\mathrm{mod}\ q),$$

$$x_i=j_iq'_i+y_i\quad (0\leqq j_i<d_i;\ i=1,2),$$

$$|\,y_i\,|<A_1\frac{\sqrt{q}}{d_i}\quad (i=1,2)$$

[7]) Math. Ann. **113** (1936), 412, Hilfssatz 4.

genügen, wo A_1 (wie auch A_2, A_3, A_4 im folgenden) eine positive, nur von γ abhängende Konstante bedeutet.

Andererseits ist [8])

$$d_i < A_2\sqrt{q} \quad (i=1, 2). \tag{12}$$

Wegen (10) und (11) gibt es eine ganze Zahl x, $0 \leqq x < q$, so daß

$$x \equiv x_1 b_1 + r_1 \equiv x_2 b_2 + r_2 \pmod{q}$$

ist. Es folgt für $i = 1, 2$

$$xp'_i \equiv (x_i b_i + r_i)\, p'_i \equiv x_i + s_i \equiv y_i + s_i \pmod{q'_i},$$

also bei geeignet gewählten ganzen z_i

$$|\, xp'_i - z_i q'_i - s_i \,| = |y_i| < A_1 \frac{\sqrt{q}}{d_i},$$

$$|\, xp'_i - z_i q'_i - \alpha_i q'_i \,| < 1 + A_1 \frac{\sqrt{q}}{d_i},$$

und folglich nach (12)

$$|\, xp_i - z_i q - \alpha_i q \,| < d_i + A_1\sqrt{q} < A_3\sqrt{q},$$

$$\left|\, x\frac{p_i}{q} - z_i - \alpha_i \,\right| < \frac{A_3}{\sqrt{q}}. \tag{13}$$

Da bekanntlich $q < \lambda_1^2$ ist, folgt aus (8) für $i = 1, 2$

$$\left|\, \theta_i - \frac{p_i}{q} \,\right| < \frac{1}{q^{\frac{3}{2}}},$$

wonach (13) wegen $x < q$

$$|\, x\theta_i - z_i - \alpha_i \,| < \frac{A_4}{\sqrt{q}} < \frac{A_4}{\sqrt{x}} \quad (i=1,\ 2)$$

ergibt, sofern $x > 0$ ist; es kann aber x beliebig groß vorausgesetzt werden; denn ist das System $a\theta_i - b_i - \alpha_i = 0$ $(i=1, 2)$ nicht in ganzen a, b_i lösbar, so muß offensichtlich mit q auch x unendlich groß werden; hat hingegen dieses System eine ganzzahlige Lösung a, b_1, b_2, so ist, $x = a + q$ gesetzt,

$$|\, x\theta_i - b_i - p_i - \alpha_i \,| = |\, q\theta_i - p_i \,| < \frac{1}{\sqrt{q}} < \frac{2}{\sqrt{x}} \quad (i = 1, 2),$$

und hierin ist x mit q beliebig groß.

Somit ist gezeigt, daß das Zahlenpaar (θ_1, θ_2) nicht die Eigenschaft B besitzen kann; der in 1 angekündigte Satz ist dadurch vollständig bewiesen.

---

[8]) l.c. [7]), Hilfssatz 5.

4. Es bleibt uns nun, den sehr leichten Beweis der Tatsache zu erbringen, daß das Maß der Menge aller singulären Zahlenpaare (θ_1, θ_2) gleich Null ist.

Man bezeichne mit $E_n(\varepsilon)$ die Menge aller Punkte (θ_1, θ_2) des Einheitsquadrats, die folgender Bedingung genügen: es gibt ganze Zahlen a, b, c, so daß

$$|a\theta_1 + b\theta_2 + c| < \frac{1}{n}, \quad 0 < \varrho = \sqrt{a^2 + b^2} < \varepsilon\sqrt{n}$$

gilt. Um das Maß dieser Menge abzuschätzen, nennen wir $\varrho = \sqrt{a^2 + b^2}$ den *Rang* der Geraden $a\xi + b\eta + c = 0$; ist $U(\varrho)$ die Anzahl der ganzzahligen Lösungen der Gleichung $x^2 + y^2 = \varrho^2$, so gibt es offenbar für $\varrho > 0$ weniger als $C_1\varrho U(\varrho)$ Gerade vom Rang ϱ, die das Einheitsquadrat durchsetzen (C_1, wie auch C_2, C_3 im folgenden, bedeutet eine absolute Konstante). Man denke sich um jede dieser Geraden als Mittellinie einen Parallelstreifen der Breite $\frac{2}{\varrho n}$ gelegt; der Gesamtinhalt dieser Streifen, soweit sie im Einheitsquadrat verlaufen, ist dann offenbar kleiner als

$$C_1\varrho U(\varrho)\sqrt{2}\,\frac{2}{\varrho n} = C_2\,\frac{U(\varrho)}{n};$$

andererseits muß evidenterweise jeder Punkt der Menge $E_n(\varepsilon)$, wenn wir ϱ von 1 bis $\varepsilon\sqrt{n}$ laufen lassen, mindestens einem der erhaltenen Streifen angehören; danach ist, wenn mE allgemein das Maß der Menge E bedeutet,

$$mE_n(\varepsilon) \leqq \frac{C_2}{n}\sum_{\varrho=1}^{\varepsilon\sqrt{n}} U(\varrho) < C_3\varepsilon^2.$$

Nun muß nach der am Beginn von 2. gemachten Bemerkung jeder Punkt (θ_1, θ_2) des Einheitsquadrats, dessen Koordinaten ein singuläres Zahlenpar bilden, für alle genügend großen n der Menge $E_n(\varepsilon)$ angehören; bedeutet S die Menge aller singulären Zahlenpaare (θ_1, θ_2) mit $0 \leqq \theta_1 < 1$, $0 \leqq \theta_2 < 1$, so ist deswegen

$$mS \leqq C_3\varepsilon^2,$$

und da ε beliebig klein gewählt werden kann,

$$mS = 0,$$

w.z.b.w. (die Einschränkung auf das Einheitsquadrat ist natürlich ganz unwesentlich).

(Eingegangen den 15. Mai 1936.)