COMPOSITIO MATHEMATICA

S. SIDON

Nachtrag zu meiner Arbeit "Über unvollständige Orthogonalsysteme"

Compositio Mathematica, tome 5 (1938), p. 433-434

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1938__5__433_0>

Nachtrag zu meiner Arbeit „Über unvollständige Orthogonalsysteme“,

Compositio Mathematica 4 (1937), S. 373–379

von

S. Sidon

Budapest

Haben M_k und $P_{k,m}(x)$ dieselbe Bedeutung, wie in der im Titel genannten Note und wird $\Re[e^{i(n_k+m+1)x}P_{k,m}(e^{iM_k x})] = U_{k,m}(x)$ gesetzt, wo jetzt n_k die Ordnung von $U_{k-1,M_{k-1}}(x)$ bezeichnet, so gelten, wenn $l_{1,1}, \ldots, l_{k,1}, \ldots, l_{k,m}, \ldots, l_{k,M_k}, \ldots$ eine Teilfolge von $n_1+1, \ldots, n_k+1, \ldots$ mit $\frac{l_{k,m+1}}{l_{k,m}} > 2$ und $\frac{l_{k+1,1}}{l_{k,M_k}} > 2$ ist, für das System $\varphi_{1,1}(x), \ldots, \varphi_{k,1}(x), \ldots,$

$$\varphi_{k,m}(x) = \cos l_{k,m}x + \frac{U_{k,m}(x)}{[H(M_k)]^{\frac{1}{2}}}$$

und demzufolge auch für das aus ihm durch Normierung hervorgehende, die Beziehungen 3, 4 und 5 der nämlichen Arbeit mit $H(k) = 1$, womit das dort in [10]) gestellte Problem erledigt ist.

Ein gleichmäßig beschränktes Orthogonalsystem von der soeben angegebenen Beschaffenheit läßt sich auch durch Zusammensetzung abzählbar unendlich vieler Orthogonalsysteme nach dem aus der Theorie der singulären Integrale bekannten Lebesgueschen Verfahren konstruieren. Das auf diese Weise sich ergebende System kann aber nicht, wie das von mir oben konstruierte $\varphi_{1,1}(x), \ldots, \varphi_{k,1}(x), \ldots, \varphi_{k,m}(x), \ldots$ aus lauter im Orthogonalitätsintervalle überall regulär-analytischen Funktionen bestehen.

Ich erwähne hier noch, daß es zweckmäßig ist, die von mir in der in Rede stehenden Arbeit gegebene Definition des charakteristischen Exponenten eines Orthogonalsystems durch die folgende umfassendere zu ersetzen: Das bezüglich des Intervalls $a < x < b$ orthogonale System $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ hat den charakteristischen Exponenten p, wenn

$$\overline{\lim} \frac{\int_a^b \left| \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x) \right|^q dx}{\left(\sum_{k=1}^n c_k^2\right)^{\frac{q}{2}}} < \infty \text{ für } q < p$$

$$\overline{\lim} \frac{\int_a^b \left| \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x) \right|^q dx}{\left(\sum_{k=1}^n c_k^2\right)^{\frac{q}{2}}} = \infty \text{ für } q > p\,^{1}).$$

Sämtliche dort über die Orthogonalsysteme vom charakteristischen Exponenten p ausgesprochenen Sätze bleiben dann ungeändert gültig, bis auf die Sätze A und B, in welchen an Stelle von p „$p - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ beliebig klein," tritt.

(Eingegangen den 6. August 1937. Abgeändert eingegangen den 20. Oktober 1937.)

[1]) Hierbei durchläuft n die Gesamtheit der positiven ganzen Zahlen und c_k das Intervall $-\infty < c_k < +\infty$.