COMPOSITIO MATHEMATICA

ARTUR ERDÉLYI

Bemerkungen zur Integration der Mathieuschen Differentialgleichung durch Laplacesche Integrale

Compositio Mathematica, tome 5 (1938), p. 435-441

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1938__5__435_0>

Bemerkungen zur Integration der Mathieuschen Differentialgleichung durch Laplacesche Integrale

von

Artur Erdélyi

Brünn

---

1. In der vorliegenden Note wird eine Integraldarstellung der Lösungen der Mathieuschen Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{d\varphi^2}+(\lambda-2h^2\cos 2\varphi)y=0 \tag{1}$$

hergeleitet, welche die Dougallsche Integraldarstellung [1]) sowie die von mir früher gegebene [2]) als Sonderfälle umfaßt. Wie auch in der früheren Arbeit gehe ich von der durch die Substitution

$$x=ihe^{i\varphi}$$

„rationalisierten" Form der Mathieuschen Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}-\left(1+\frac{\lambda}{x^2}+\frac{h^4}{x^4}\right)y=0 \tag{2}$$

aus. Während Dougall $x^{i\mu}y(x)$ (μ ist der charakteristische Exponent der Mathieuschen Differentialgleichung) in Gestalt eines Laplaceschen Integrals darstellt und das in I entwickelte Integral dasselbe für $y(x)$ leistet, soll jetzt das Laplacesche Integral für $x^{\frac{1}{2}-\nu}y(x)$ mit einem zunächst willkürlichen Parameter ν hergeleitet werden. Die entstehende allgemeinere Integraldarstellung „verbindet" die beiden bereits bekannten besonderen, in die sie für $\nu=\frac{1}{2}-i\mu$ bzw. für $\nu=\frac{1}{2}$ übergeht. Diese „Methode des willkürlichen Parameters" habe ich in anderen Arbeiten an-

---

1) J. Dougall, The solution of Mathieu's differential equation. Representation by contour integrals and asymptotic expansions [Proc. Edinburgh Math. Soc. **44** (1925/26), 57—71].

2) A. Erdélyi, Über die Integration der Mathieuschen Differentialgleichung durch Laplacesche Integrale [Math. Zeitschr. **41** (1936), 653—664]. Diese Arbeit wird im Folgenden mit I angeführt.

gewendet, um den Zusammenhang zwischen verschiedenen Integraldarstellungen hypergeometrischer Reihen von einer neuen Seite her zu beleuchten [3]).

Die Bedeutung aller dieser Integraldarstellungen tritt vielleicht am klarsten zu Tage, wenn wir uns für einen Augenblick auf den Sonderfall $h = 0$ von (2), also auf die wohlbekannte Besselsche Differentialgleichung beschränken. Die Dougallsche bzw. die in I hergeleitete Integraldarstellung der Lösungen von (2) gehen beim Grenzübergang $h \to 0$ in die Poisson-Hankelsche bzw. in die Sonine-Schläfli-Sommerfeldsche Integraldarstellung der Besselschen Funktionen über. Diese beiden Klassen von Integraldarstellungen der Zylinderfunktionen werden meistens unabhängig voneinander hergeleitet. Die Umformung der einen in die andere über ein Doppelintegral ist seit längerer Zeit bekannt [4]). Es schien indessen lange nicht bemerkt worden zu sein, daß sie auch unter einem *einheitlichen* Gesichtspunkt hergeleitet werden können, indem für das Produkt von y mit einer beliebigen Potenz von x das Laplacesche Integral gesucht wird. Erst Hilb hat in Pascals Repertorium diese Art der Herleitung angedeutet. Die entstehende allgemeinere Integraldarstellung der Besselschen Funktionen wurde dann unabhängig von dieser Bemerkung Hilbs und in anderem Zusammenhange von C. S. Meijer [5]) gefunden.

Die in den folgenden Zeilen herzuleitende Integraldarstellung der Lösungen der Mathieuschen Differentialgleichung besitzt denselben Grad von Allgemeinheit, wie die Hilb-Meijersche Integraldarstellung der Zylinderfunktionen, die bekanntlich [6]) alle wichtigen Klassen von Integraldarstellungen dieser Funktionen als Sonderfälle enthält. Durch diese neue Integraldarstellung erscheint die Integration der Mathieuschen Differentialgleichung durch Laplacesche Integrale bis zu einem gewissen Abschluß gebracht. Es ist bemerkenswert, daß diese allgemeinere Integral-

---

[3]) Vergl. z.B. A. Erdélyi. Der Zusammenhang zwischen verschiedenen Integraldarstellungen hypergeometrischer Funktionen [Quarterly Journal **8** (1937), 200—213].

[4]) Vergl. etwa G. N. Watson, Theory of Bessel Functions [Cambridge 1922], § 6.3—6.32.

[5]) C. S. Meijer, Über die Integraldarstellungen der Whittakerschen Funktion $W_{k,m}(z)$ und der Hankelschen und Besselschen Funktionen [Nieuw Arch. voor Wiskunde (2) **18** (1934), 35—57].

[6]) Vergl. C. S. Meijer, l.c.

darstellung sich mit Hilfe der eleganten Methode von Horn [7]) zur Integration linearer Differentialgleichungen durch Laplacesche Integrale ebenso leicht gewinnen läßt, wie die speziellen Integraldarstellungen.

2. Wir setzen in (2)

$$y = x^{\nu-\frac{1}{2}}\eta, \tag{3}$$

wodurch diese Differentialgleichung übergeht in

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} + \frac{2\nu}{x}\frac{d\eta}{dx} - \left[1 + \frac{\lambda-\left(\nu-\frac{1}{2}\right)^2}{x^2} + \frac{h^4}{x^4}\right]\eta = 0. \tag{4}$$

Diese Differentialgleichung besitzt ebenso wie (2) die Stellen $x = 0$ und $x = \infty$ als Stellen der Unbestimmtheit vom Range 1. Die Wurzeln der zu diesen Stellen gehörenden charakteristischen Gleichung

$$\alpha^2 - 1 = 0$$

sind

$$\alpha = \pm 1.$$

Genau wie in I, (3) können wir daher nach Horn [8]) eine Lösung von (4) in der Form

$$\eta_1(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\int_1^{\infty \cdot \exp i\omega_1} V(z)e^{-xz}dz \tag{5}$$

ansetzen. Für ω_1 und $\arg x$ gilt das in I, § 1 Gesagte. Die Belegungsfunktion $V(z)$ genügt der Volterraschen Integralgleichung

$$(z^2-1)V(z) = \int_1^z G(z,\zeta)\,V(\zeta)\,d\zeta, \tag{6}$$

deren Kern ein Polynom dritten Grades in z und ζ nämlich

[7]) S. folgende Arbeiten dieses Verfassers: Integration linearer Differentialgleichungen durch Laplacesche Integrale und Fakultätenreihen [Jahresber. d. Deutschen Math. Ver. **24** (1915); 309—329]; Singuläre Systeme linearer Volterrascher Integralgleichungen [Math. Zeitschr. **3** (1919), 265—313]; Laplacesche Integrale und Gammaquotientenreihen in der Theorie der linearen Differentialgleichungen und Volterrascher Integralgleichungen [Math. Zeitschr. **8** (1920), 100—114]; Laplacesche Integrale, Binomialkoeffizientenreihen und Gammaquotientenreihen in der Theorie der linearen Differentialgleichungen [Math. Zeitschr. **21** (1924), 85—95]. Vergl. auch die in der zuletztgenannten Arbeit angeführte weitere Literatur.

[8]) Vergl. insbesondere S. 107 der in Anmerkung [7]) an vorletzter Stelle zitierten Arbeit.

$$G(z, \zeta) = 2\nu\zeta + \left[\lambda - \left(\nu - \frac{1}{2}\right)^2\right](z-\zeta) + \frac{1}{6}h^4(z-\zeta)^3 \tag{7}$$

ist.

3. Wie in I betrachten wir zuerst den Sonderfall $h = 0$, d.h. im Wesentlichen die Besselsche Differentialgleichung. Die zugehörige Belegungsfunktion bezeichnen wir mit $V_0(z)$. Diese genügt der aus (6) hervorgehenden Integralgleichung

$$(z^2-1)V_0(z) = \int_1^z \left\{2\nu\zeta + \left[\lambda - \left(\nu - \frac{1}{2}\right)^2\right](z-\zeta)\right\} V_0(\zeta) d\zeta . \tag{8}$$

Die Lösung dieser Integralgleichung entwickeln wir in der Umgebung der singulären Stelle $z = 1$ in der Form

$$V_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{z-1}{2}\right)^{n+\alpha} .$$

Durch Eintragen dieses Ausdruckes in (8) und Vergleichen der niedrigsten Potenzen von $(z-1)$ auf beiden Seiten ergibt sich $\alpha = \nu - 1$, und durch Vergleichen der Koeffizienten von $(z-1)^{n+\nu}$ auf beiden Seiten, folgende Rekursionsformel für die c_n

$$n(n+\nu-1)c_n = \left[\lambda - \left(n - \frac{1}{2}\right)^2\right] c_{n-1},$$

aus der sich

$$c_n = c\frac{(\sqrt{\lambda}, n)}{\Gamma(n+\nu)}$$

ergibt. Darin hat das Hankelsche Symbol $(\sqrt{\lambda}, n)$ die Bedeutung

$$(\sqrt{\lambda}, 0) = 1; \quad (\sqrt{\lambda}, n) = \frac{1}{n!}\left[\lambda - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right]\left[\lambda - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right] \cdots \left[\lambda - \left(n - \frac{1}{2}\right)^2\right]$$

$$(n = 1, 2, \ldots).$$

Daher ergibt sich in diesem Falle

$$V_0(z) = 2^{\nu - \frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{\lambda}, n)}{\Gamma(n+\nu)} \left(\frac{z-1}{2}\right)^{n+\nu-1} . \tag{9}$$

Die noch verfügbare Konstante c haben wir gleich $2^{\nu-\frac{1}{2}}$ gesetzt, um zu erreichen, daß die $V_0(z)$ entsprechende Lösung $y_1^{(0)}(x)$ mit $K_{\sqrt{\lambda}}(x)$ übereinstimme. Damit das Integral in (8) konvergiere, müssen wir noch

$$\Re e\, \nu > 0$$

voraussetzen.

4. Die Lösung der Integralgleichung (6) im allgemeinen Falle können wir jetzt in der Form

$$V(z) = 2^{\nu-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(\sqrt{\lambda}, n)}{\Gamma(n+\nu)} \left(\frac{z-1}{2}\right)^{n+\nu-1} \tag{10}$$

ansetzen. Durch Eintragen dieses Ansatzes in (6) und Vergleichen von Koeffizienten gleich hoher Potenzen von $(z-1)$ auf beiden Seiten der Integralgleichung ergibt sich nach einigen Zwischenrechnungen

$$a_0 = a_1 = a_2$$

und für die übrigen Koeffizienten die Rekursionsformel

$$a_n - a_{n-1} - h^4 \gamma(n) a_{n-3} = 0\,,$$

in der

$$\gamma(n) = \frac{4(n-1)(n-2)}{\left[\lambda-\left(n-\frac{5}{2}\right)^2\right]\left[\lambda-\left(n-\frac{3}{2}\right)^2\right]\left[\lambda-\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\right]}$$

bedeutet. Daraus geht hervor, daß die a_n von ν unabhängig und mit den in I, § 2 berechneten Koeffizienten identisch sind![9])

Auf diese Weise haben wir die Belegungsfunktion $V(z)$ vollständig bestimmt, und für die Lösung dritter Art [10]) der Mathieuschen Differentialgleichung ergibt sich die Integraldarstellung

$$y_1(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, x^{\nu-\frac{1}{2}} \int_1^{\infty\cdot\exp i\omega_1} V(z) e^{-xz}\, dz \tag{11}$$

$$(\Re e\, \nu > 0)\,.$$

Da ferner

$$y_2(x) = y_1(x\, e^{-i\pi})$$

eine zweite, von $y_1(x)$ linear unabhängige Lösung von (2) bildet, so ist die Integration der Mathieuschen Differentialgleichung vollständig durchgeführt.

(11) gilt nur für $\Re e\, \nu > 0$. Indessen läßt sich diese Integraldarstellung so umformen, daß ihre Gültigkeit mittels analytischer Fortsetzung auf alle nichtganzzahlige reelle und komplexe Werte von ν ausgedehnt werden kann. Zu diesem Behufe hat man nur in (11) an Stelle des von 1 bis ∞ erstreckten Integrals das entsprechende Schleifenintegral einzuführen.

Dieser Umformung liegt die Gleichung

$$\int_1^{\infty\cdot\exp i\omega_1} e^{-xz}(z-1)^{n+\nu-1} dz = \frac{1}{e^{2\pi i\nu}-1} \int_{\infty\cdot\exp i\omega_1}^{(1+)} e^{-xz}(z-1)^{n+\nu-1} dz$$

---

[9]) Die Werte der ersten zehn Koeffizienten sind am Schluß des § 2 von I angegeben.

[10]) Zu dieser Bezeichnungsweise vergl. I, § 1.

zu Grunde. In dem rechts stehenden Integral umkreist der Integrationsweg vom Unendlichen kommend den Punkt $z=1$ in positiver Richtung und kehrt ins Unendliche zurück. Ferner ziehen wir den Ergänzungssatz der Theorie der Gammafunktion [11]) in der Form

$$\frac{1}{\Gamma(n+\nu)}=\frac{1}{\pi}\,\Gamma(1-n-\nu)\sin(n+\nu)\,\pi$$

heran. Wenn wir noch

$$(12)\qquad W(z)=\frac{\pi\sqrt{\pi}\,i}{e^{2\pi i\nu}-1}\,V(z)$$
$$=2^{\nu-\frac{3}{2}}\sqrt{\pi}\,e^{-i\pi\nu}\,\Sigma_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n(\sqrt{\lambda},\,n)\,\Gamma(1-n-\nu)\left(\frac{z-1}{2}\right)^{n+\nu-1}$$

setzen, so erhalten wir nach kurzer Zwischenrechnung die für alle nicht ganzzahlige ν gültige Integraldarstellung

$$(13)\qquad y_1(x)=\frac{1}{2\pi i}x^{\nu-\frac{1}{2}}\int_{\infty\,\cdot\,\exp i\omega_1}^{(1+)}W(z)e^{-xz}dz$$
$$(\nu\neq 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

5. Es bleibt noch übrig zu zeigen, daß die in dieser Note mit y_1 bezeichnete Lösung der Differentialgleichung dieselbe ist, die wir in I als Lösung dritter Art erklärt haben. Da die etwa durch (13) dargestellte Funktion ebenso wie die in I erklärte Lösung dritter Art gegen Null geht, wenn x längs der positiv reellen Halbachse über alle Grenzen wächst, so können sich die beiden Lösungen, wenn überhaupt, nur durch einen konstanten Faktor unterscheiden. Um zu zeigen, daß dieser gleich 1 ist, ersetzen wir in (13) $W(z)$ durch die Entwicklung dieser Funktion in der Umgebung der Stelle $z=1$ und integrieren gliedweise, wodurch wir nach dem Watsonschen Lemma [12]) eine semikonvergente Entwicklung von $y_1(x)$ erhalten.

Bei der Berechnung der einzelnen Integrale ziehen wir die Hankelsche Formel

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\infty}^{(0+)}t^{n+\nu-1}e^{-xt}dt=(-1)^n\frac{e^{i\pi\nu}x^{-n-\nu}}{\Gamma(1-n-\nu)}$$

---

[11]) E. T. Whittaker & G. N. Watson, Modern Analysis [Cambridge 1937]. § 12, 14.

[12]) Vergl. auch I, § 4.

heran, und erhalten nach Einführung von (12) in (13)

$$y_1(x) = \frac{1}{2\pi i} x^{\nu-\frac{1}{2}} \int_{\infty \cdot \exp i\omega_1}^{(0+)} W(1+t)\, e^{-x(1+t)}\, dt$$
$$= \sqrt{\pi}\, e^{-x} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} a_n(\sqrt{\lambda}, n)(2x)^{-n-\frac{1}{2}} + O\left(|x|^{-N-\frac{1}{2}}\right) \right\},$$

genau die Entwicklung I, (16a), woraus die Identität beider Lösungen hervorgeht.

(Eingegangen den 13. September 1937.)