

COMPOSITIO MATHEMATICA

M. J. BELINFANTE

Das Riemannsche Umordnungsprinzip in der intuitionistischen Theorie der unendlichen Reihen

Compositio Mathematica, tome 6 (1939), p. 118-123

http://www.numdam.org/item?id=CM_1939__6__118_0

© Foundation Compositio Mathematica, 1939, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Das Riemannsche Umordnungsprinzip in der intuitionistischen Theorie der unendlichen Reihen

von

M. J. Belinfante

Amsterdam

In seiner Abhandlung „Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe“¹⁾ veröffentlichte Riemann die in der Literatur als Riemannscher Umordnungssatz bezeichnete Bemerkung²⁾, daß eine konvergente Reihe mit reellen Gliedern, die nicht konvergent bleibt, wenn man sämtliche Glieder positiv macht, durch geeignete Anordnung der Glieder eine beliebige reelle Summe C erhält. Denn nimmt man abwechselnd so lange positive Glieder der Reihe, bis ihr Wert größer als C und so lange negative bis ihr Wert kleiner als C wird, so beträgt die Abweichung von C nie mehr als der Wert des dem letzten Zeichenwechsel voraufgehenden Gliedes.

Um diese Bemerkung für die intuitionistische Theorie der unendlichen Reihen zu verwerten, muß man der intuitionistischen Auffassung der Konvergenz³⁾ Rechnung tragen und auch diejenigen Glieder u_n einschalten, für die weder $u_n = 0$ noch $u_n \neq 0$ bekannt ist⁴⁾.

Nennen wir eine Reihe $\sum a_n$ von positiven Gliedern positiv eigentlich divergent, falls sich zu jedem vorgelegten positiven ⁴

¹⁾ B. RIEMANN, Gesammelte Werke.

²⁾ Daß diese Bemerkung auf DIRICHLET zurückzuführen sei, wie von WEBER-WELLSTEIN [Encyklopädie der Elementarmathematik I, 411] behauptet wird, ist aus der von Riemann zitierten Dirichletschen Abhandlung [Journal f. d. r. u. angew. Math. 4 (1829), 157] jedenfalls nicht ersichtlich.

³⁾ Für die intuitionistische Theorie der unendlichen Reihen vergleiche man: L. E. J. BROUWER, Über die Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik [Journal f. r. u. angew. Math. 154, 1—7], M. J. BELINFANTE, Zur intuitionistischen Theorie der unendlichen Reihen [Sitzungsberichte Preuß. Akad. Wiss. 1929, 639—660].

⁴⁾ Für die Bedeutung der Zeichen \neq und $\#$ vergleiche man: A. HEYTING, Mathematische Grundlagenforschung. Intuitionismus und Beweistheorie [Springer, Berlin 1934], S. 20.

A eine natürliche Zahl $N(A)$ so bestimmen läßt, daß für $n > N(A)$ die Summe $a_1 + a_2 + \dots + a_n > A$ ist, so haben wir den

SATZ. Falls die Reihe $\sum u_n$ mit reellen Gliedern positiv bzw. negativ konvergent und die Reihe $\sum |u_n|$ positiv eigentlich divergent ist, so läßt sich $\sum u_n$ so umordnen, daß die neue Reihe positiv bzw. negativ gegen eine beliebig vorgegebene reelle Summe s konvergiert.

Bemerkung. Der sich auf positive Konvergenz beziehende Teil dieses Satzes ist gewissermaßen die natürliche intuitionistische Übertragung des Riemannschen Umordnungsprinzips; wesentlich neu dagegen ist die Aussage über negativ konvergente Reihen.

Beweis. Wir geben eine Konstruktion, die eine Umordnung der gegebenen Reihe $\sum u_n$ erzeugt, und beweisen nachträglich, daß die neue Reihe positiv bzw. negativ konvergent ist und die verlangte Summe s hat.

Hierzu wählen wir auf der ersten Stufe u_1 als erstes Glied der neu zu bildenden Reihe, deren Glieder wir mit v_1, v_2, \dots und deren Partialsummen wir mit t_1, t_2, \dots bezeichnen werden. Weiter bezeichnen wir die Anzahl der auf den ersten n Stufen gewählten Glieder mit μ_n , so daß also $\mu_1 = 1$ ist.

Auf der n -ten Stufe wählen wir zunächst das erste nicht auf einer vorigen Stufe gewählte Glied von $\sum u_n$. Sei nun T die Summe aller bis jetzt gewählten Glieder und K eine ganze Zahl größer als $|T-s|$. Es gilt nun entweder $|T-s| < \frac{1}{n}$ oder $|T-s| > \frac{1}{2n}$. Im ersten Fall werden keine weiteren Glieder auf der n -ten Stufe gewählt. Es ist dann also:

$$|t_{\mu_n} - s| < \frac{1}{n} \quad (\text{A})$$

Im zweiten Fall bestimmen wir einen Abschnitt $s_p = u_1 + u_2 + \dots + u_p$ der Reihe $\sum u_n$, der alle in T vorkommenden Glieder enthält. Da $\sum |u_n|$ positiv divergent ist, läßt sich nun q so bestimmen, daß

$$|u_{p+1}| + |u_{p+2}| + \dots + |u_{p+q}| > 2K + 5 \quad (\text{B})$$

ist. Wir ordnen jeder der $(q+1)$ reellen Zahlen $u_{p+1}, u_{p+2}, \dots, u_{p+q}$, $d = T - s$ eine rationale Zahl $u'_{p+1}, u'_{p+2}, \dots, u'_{p+q}$, d' in solcher Weise zu, daß jede der $(q+1)$ reellen Zahlen um weniger als $\frac{1}{n(q+2)}$ von der zugeordneten rationalen Zahl verschieden ist.

Es ist dann

$$|u'_{p+1}| + |u'_{p+2}| + \dots + |u'_{p+q}| > 2K + 4 \quad (C)$$

und

$$|d'| < K + 1. \quad (D)$$

Falls nun d' positiv bzw. negativ ist, nehmen wir so lange negative bzw. positive Glieder der Reihe $u'_{p+1}, u'_{p+2}, \dots, u'_{p+q}$, bis $d' + \sum u'_i$ schließlich negativ bzw. positiv geworden ist. Dies ist nur dann unmöglich, wenn die Summe aller negativen bzw. positiven u'_i absolut genommen $\leq |d'|$ ist. In diesem Fall ist aber

$$|u'_{p+1} + u'_{p+2} + \dots + u'_{p+q}| > 2,$$

wie man leicht aus (C) und (D) folgert. Für die zugeordneten Glieder u_i gilt also in diesem besonderen Fall:

$$|s_{p+q} - s_p| = |u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_{p+q}| > 1. \quad (E)$$

Andernfalls wählen wir auf der n -ten Stufe außer dem schon erwähnten Gliede noch die den soeben bestimmten negativen bzw. positiven u'_i zugeordneten Glieder u_i als die nächsten Glieder der zu bildenden Reihe $\sum v_i$. Es gilt dann offenbar für die Summe t_{μ_n} der auf den ersten n Stufen gewählten Glieder:

$$|t_{\mu_n} - s| < \frac{1}{n} + |v_{\mu_n}| \quad (F)$$

und, falls m eine ganze Zahl zwischen μ_{n-1} und μ_n ist,

$$|t_m - s| < |t_{\mu_{n-1}} - s| + \frac{1}{n} + |v_{\mu_{n-1}+1}| \quad (G)$$

Wir behaupten nun, daß die durch diesen Prozeß erzeugte Umordnung $\sum v_n$ positiv bzw. negativ gegen s konvergiert, falls $\sum u_n$ positiv bzw. negativ konvergent ist.

a) *Es sei $\sum u_n$ positiv konvergent.* Wir zeigen, daß sich zu jedem vorgelegten positiven ε (das wir < 1 voraussetzen) ein solches M_ε bestimmen läßt, daß für jedes $m > M_\varepsilon$ $|t_m - s| < \varepsilon$ ist. Dazu bestimmen wir zuerst eine solche ganze Zahl N_1 , daß

$$|s_{k+i} - s_k| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad (1)$$

also insbesondere

$$|u_{k+1}| < \frac{\varepsilon}{4} \quad (2)$$

ist, sobald $k > N_1$ genommen wird, dann eine ganze Zahl N_2 , die größer als die Zahlen N_1 und $\frac{4}{\varepsilon}$ sein soll, und schließlich eine ganze Zahl M_ε , die der Bedingung $M_\varepsilon > \mu_{N_2+1}$ genügt. Für

jedes $m > M_\varepsilon$ ist nun $|t_m - s| < \varepsilon$. Denn bestimmen wir für ein solches m die ganze Zahl n so daß $\mu_n < m \leq \mu_{n+1}$ ist, so gilt $n > N_2 > N_1$. Auf der n -ten Stufe des Prozesses ist somit nach (1) die Ungleichung (E) nicht erfüllt; mithin gilt (entweder nach (F) und (2) oder nach (A)):

$$|t_{\mu_n} - s| < \frac{1}{2} \varepsilon. \quad (3)$$

Bei der Wahl von v_m auf der $(n+1)$ -ten Stufe haben wir also, falls $m = \mu_{n+1}$ ist, nach (F) oder (A) $|t_m - s| < \frac{1}{2} \varepsilon < \varepsilon$ und, falls $m < \mu_{n+1}$ ist, nach (G) und (3):

$$\begin{aligned} |t_m - s| &< |t_{\mu_n} - s| + \frac{1}{n+1} + |v_{\mu_{n+1}}| \\ &< \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{1}{4} \varepsilon + \frac{1}{4} \varepsilon \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

w.z.b.w.

b) *Es sei $\sum u_n$ negativ konvergent.* Wir beweisen für jedes positive ε die Unmöglichkeit des Bestehens einer Fundamentalreihe ganzer, positiver Zahlen $m_1 < m_2 < \dots$ derart, daß für jedes i

$$|s - t_{m_i}| > \varepsilon \quad (4)$$

ist. Wir denken uns also eine solche Zahl $\varepsilon < 1$ und eine derartige Fundamentalreihe vorgelegt. Wir definieren die Zahlen n_i durch die Beziehung:

$$\mu_{n_i} < m_i \leq \mu_{n_i+1}. \quad (5)$$

Auf der n_i -ten Stufe der Konstruktion haben wir nun *entweder* die Ungleichung (E), also

$$|s_{p_i+q_i} - s_{p_i}| > \varepsilon \quad (6)$$

mit $p_i \geq n_i$, *oder* (als eine unmittelbare Folgerung von (F) oder (A)):

$$|t_{\mu_{n_i}} - s| < \frac{1}{n_i} + |v_{\mu_{n_i}}|. \quad (7)$$

Im letzten Fall haben wir bei der Wahl von v_{m_i} auf der $(n_i + 1)$ -ten Stufe, wenn (E) nicht gilt, entweder $m_i = \mu_{n_i+1}$, also nach (F) oder (A)

$$|t_{m_i} - s| < \frac{1}{n_i+1} + |v_{\mu_{n_i+1}}| \quad (8)$$

oder $m_i < \mu_{n_i+1}$, folglich nach (G) und (7):

$$|t_{m_i} - s| < \frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_i+1} + |v_{\mu_{n_i}}| + |v_{\mu_{n_i+1}}|. \quad (9)$$

Betrachten wir ein $n_i > \frac{4}{\varepsilon}$, so folgt aus (8) und (4), bzw. aus (9) und (4) $|v_{\mu_{n_i}}| > \frac{\varepsilon}{4}$ oder $|v_{\mu_{n_i+1}}| > \frac{\varepsilon}{4}$, also, da $v_{\mu_{n_i}}$ als Glied der Reihe $\sum u_n$ eine Rangnummer $p_i \geq n_i$ hat,

$$|u_{p_i}| = |s_{p_i} - s_{p_i-1}| > \frac{\varepsilon}{4} \quad (10)$$

für ein gewisses $p_i \geq n_i$.

Wenn also $n_i > \frac{4}{\varepsilon}$ ist, so läßt sich, wie aus (6) und (10) ersichtlich, immer ein $p_i \geq n_i - 1$ und ein q_i so bestimmen, daß $|s_{p_i+q_i} - s_{p_i}| > \frac{\varepsilon}{4}$ ist. Wiederholen wir nun die Untersuchung mit einem n_j , das größer als $p_i + q_i$ ist, und fahren wir in dieser Weise fort, so entstehen die Fundamentalreihen $p_i < p_{i+1} < \dots$ und q_i, q_{i+1}, \dots mit der Eigenschaft, daß für jedes v $|s_{p_v+q_v} - s_{p_v}| > \frac{\varepsilon}{4}$ ist, entgegen der Voraussetzung, daß $\sum u_n$ negativ konvergiert.

Bemerkungen.

1. In dem vorliegenden Artikel ist nur von positiver eigentlicher Divergenz die Rede. Man könnte eine Reihe $\sum a_n$ mit positiven Gliedern negativ eigentlich divergent nennen, wenn für jedes positive A die Unmöglichkeit einer Fundamentalreihe positiver ganzer Zahlen $n_1 < n_2 < \dots$ feststeht derart, daß für jedes i die Summe $a_1 + a_2 + \dots + a_{n_i}$ kleiner als A bleibt. Das Umordnungsprinzip gilt aber nicht ohne weiteres für eine positiv bzw. negativ konvergente Reihe $\sum u_n$, wenn die aus den Absolutwerten ihrer Glieder gebildete Reihe $\sum |u_n|$ negativ divergent aber nicht positiv divergent ist. Betrachten wir nämlich die für jedes reelle α positiv konvergente Reihe $\alpha - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{3} - \dots$, und nehmen wir an, daß für α zwar die Beziehung $\alpha \neq 0$, aber *nicht* die Beziehung $\alpha \neq 0$ bewiesen ist, so ist die Reihe $|\alpha| + \left|\frac{\alpha}{2}\right| + \left|\frac{\alpha}{3}\right| + \dots$ offenbar negativ eigentlich divergent, denn aus $|\alpha| + \left|\frac{\alpha}{2}\right| + \left|\frac{\alpha}{3}\right| + \dots + \left|\frac{\alpha}{n}\right| < A$ für beliebig großes n folgt $|\alpha| < \frac{A}{\log n}$ mithin $\alpha = 0$ statt $\alpha \neq 0$. Um aber aus den Gliedern der Reihe $\alpha - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{3} - \dots$ eine endliche Gruppe mit einer Summe, welche größer als Eins ist, herzustellen, hat man

mehr als $\frac{1}{\alpha}$ positive Glieder zu nehmen, und das ist offenbar nicht möglich, ohne die Beziehung $\alpha \neq 0$ festzustellen.

2. Ein einfaches Beispiel einer negativ konvergenten, nicht positiv konvergenten Reihe $\sum u_n$, für welche die aus den Absolutwerten ihrer Glieder gebildete Reihe $\sum |u_n|$ positiv divergent ist, erhält man folgenderweise. Es sei k die Rangnummer in der Dezimalentwicklung von π , bei der die erste Sequenz 0123456789 in dieser Entwicklung anfängt. Setzt man nun $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ für $n < 2k$, $u_{2k} = -1$, $u_{2k+1} = +1$ und $u_{2k+p} = \frac{(-1)^{p+1}}{2k+p-2}$ für $p > 1$, so ist $\sum u_n$ negativ konvergent, nicht positiv konvergent und $\sum |u_n|$ positiv divergent.

3. Der sich auf die negative Konvergenz beziehende Teil des Beweises benützt außer der positiven Divergenz von $\sum |u_n|$ nur die Tatsache, daß $\sum u_n$ non-oszillierend¹⁾ ist. Es gilt somit der

SATZ. Falls die Reihe $\sum u_n$ mit reellen Gliedern non-oszillierend und die Reihe $\sum |u_n|$ positiv divergent ist, so läßt $\sum u_n$ sich so umordnen, daß die neue Reihe negativ konvergent ist und eine beliebig vorgegebene Summe hat.

(Eingegangen den 6. September 1937.)

¹⁾ BROUWER, l.c., 7.