COMPOSITIO MATHEMATICA

ROSE PELTESOHN

Eine Lösung der beiden Heffterschen Differenzenprobleme

Compositio Mathematica, tome 6 (1939), p. 251-257

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1939__6__251_0>

Eine Lösung der beiden Heffterschen Differenzenprobleme

von

Rose Peltesohn

Tel Aviv

Bekanntlich läßt sich ein Steinersches Dreiersystem aus N Elementen a_ν (wo ν die Zahlen 1 bis N durchläuft) dann und nur dann bilden, wenn N von der Form $N_1 = 6n + 7$ oder von der Form $N_2 = 6n + 3$ (n ganzzahlig und nicht negativ) ist. Die Anzahl A der Dreier des Systems ist gleich $\frac{N(N-1)}{6}$.

Die Darstellung des aus den Elementen $a_\varkappa$, a_λ und a_μ gebildeten Dreiers sei im folgenden stets $a_\varkappa a_\lambda a_\mu$.

Unter einem *zyklischen* Steinerschen System wird ein solches verstanden, bei dem sich die A Dreier des Systems in $\frac{A}{N}$ Klassen zu je N in folgender Weise einteilen lassen: alle Dreier der gleichen Klasse sollen von der Form $a_{\varkappa+\nu}\, a_{\lambda+\nu}\, a_{\mu+\nu}$ sein, wobei $\varkappa$, λ und μ fest sind, während ν die Zahlen 1 bis N durchläuft (die Indizes werden mod N reduziert).

Offenbar ist hierbei jede Klasse hinreichend charakterisiert durch die Differenzen $d_1 \equiv \varkappa - \lambda$, $d_2 \equiv \lambda - \mu$ und $d_3 \equiv \mu - \varkappa$ mod N.

Die für eine solche Einteilung der Dreier in Klassen notwendige Bedingung N/A erfüllen nur die N_1.

L. Heffter [1]) stellte fest, daß die Aufgabe, für N_1 ein zyklisches Steinersches System zu finden, gleichbedeutend ist mit der Aufgabe, die Zahlen $d = 1, 2, \ldots, \frac{N_1 - 1}{2}$ so in Gruppen zu je dreien zu ordnen, daß in jeder Gruppe entweder eine Zahl die Summe der beiden anderen oder die Summe aller drei Zahlen gleich N_1 ist. Diese Aufgabe ist unter dem Namen *Heffter'sches Differenzenproblem I* bekannt.

Der Zusammenhang dieses Problems mit dem des zyklischen Steinersystems ist durch die Tatsache gegeben, daß die die einzelnen Klassen des letzteren charakterisierenden Differenzen d_1, d_2 und d_3 zusammen jede Zahl zwischen 1 und $\frac{N_1 - 1}{2}$ oder deren Komplement mod N_1 genau einmal mod N_1 darstellen müssen,

[1]) Math. Annalen **49** (1897), 101—102.

und daß für jede Klasse $d_1 + d_2 + d_3 \equiv 0$ mod. N_1 (in anderer Lesart: $d_1+d_2\equiv -d_3$).

Ist N von der Form N_2, so kann die Forderung, zyklische Steinersysteme zu finden, ebenfalls gestellt werden, wenn man die aus nur $\frac{N_2}{3}$ Dreiern bestehende Klasse K vorwegnimmt, die durch die Differenzen $d_1 = \frac{N_2}{3}$, $d_2 = \frac{N_2}{3}$ und $d_3 = \frac{N_2}{3}$ dargestellt wird; denn für $N = N_2$ ist $A - \frac{N}{3}$ durch N teilbar.

Heffters Aufgabe modifiziert sich hier wie folgt: die Zahlen $1, 2, \ldots, \frac{N_2}{3} - 1, \frac{N_2}{3} + 1, \ldots, \frac{N_2 - 1}{2}$ so in Gruppen zu je dreien zu ordnen, daß in jeder Gruppe entweder eine Zahl die Summe der beiden anderen oder die Summe aller drei Zahlen gleich N_2 ist. (*Hefftersches Differenzenproblem II.*)

Die Zahlen d haben hier die gleiche Bedeutung wie im Falle $N = N_1$. Man erkennt, daß durch die Konstruktion der Klasse K die Differenz $d = \frac{N_2}{3}$ in der Heffterschen Problemstellung von vornherein ausscheidet.

Eine Einteilung der Zahlen 1 bis $\frac{N_1 - 1}{2}$ $\left(\text{bzw. 1 bis } \frac{N_2 - 1}{2} \text{ mit Ausnahme von } \frac{N_2}{3}\right)$, die den in Heffters Differenzenproblem I (bzw. II) gestellten Forderungen entspricht, wollen wir ein H_{N_1} (bzw. H_{N_2}) nennen. Was die Bezeichnung der herzustellenden Gruppen von je drei Zahlen betrifft, so soll die aus den Zahlen d_1, d_2 und d_3 gebildete Gruppe das Differenzentripel (d_1, d_2, d_3) heißen.

Die Aufgabe des Folgenden ist, für jedes N_1 ein H_{N_1} und für jedes N_2 mit Ausnahme von $N_2 = 9$ ein H_{N_2} herzustellen. Man überzeugt sich leicht davon, daß ein H_9 nicht möglich ist, wie auch zwar ein allgemeines, nicht aber ein zyklisches Steinersches Dreiersystem aus 9 Elementen existiert.

Für jede der drei verschiedenen Formen mod 18 von N_1 und von N_2 stellen wir einen besonderen Typ von H_{N_1} bzw. H_{N_2} her, so daß wir also sechs verschiedene Systeme H_N zu betrachten haben. Diese Systeme stellen wir durch sechs Tabellen (1) bis (6) dar.

Jede dieser Tabellen besteht in der Hauptsache aus drei Kolonnen von Differenzentripeln. Zu diesen kommen in Tabelle (6) noch fünf weitere Differenzentripel $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ bis $(\alpha_5, \beta_5, \gamma_5)$; in (1), (2) und (3) tritt je *ein* weiteres Differenzentripel (α, β, γ) hinzu. In den Fällen (4) und (5) kommen keine weiteren Tripel dazu.

Eine weitere Zerlegung der drei Kolonnen von Differenzentripeln — deren jedes durch eine drei Zahlen enthaltende Klammer dargestellt wird — in insgesamt neun Kolonnen von einzelnen Differenzen d liegt nahe; diese wollen wir S_1 bis S_9 nennen.

Die Klammern zerfallen, entsprechend den beiden Heffterschen Forderungen, in zwei Arten. Diejenigen, für die die Summe zweier d gleich dem dritten ist (wir ordnen in diesen Klammern die d stets so an, daß die Summe der beiden *ersten* gleich dem *letzten* ist) sind durch die Schrift nicht hervorgehoben; diejenigen, für die die Summe der drei d gleich N ist, erscheinen *kursiv*. Hierzu gehören alle Klammern (d_1, d_2, d_3) der Kolonnen S_7, S_8, S_9, in denen $d_1 + d_2$ die Hälfte der zugehörigen Zahl N übertrifft.

Hinter jeder Tabelle geben wir eine Übersicht, aus der hervorgeht, wie die Differenzen $1, 2, \ldots, \frac{N_1-1}{2}$ $\left(\text{bzw. } 1, 2, \ldots, \frac{N_2-1}{2}\right.$ mit Ausnahme von $\left.\frac{N_2}{3}\right)$ auf die neun Kolonnen und (in den Fällen (1), (2), (3) und (6)) auf die Zusatztripel verteilt sind.

Diese Tabellen liefern zugleich einen neuen, direkten Beweis für die Existenz eines Steinerschen Tripelsystems in jedem zulässigen Falle.

(1) $N_1 = 18k + 1$.

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9
$(1,$	$4k+1,$	$4k+2)$	$(3,$	$6k-1,$	$6k+2)$	$(2,$	$8k,$	$8k+2)$
$(4,$	$4k,$	$4k+4)$	$(6,$	$6k-3,$	$6k+3)$	$(5,$	$8k-1,$	$8k+4)$
$(7,$	$4k-1,$	$4k+6)$	$(9,$	$6k-5,$	$6k+4)$	$(8,$	$8k-2,$	$8k+6)$
	$\vdots$			$\vdots$			$\vdots$	
						$(3k-7,$	*$7k+3,$*	*$8k+5)$*
$(3k-5,$	$3k+3,$	$6k-2)$	$(3k-3,$	$4k+3,$	$7k)$	*$(3k-4,$*	*$7k+2,$*	*$8k+3)$*
$(3k-2,$	$3k+2,$	$6k)$				*$(3k-1,$*	*$7k+1,$*	*$8k+1)$*

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (3k,\ 3k+1,\ 6k+1)$$

d	
1 bis $3k+1$	S_1, S_4, S_7
$3k$	α
$3k+1$	β
$3k+2$ bis $4k+1$	S_2
$4k+2$ bis $6k$	S_3, S_5
$6k+1$	γ
$6k+2$ bis $7k$	S_6
$7k+1$ bis $8k$	S_8
$8k+1$ bis $9k$	S_9

(2) $N_1 = 18k + 7$.

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9
$(3,$	$4k+1,$	$4k+4)$	$(2,$	$6k+1,$	$6k+3)$	$(1,$	$8k+3,$	$8k+4)$
$(6,$	$4k,$	$4k+6)$	$(5,$	$6k-1,$	$6k+4)$	$(4,$	$8k+2,$	$8k+6)$
$(9,$	$4k-1,$	$4k+8)$	$(8,$	$6k-3,$	$6k+5)$	$(7,$	$8k+1,$	$8k+8)$
	$\vdots$			$\vdots$			$\vdots$	
						$(3k-5,$	$7k+5,$	$8k+7)$
$(3k,$	$3k+2,$	$6k+2)$	$(3k-1,$	$4k+3,$	$7k+2)$	$(3k-2,$	$7k+4,$	$8k+5)$

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (3k + 1,\ 4k + 2,\ 7k + 3)$$

d	
1 bis $3k$	S_1, S_4, S_7
$3k+1$	α
$3k+2$ bis $4k+1$	S_2
$4k+2$	β
$4k+3$ bis $6k+2$	S_3, S_5
$6k+3$ bis $7k+2$	S_6
$7k+3$	γ
$7k+4$ bis $8k+3$	S_8
$8k+4$ bis $9k+3$	S_9

(3) $N_1 = 18k + 13$.

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9
$(1,$	$4k+3,$	$4k+4)$	$(2,$	$6k+3,$	$6k+5)$	$(3,$	$8k+5,$	$8k+8)$
$(4,$	$4k+2,$	$4k+6)$	$(5,$	$6k+1,$	$6k+6)$	$(6,$	$8k+4,$	$8k+10)$
$(7,$	$4k+1,$	$4k+8)$	$(8,$	$6k-1,$	$6k+7)$	$(9,$	$8k+3,$	$8k+12)$
	$\vdots$			$\vdots$			$\vdots$	
						$(3k-3,$	$7k+7,$	$8k+9)$
$(3k-2,$	$3k+4,$	$6k+2)$	$(3k-1,$	$4k+5,$	$7k+4)$	$(3k,$	$7k+6,$	$8k+7)$
$(3k+1,$	$3k+3,$	$6k+4)$						

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (3k+2,\ 7k+5,\ 8k+6)$$

d	
1 bis $3k+1$	S_1, S_4, S_7
$3k+2$	α
$3k+3$ bis $4k+3$	S_2
$4k+4$ bis $6k+4$	S_3, S_5
$6k+5$ bis $7k+4$	S_6
$7k+5$	β
$7k+6$ bis $8k+5$	S_8
$8k+6$	γ
$8k+7$ bis $9k+6$	S_9

(4) $N_2 = 18k + 3$.

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9
(2,	$4k$,	$4k+2$)	(3,	$6k-1$,	$6k+2$)	(1,	$8k+1$,	$8k+2$)
(5,	$4k-1$,	$4k+4$)	(6,	$6k-3$,	$6k+3$)	(4,	$8k$,	$8k+4$)
(8,	$4k-2$,	$4k+6$)	(9,	$6k-5$,	$6k+4$)	(7,	$8k-1$,	$8k+6$)
	$\vdots$			$\vdots$			$\vdots$	
						($3k-5$,	$7k+3$,	$8k+5$)
($3k-1$,	$3k+1$,	$6k$)	($3k$,	$4k+1$,	$7k+1$)	($3k-2$,	$7k+2$,	$8k+3$)

d	
1 bis $3k$	S_1, S_4, S_7
$3k+1$ bis $4k$	S_2
$4k+1$ bis $6k$	S_3, S_5
$6k+1$	fehlt
$6k+2$ bis $7k+1$	S_6
$7k+2$ bis $8k+1$	S_8
$8k+2$ bis $9k+1$	S_9

(5) $N_2 = 18k + 15$.

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9
(1,	$4k+3$,	$4k+4$)	(3,	$6k+3$,	$6k+6$)	(2,	$8k+6$,	$8k+8$)
(4,	$4k+2$,	$4k+6$)	(6,	$6k+1$,	$6k+7$)	(5,	$8k+5$,	$8k+10$)
(7,	$4k+1$,	$4k+8$)	(9,	$6k-1$,	$6k+8$)	(8,	$8k+4$,	$8k+12$)
	$\vdots$			$\vdots$			$\vdots$	
($3k-2$,	$3k+4$,	$6k+2$)	($3k$,	$4k+5$,	$7k+5$)	($3k-1$,	$7k+7$,	$8k+9$)
($3k+1$,	$3k+3$,	$6k+4$)				($3k+2$,	$7k+6$,	$8k+7$)

d	
1 bis $3k+2$	S_1, S_4, S_7
$3k+3$ bis $4k+3$	S_2
$4k+4$ bis $6k+4$	S_3, S_5
$6k+5$	fehlt
$6k+6$ bis $7k+5$	S_6
$7k+6$ bis $8k+6$	S_8
$8k+7$ bis $9k+7$	S_9

(6) $N_2 = 18k + 9$.

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9
(1,	$4k+3$,	$4k+4$)	(6,	$6k-1$,	$6k+5$)	(8,	$8k$,	$8k+8$)
(4,	$4k+2$,	$4k+6$)	(9,	$6k-3$,	$6k+6$)	(11,	$8k-1$,	$8k+10$)
	⋮			⋮			⋮	
						($3k-7$,	$7k+5$,	$8k+11$)
($3k-11$,	$3k+7$,	$6k-4$)	($3k-6$,	$4k+7$,	$7k+1$)	($3k-4$,	$7k+4$,	$8k+9$)
($3k-8$,	$3k+6$,	$6k-2$)	($3k-3$,	$4k+5$,	$7k+2$)			
($3k-5$,	$3k+5$,	$6k$)						
($3k-2$,	$3k+4$,	$6k+2$)						
($3k+1$,	$3k+3$,	$6k+4$)						

$$(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = (3k-1,\ 3k+2,\ 6k+1)$$
$$(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = (3k,\ 7k+3,\ 8k+6)$$
$$(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3) = (3,\ 8k+1,\ 8k+4)$$
$$(\alpha_4, \beta_4, \gamma_4) = (2,\ 8k+3,\ 8k+5)$$
$$(\alpha_5, \beta_5, \gamma_5) = (5,\ 8k+2,\ 8k+7)$$

d	
1 bis $3k+1$	$S_1, S_4, S_7, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$
$3k+2$	β_1
$3k+3$ bis $4k+3$	S_2
$4k+4$ bis $6k+4$ mit Ausnahme von $6k+3$	S_3, S_5, γ_1
$6k+3$	fehlt
$6k+5$ bis $7k+2$	S_6
$7k+3$	β_2
$7k+4$ bis $8k$	S_8
$8k+1$ bis $8k+7$	$\beta_3\ \beta_4, \beta_5, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5$
$8k+8$ bis $9k+4$	S_9

Offenbar muß k eine bestimmte Zahl überschreiten, damit sich die Tabellen (1) bis (6) vollständig bilden lassen, d.h. ohne daß eine oder mehrere Kolonnen oder ein oder mehrere Zusatztripel wegfallen und dann eventuell nicht mehr alle d durch die Tabellen erfaßt werden.

Man erkennt, daß im Falle (1) k größer als 1, in den Fällen (2) bis (5) k größer als Null und im Falle (6) k größer als 3 sein muß, und überzeugt sich leicht davon, daß diese Bedingung auch hinreichend dafür ist, daß die Tabellen eine Lösung für die entsprechenden N liefern.

Anschließend geben wir für jeden derjenigen Werte von N_1 und von N_2, für die eine Lösung existiert, und die durch die

Tabellen (1) bis (6) nicht erfaßt werden, weil das zugehörige k nicht groß genug ist, eine Lösung.

Tabelle	k	N_1	Lösung (bzw. Feststellung der Nichtexistenz einer Lösung)
(1)	0	1	Dieser Wert von N ist nicht zugelassen.
	1	19	(1, 5, 6) *(2, 8, 9)* (3, 4, 7)
(2)	0	7	(1, 2, 3)
(3)	0	13	(1, 3, 4) *(2, 5, 6)*

Tabelle	k	N_2	Lösung (bzw. Feststellung der Nichtexistenz einer Lösung)
(4)	0	3	Das entsprechende zyklische Steinersystem besteht nur aus der Klasse K.
(5)	0	15	(1, 3, 4) *(2, 6, 7)*
(6)	0	9	Für diesen Wert von N ist, wie erwähnt, eine Lösung nicht möglich.
	1	27	(1, 12, 13) (2, 5, 7) (3, 8, 11) (4, 6, 10)
	2	45	(1, 11, 12) *(3, 20, 22)* (4, 10, 14) (2, 17, 19) (7, 9, 16) (5, 8, 13) *(6, 18, 21)*
	3	63	(1, 15, 16) (6, 17, 23) (8, 11, 19) (4, 14, 18) *(9, 24, 30)* (7, 13, 20) (3, 25, 28) (10, 12, 22) (2, 27, 29) (5, 26, 31)

(Eingegangen den 28. Februar 1938.)