

# COMPOSITIO MATHEMATICA

C. S. MEIJER

## **Integraldarstellungen für Struvesche und Besselsche Funktionen**

*Compositio Mathematica*, tome 6 (1939), p. 348-367

[http://www.numdam.org/item?id=CM\\_1939\\_\\_6\\_\\_348\\_0](http://www.numdam.org/item?id=CM_1939__6__348_0)

© Foundation Compositio Mathematica, 1939, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# Integraldarstellungen für Struvesche und Besselsche Funktionen

von

C. S. Meijer

Groningen

## Einleitung.

In der vorliegenden Arbeit bezeichnet

$$(1) \quad \mathbf{H}_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+1} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r z^{2r}}{2^{2r} \Gamma\left(r + \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\nu + r + \frac{3}{2}\right)}$$

die Struvesche und

$$(2) \quad J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r z^{2r}}{2^{2r} \Gamma(r+1) \Gamma(\nu+r+1)}$$

die Besselsche Funktion. Weiter setze ich, wie üblich,

$$(3) \quad \mathbf{L}_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+1} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{z^{2r}}{2^{2r} \Gamma\left(r + \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\nu + r + \frac{3}{2}\right)}$$

und

$$(4) \quad I_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{r=0}^{\infty} \frac{z^{2r}}{2^{2r} \Gamma(r+1) \Gamma(\nu+r+1)}.$$

Ferner betrachte ich noch die Funktionen  $Y_\nu(z)$  und  $K_\nu(z)$ , die für nicht-ganzzahlige Werte von  $\nu$  durch

$$(5) \quad Y_\nu(z) = \frac{J_\nu(z) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(z)}{\sin \nu\pi}.$$

und

$$(6) \quad K_\nu(z) = \frac{\pi}{2 \sin \nu\pi} \{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)\}$$

definiert werden können <sup>1)</sup>.

Das Ziel der vorliegenden Abhandlung ist für die Funktionen

$$(7) \quad \begin{cases} \mathbf{H}_\nu(z) - Y_\nu(z), I_\nu(z) - \mathbf{L}_\nu(z), I_{-\nu}(z) - \mathbf{L}_\nu(z), \\ K_\nu(z), \mathbf{H}_\nu(z), J_\nu(z) \text{ und } Y_\nu(z) \end{cases}$$

Integraldarstellungen abzuleiten.

Ich gebe zunächst zwei Definitionen.

**DEFINITION 1.** Die Funktion  $G_n(\beta; a_1, a_2, a_3; \zeta)$  ( $n=1, 2, 3$ ) wird definiert durch <sup>2)</sup>

$$(8) \quad G_n(\beta; a_1, a_2, a_3; \zeta) = \sum_{h=1}^n \frac{\Gamma(1+a_h-\beta) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq h}}^n \Gamma(a_j-a_h)}{\prod_{j=n+1}^3 \Gamma(1+a_h-a_j)} \zeta^{1+2a_h} \times \\ \times {}_1F_2(1+a_h-\beta; *1+a_h-a_1, 1+a_h-a_2, 1+a_h-a_3; (-1)^n \zeta^2).$$

Hierin wird  $\zeta \neq 0$ ,

$$(9) \quad \beta - a_h \neq 1, 2, 3, \dots \quad (h=1, \dots, n)$$

und

$$a_j - a_h \text{ nicht ganz } (j=1, \dots, n; h=1, \dots, n; j \neq h)$$

vorausgesetzt; der Stern bedeutet, daß die Zahl  $1 + a_h - a_h$  im System  $1 + a_h - a_1, 1 + a_h - a_2, 1 + a_h - a_3$  gestrichen werden muß <sup>3)</sup>.

<sup>1)</sup> Für ganze Werte von  $\nu$  kann man  $Y_\nu(z)$  und  $K_\nu(z)$  durch Grenzübergang definieren; man vgl. WATSON, [12], 63-64 und 78. Die Funktion  $K_\nu(z)$  kann auch durch

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} \pi i e^{\frac{1}{2}\nu\pi i} H_\nu^{(1)}(ze^{\frac{1}{2}\pi i})$$

erklärt werden; hierin bedeutet  $H_\nu^{(1)}(z)$  die erste Hankelsche Funktion.

<sup>2)</sup>  ${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; w)$  ist die verallgemeinerte hypergeometrische Funktion. Ein leeres Produkt wird gleich 1 gesetzt.

Die Funktion  $G_n$  und die durch (10) erklärte Funktion  $S_n$  sind Spezialfälle der Funktion  $G_{p,q}^{m,n}$ , die ich auf Seite 11 meiner Arbeit [7] eingeführt habe; es gilt z.B.

$$S_n(b_1, b_2, b_3, b_4; \eta) = G_{0,4}^{n,0} \left( \eta^2 \mid b_1 + \frac{1}{2}, b_2 + \frac{1}{2}, b_3 + \frac{1}{2}, b_4 + \frac{1}{2} \right).$$

<sup>3)</sup> Ist  $a_h - a_j = -1, -2, -3, \dots$  ( $h=1, \dots, n; j=n+1, \dots, 3$ ), so bekommt die rechte Seite von (8) einen Sinn durch einen Grenzübergang. Denn man hat

$$\frac{1}{\Gamma(\gamma)} {}_1F_2(\alpha; \beta, \gamma; w) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} + \frac{\alpha}{\beta\Gamma(\gamma+1)} \frac{w}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta(\beta+1)\Gamma(\gamma+2)} \frac{w^2}{2!} + \dots,$$

und die rechte Seite dieser Beziehung hat auch einen Sinn für  $\gamma = 0, -1, -2, \dots$

**DEFINITION 2.** Die Funktion  $S_n(b_1, b_2, b_3, b_4; \eta)$  ( $n=1, 2, 3, 4$ ) wird definiert durch

$$(10) \quad S_n(b_1, b_2, b_3, b_4; \eta) = \sum_{h=1}^n \frac{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq h}}^n \Gamma(b_j - b_h)^{\dagger}}{\prod_{j=n+1}^4 \Gamma(1 + b_h - b_j)} \eta^{1+2b_h} \times \\ \times {}_0F_3(1 + b_h - b_1, \dots * \dots, 1 + b_h - b_4; (-1)^n \eta^2).$$

Hierin wird  $\eta \neq 0$  und

$$b_j - b_h \text{ nicht ganz } (j=1, \dots, n; h=1, \dots, n; j \neq h)$$

vorausgesetzt; der Stern bedeutet, daß die Zahl  $1 + b_h - b_h$  im System  $1 + b_h - b_1, \dots, 1 + b_h - b_4$  gestrichen werden muß.

Unter Annahme der obigen Bezeichnungen werde ich nun die folgenden Sätze beweisen. Die Sätze 3, 5, 7, 9, 11 und 13 sind Spezialfälle von Satz 1; die Sätze 4, 6, 8, 10, 12 und 14 hingegen Spezialfälle von Satz 2.

**SATZ 1.** *Es sei*

$$n = 1, 2, 3,$$

$$\Re(\beta - a_h) < 1 \quad (h=1, \dots, n),$$

$$a_j - a_h \text{ nicht ganz } (j=1, \dots, n; h=1, \dots, n; j \neq h).$$

*Behauptung: Für jedes  $\zeta \neq 0$  gilt*

$$G_n(\beta; a_1, a_2, a_3; \zeta) = 2^{\alpha+\beta+1} \int_0^\infty K_{\alpha-\beta}(v) S_n(a_1, a_2, a_3, \alpha; \frac{1}{2}\zeta v) v^{-\alpha-\beta} dv.$$

*Hierin ist  $\alpha$  eine beliebige Zahl mit*

$$\Re(\alpha - a_h) < 1 \quad (h=1, \dots, n).$$

**SATZ 2.** *Es sei*

$$n = 1, 2, 3,$$

$$\zeta \neq 0, \quad |\arg \zeta| \leq \frac{1}{2}(n-1)\pi,$$

$$(11) \quad \Re(\beta - a_h) < 1 \quad (h=1, \dots, n),$$

$$(12) \quad a_j - a_h \text{ nicht ganz } (j=1, \dots, n; h=1, \dots, n; j \neq h).$$

*Behauptung:*

$$(13) \quad G_n(\beta; a_1, a_2, a_3; \zeta) = 2^{\alpha+\beta} \int_0^\infty J_{\alpha-\beta}(v) S_{n+1}\left(\alpha, a_1, a_2, a_3; \frac{1}{2}\zeta v\right) v^{-\alpha-\beta} dv.$$

Hierin ist  $\alpha$  eine beliebige Zahl mit

$$(14) \quad \Re(\beta-\alpha) < 1,$$

$$(15) \quad \Re(a_1+a_2+a_3-2\beta-\alpha) < \frac{1}{2},$$

$$(16) \quad \alpha - a_h \text{ nicht ganz } (h=1, \dots, n).$$

**BEMERKUNG.** Ist  $n = 2$  oder  $= 3$  und zugleichzeit  $|\arg \zeta| < \frac{1}{2}(n-1)\pi$ , so gilt Beziehung (13) für alle Werte von  $a_1, a_2, a_3, \beta$  und  $\alpha$  mit (11), (12), (14) und (16). (Bedingung (15) braucht dann also nicht erfüllt zu sein.)

**SATZ 3.** Ist  $\Re(\nu) < \frac{1}{2}$  und  $2\nu$  nicht ganz, so gilt für jedes  $z \neq 0$

$$(17) \quad \mathbf{H}_\nu(z) - Y_\nu(z) = \frac{2^{\alpha+\frac{1}{2}\nu+1} \cos \nu\pi}{\pi^2} \int_0^\infty K_{\alpha-\frac{1}{2}\nu}(v) \times \\ \times S_3\left(\frac{1}{2}\nu, \frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}, \alpha; \frac{1}{4}zv\right) v^{-\alpha-\frac{1}{2}\nu} dv.$$

Hierin ist  $\alpha$  eine beliebige Zahl mit  $\Re\left(\alpha \pm \frac{1}{2}\nu\right) < \frac{1}{2}$ .

**SATZ 4.** Ist  $z \neq 0$ ,  $|\arg z| < \pi$ ,  $\Re(\nu) < \frac{1}{2}$  und  $2\nu$  nicht ganz, so gilt

$$(18) \quad \mathbf{H}_\nu(z) - Y_\nu(z) = \frac{2^{\alpha+\frac{1}{2}\nu} \cos \nu\pi}{\pi^2} \int_0^\infty J_{\alpha-\frac{1}{2}\nu}(v) \times \\ \times S_4\left(\alpha, \frac{1}{2}\nu, \frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}zv\right) v^{-\alpha-\frac{1}{2}\nu} dv.$$

Hierin ist  $\alpha$  eine beliebige Zahl mit

$$\Re\left(\frac{1}{2}\nu-\alpha\right) < 1, \nu - 2\alpha \text{ nicht ganz und } \alpha + \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2} \text{ nicht ganz.}$$

**SATZ 5.** Für jedes  $z \neq 0$  gilt

$$(19) \quad I_\nu(z) - \mathbf{L}_\nu(z) = \frac{2^{\alpha+\frac{1}{2}\nu+1}}{\pi} \int_0^\infty K_{\alpha-\frac{1}{2}\nu}(v) \times \\ \times S_2\left(\frac{1}{2}\nu, \frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}, \alpha; \frac{1}{4}zv\right) v^{-\alpha-\frac{1}{2}\nu} dv.$$

Hierin ist  $\alpha$  eine beliebige Zahl mit  $\Re\left(\alpha - \frac{1}{2}\nu\right) < \frac{1}{2}$ .

SATZ 6. Ist  $z \neq 0$  und  $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$ , so gilt \*

$$(20) \quad I_\nu(z) - \mathbf{L}_\nu(z) = \frac{2^{\alpha+\frac{1}{2}\nu}}{\pi} \int_0^\infty J_{\alpha-\frac{1}{2}\nu}(v) \times \\ \times S_3\left(\alpha, \frac{1}{2}\nu, \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}; \frac{1}{4}zv\right) v^{-\alpha-\frac{1}{2}\nu} dv.$$

Hierin ist  $\alpha$  eine beliebige Zahl mit

$$\Re\left(\frac{1}{2}\nu - \alpha\right) < 1 \text{ und } \nu - 2\alpha \text{ nicht ganz.}$$

SATZ 7. Ist  $\Re(\nu) < \frac{1}{2}$  und  $\nu + \frac{1}{2}$  nicht ganz, so gilt für jedes  $z \neq 0$

$$I_{-\nu}(z) - \mathbf{L}_\nu(z) = \frac{2^{\alpha+\frac{1}{2}\nu+1} \cos \nu\pi}{\pi} \int_0^\infty K_{\alpha-\frac{1}{2}\nu}(v) \times \\ \times S_2\left(\frac{1}{2}\nu, -\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}, \alpha; \frac{1}{4}zv\right) v^{-\alpha-\frac{1}{2}\nu} dv.$$

Hierin ist  $\alpha$  eine beliebige Zahl mit

$$\Re\left(\alpha - \frac{1}{2}\nu\right) < 1 \text{ und } \Re\left(\alpha + \frac{1}{2}\nu\right) < \frac{1}{2}.$$

SATZ 8. Ist  $z \neq 0$ ,  $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$ ,  $\Re(\nu) < \frac{1}{2}$  und  $\nu + \frac{1}{2}$  nicht ganz, so gilt

$$(21) \quad I_{-\nu}(z) - \mathbf{L}_\nu(z) = \frac{2^{\alpha+\frac{1}{2}\nu} \cos \nu\pi}{\pi} \int_0^\infty J_{\alpha-\frac{1}{2}\nu}(v) \times \\ \times S_3\left(\alpha, \frac{1}{2}\nu, -\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}; \frac{1}{4}zv\right) v^{-\alpha-\frac{1}{2}\nu} dv.$$

Hierin ist  $\alpha$  eine beliebige Zahl mit

$$\Re\left(\frac{1}{2}\nu - \alpha\right) < 1, \frac{1}{2}\nu - \alpha \text{ nicht ganz und } \alpha + \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2} \text{ nicht ganz.}$$

SATZ 9. Ist  $\nu$  nicht ganz, so gilt für jedes  $z \neq 0$

$$K_\nu(z) = 2^{\alpha+\beta} \int_0^\infty K_{\alpha-\beta}(v) S_2\left(\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}, \beta, \alpha; \frac{1}{4}zv\right) v^{-\alpha-\beta} dv.$$

Hierin sind  $\alpha$  und  $\beta$  beliebige Zahlen mit

$$\Re\left(\alpha \pm \frac{1}{2}\nu\right) < \frac{1}{2} \text{ und } \Re\left(\beta \pm \frac{1}{2}\nu\right) < \frac{1}{2}.$$

SATZ 10. Ist  $z \neq 0$ ,  $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$  und  $\nu$  nicht ganz, so gilt

$$(22) \quad K_\nu(z) = 2^{\alpha+\beta-1} \int_0^\infty J_{\alpha-\beta}(v) S_3\left(\alpha, \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}, \beta; \frac{1}{4}zv\right) v^{-\alpha-\beta} dv.$$

Hierin sind  $\alpha$  und  $\beta$  beliebige Zahlen mit

$$\Re\left(\beta \pm \frac{1}{2}\nu\right) < \frac{1}{2}, \quad \Re(\beta - \alpha) < 1 \quad \text{und} \quad \alpha \pm \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2} \text{ nicht ganz.}$$

SATZ 11. Für jedes  $z \neq 0$  gilt

$$(23) \quad \mathbf{H}_\nu(z) = 2^{\alpha+\frac{1}{2}\nu+1} \int_0^\infty K_{\alpha-\frac{1}{2}\nu}(v) S_1\left(\frac{1}{2}\nu, \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}, \alpha; \frac{1}{4}zv\right) v^{-\alpha-\frac{1}{2}\nu} dv.$$

Hierin ist  $\alpha$  eine beliebige Zahl mit  $\Re\left(\alpha - \frac{1}{2}\nu\right) < 1$ .

SATZ 12. Für jedes  $z > 0$  gilt

$$\mathbf{H}_\nu(z) = 2^{\alpha+\frac{1}{2}\nu} \int_0^\infty J_{\alpha-\frac{1}{2}\nu}(v) S_2\left(\alpha, \frac{1}{2}\nu, \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}; \frac{1}{4}zv\right) v^{-\alpha-\frac{1}{2}\nu} dv.$$

Hierin ist  $\alpha$  eine beliebige Zahl mit

$$\Re\left(\frac{1}{2}\nu - \alpha\right) < 1, \quad \Re\left(\frac{1}{2}\nu + \alpha\right) > -\frac{3}{2} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}\nu - \alpha \text{ nicht ganz.}$$

SATZ 13. Für jedes  $z \neq 0$  gilt

$$(24) \quad J_\nu(z) = 2^{\alpha+\beta+1} \int_0^\infty K_{\alpha-\beta}(v) S_1\left(\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}, \beta, \alpha; \frac{1}{4}zv\right) v^{-\alpha-\beta} dv.$$

Hierin sind  $\alpha$  und  $\beta$  beliebige Zahlen mit

$$\Re\left(\alpha - \frac{1}{2}\nu\right) < \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \Re\left(\beta - \frac{1}{2}\nu\right) < \frac{1}{2}.$$

SATZ 14. Für jedes  $z > 0$  gilt

$$(25) \quad J_\nu(z) = 2^{\alpha+\beta} \int_0^\infty J_{\alpha-\beta}(v) S_2\left(\alpha, \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}, \beta; \frac{1}{4}zv\right) v^{-\alpha-\beta} dv.$$

Hierin sind  $\alpha$  und  $\beta$  beliebige Zahlen mit

$$\Re\left(\beta - \frac{1}{2}\nu\right) < \frac{1}{2}, \quad \Re(\beta - \alpha) < 1, \quad \Re(\alpha + \beta) > -\frac{3}{2} \quad \text{und} \quad \alpha - \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2} \text{ nicht ganz.}$$

SATZ 15. Ist  $\sigma$  ganz  $< 2$ ,  $\Re(\nu) < 2 - \sigma$  und  $\nu$  nicht ganz, so gilt für jedes  $z > 0$

$$Y_\nu(z) = (-1)^{\sigma+1} 2^{\beta-\frac{1}{2}\nu-\sigma} \int_0^\infty J_{-\beta-\frac{1}{2}\nu-\sigma}(v) \times \\ \times S_2\left(\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\nu-\sigma, \beta; \frac{1}{4}zv\right) v^{-\beta+\frac{1}{2}\nu+\sigma} dv.$$

Hierin ist  $\beta$  eine beliebige Zahl mit <sup>4)</sup>

$$(26) \quad \Re\left(\frac{1}{2}\nu+\beta\right) < \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad -\frac{1}{2} < \Re\left(\frac{1}{2}\nu-\beta\right) < \frac{3}{2} - \sigma.$$

Diese Sätze sind, soviel ich weiß, bis jetzt noch nicht veröffentlicht worden. Viele Sonderfälle waren aber schon bekannt. In § 4 werde ich nämlich zeigen, daß verschiedene Relationen, die man bisher mit Hilfe anderer Methoden bewiesen hat, nur Spezialfälle der vorangehenden Sätze sind.

### § 1.

#### Hilfssätze.

HILFSSATZ 1. *Es sei*

$$n = 1, 2, 3, 4,$$

$$(27) \quad \Re(\alpha - b_n) < 1 \quad (h=1, \dots, n),$$

$$(28) \quad \Re(\beta - b_n) < 1 \quad (h=1, \dots, n),$$

$$(29) \quad b_j - b_n \text{ nicht ganz } (j=1, \dots, n; h=1, \dots, n; j \neq h).$$

*Behauptung: Für jedes  $\zeta \neq 0$  gilt*

$$(30) \quad 2^{\alpha+\beta+1} \int_0^\infty K_{\alpha-\beta}(v) S_n(b_1, b_2, b_3, b_4; \frac{1}{2}\zeta v) v^{-\alpha-\beta} dv = \\ = \sum_{h=1}^n \frac{\Gamma(1+b_h-\alpha) \Gamma(1+b_h-\beta) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq h}}^n \Gamma(b_j - b_n)}{\prod_{j=n+1}^4 \Gamma(1+b_h - b_j)} \zeta^{1+2b_h} \times \\ \times {}_2F_3(1+b_h-\alpha, 1+b_h-\beta; 1+b_h-b_1, \dots, 1+b_h-b_4; (-1)^n \zeta^2).$$

BEWEIS. Ist  $\Re(\lambda \pm \mu) > -1$ , so hat man <sup>5)</sup> für beliebige Werte von  $z$

$$\int_0^\infty K_\mu(v) \cdot {}_0F_3(a, b, c; zv^2) v^\lambda dv = 2^{\lambda-1} \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}\mu\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}\mu\right) \times \\ \times {}_2F_3\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}\mu, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}\mu; a, b, c; 4z\right).$$

<sup>4)</sup> Die Bedingungen (26) sind lösbar wegen  $\sigma < 2$  und  $\Re(\nu) < 2 - \sigma$ .

<sup>5)</sup> MEIJER, [6], Formel (16).



Hieraus und aus (10) folgt die Behauptung von Hilfssatz 1.

HILFSSATZ 2. *Es sei*

$$n = 2, 3, 4,$$

$$(28) \quad \zeta \neq 0, \quad |\arg \zeta| \leq \frac{1}{2}(n-2)\pi,$$

$$\Re(\beta - b_h) < 1 \quad (h=1, \dots, n),$$

$$(31) \quad \Re(b_1 + b_2 + b_3 + b_4 - 2\alpha - 2\beta) < \frac{1}{2},$$

$$(29) \quad b_j - b_h \text{ nicht ganz } (j=1, \dots, n; h=1, \dots, n; j \neq h).$$

*Behauptung:*

$$(32) \quad 2^{\alpha+\beta} \int_0^\infty J_{\alpha-\beta}(v) S_n(b_1, b_2, b_3, b_4; \frac{1}{2}\zeta v) v^{-\alpha-\beta} dv =$$

$$= \sum_{h=1}^n \frac{\Gamma(1+b_h-\beta) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq h}}^n \Gamma(b_j - b_h)}{\Gamma(\alpha - b_h) \prod_{j=n+1}^4 \Gamma(1+b_h - b_j)} \zeta^{1+2b_h} \times$$

$$\times {}_2F_3(1+b_h-\alpha, 1+b_h-\beta; 1+b_h-b_1, \dots, 1+b_h-b_4; (-1)^{n+1}\zeta^2).$$

BEMERKUNG. *Ist  $n = 3$  oder  $= 4$  und zugleichzeitig  $|\arg \zeta| < \frac{1}{2}(n-2)\pi$ , so gilt Formel (32) für alle Werte von  $b_1, b_2, b_3, b_4, \alpha$  und  $\beta$  mit (28) und (29). (Bedingung (31) braucht dann also nicht erfüllt zu sein.)*

BEWEIS <sup>6)</sup>. Die durch (10) definierte Funktion  $S_4(b_1, b_2, b_3, b_4; \eta)$  besitzt bekanntlich <sup>7)</sup> für große Werte von  $|\eta|$  mit  $|\arg \eta| < \frac{5}{2}\pi$  eine asymptotische Entwicklung der Gestalt <sup>8)</sup>

$$(33) \quad S_4(b_1, b_2, b_3, b_4; \eta) \sim e^{-4\eta^{\frac{1}{2}}\eta^r} \left\{ A_0 + \frac{A_1}{\eta^{\frac{1}{2}}} + \frac{A_2}{\eta} + \dots \right\},$$

worin

$$r = \frac{1}{2} (b_1 + b_2 + b_3 + b_4) + \frac{1}{4}.$$

<sup>6)</sup> Hilfssatz 2 kann auch mit Hilfe der Hankelschen Transformation aus Satz 4 meiner Arbeit [7] abgeleitet werden. (Für die Hankelsche Transformation vergl. man: WATSON, [12], 456; BOCHNER, [3], 180; TITCHMARSH, [10], 464; [11], 240.) Der Beweis von (30) und (32) kann auch mit Hilfe von BARNESschen Integralen geliefert werden; man vergl. [7], 29—37.

<sup>7)</sup> Man vergl. BARNES, [1], 108—110.

<sup>8)</sup> Die Zahlen  $A$  sind nicht von  $\eta$  abhängig.

Für die Funktion <sup>9)</sup>  $S_n(\eta)$  gilt ferner, wie man leicht nachrechnet,

$$(34) \quad S_3(\eta) = \frac{1}{2\pi} \left\{ e^{-\pi i b_4} S_4(\eta e^{\frac{1}{2}\pi i}) + e^{\pi i b_4} S_4(\eta e^{-\frac{1}{2}\pi i}) \right\}$$

und

$$(35) \quad S_2(\eta) = \frac{1}{4\pi^2} \left\{ e^{-\pi i(b_3+b_4)} S_4(\eta e^{\pi i}) + 2S_4(\eta) \cos(b_3-b_4)\pi + e^{\pi i(b_3+b_4)} S_4(\eta e^{-\pi i}) \right\}.$$

Setzt man nun die rechte Seite von (30) der Kürze halber gleich  $\varphi_n(\zeta)$ , so hat man nach (30) (mit  $\frac{v}{z}$  statt  $v$  und  $\zeta z$  statt  $\zeta$  angewendet) für positive Werte von  $z$  und beliebige Werte von  $\zeta \neq 0$ , falls  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $b$  den Bedingungen (27), (28) und (29) genügen,

$$(36) \quad (2z)^{\alpha+\beta-1} \int_0^\infty K_{\alpha-\beta}\left(\frac{v}{z}\right) S_n\left(\frac{1}{2}\zeta v\right) v^{-\alpha-\beta} dv = \frac{1}{4} \varphi_n(\zeta z).$$

Die rechte Seite dieser Relation ist eine analytische Funktion von  $z$ ; ist  $n > 2$ ,  $|\arg \zeta| < \frac{1}{2}(n-2)\pi$  und genügen  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $b$  den Bedingungen (27), (28) und (29), so ist die linke Seite wegen (33) und (34) <sup>10)</sup> eine analytische Funktion <sup>11)</sup> von  $z$  für  $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$  und eine stetige Funktion von  $z$  für  $|\arg z| \leq \frac{1}{2}\pi$ , so daß Beziehung (36) nicht nur für  $\arg z = 0$ , sondern sogar für  $|\arg z| \leq \frac{1}{2}\pi$  gültig ist. Ist  $n \geq 2$  und  $|\arg \zeta| = \frac{1}{2}(n-2)\pi$ , so ist die linke Seite von (36) wegen (33), (34) und (35) eine analytische Funktion von  $z$  für  $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$  und eine stetige Funktion von  $z$  für  $|\arg z| \leq \frac{1}{2}\pi$ , wofern  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $b$  nicht nur den Bedingungen (27), (28) und (29), sondern auch noch der Bedingung (31) genügen, so daß Formel (36) unter diesen Voraussetzungen wiederum für  $|\arg z| \leq \frac{1}{2}\pi$  gültig ist.

<sup>9)</sup>  $S_n(\eta) = S_n(b_1, b_2, b_3, b_4; \eta)$ .

<sup>10)</sup> Das Verhalten von  $S_4(\eta)$  für große Werte von  $|\eta|$  folgt aus (33), von  $S_3(\eta)$  aus (34) und (33) und von  $S_2(\eta)$  aus (35) und (33).

<sup>11)</sup> Für große Werte von  $|w|$  gilt bekanntlich

$$K_\nu(w) = \left(\frac{\pi}{2w}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-w} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{w}\right) \right\}.$$

Nimmt man nun  $z = e^{\frac{1}{2}\pi i}$ , bzw.  $z = e^{-\frac{1}{2}\pi i}$  in (36), so erhält man, wenn man überdies die Relationen <sup>12)</sup>

$$K_\nu(v e^{-\frac{1}{2}\pi i}) = \frac{1}{2} \pi i e^{\frac{1}{2}\nu\pi i} H_\nu^{(1)}(v), \quad K_\nu(v e^{\frac{1}{2}\pi i}) = -\frac{1}{2} \pi i e^{-\frac{1}{2}\nu\pi i} H_\nu^{(2)}(v)$$

benutzt,

$$(37) \quad 2^{\alpha+\beta-1} \int_0^\infty H_{\alpha-\beta}^{(1)}(v) S_n\left(\frac{1}{2}\zeta v\right) v^{-\alpha-\beta} dv = \frac{1}{2\pi} e^{-\alpha\pi i} \varphi_n(\zeta e^{\frac{1}{2}\pi i})$$

und

$$(38) \quad 2^{\alpha+\beta-1} \int_0^\infty H_{\alpha-\beta}^{(2)}(v) S_n\left(\frac{1}{2}\zeta v\right) v^{-\alpha-\beta} dv = \frac{1}{2\pi} e^{\alpha\pi i} \varphi_n(\zeta e^{-\frac{1}{2}\pi i}).$$

Aus der Definition der Funktion  $\varphi_n(\zeta)$  ( $\varphi_n(\zeta)$  ist gleich der rechten Seite von (30)) ergibt sich aber, daß

$$\frac{1}{2\pi} \{ e^{-\alpha\pi i} \varphi_n(\zeta e^{\frac{1}{2}\pi i}) + e^{\alpha\pi i} \varphi_n(\zeta e^{-\frac{1}{2}\pi i}) \}$$

gleich der rechten Seite von (32) ist, so daß Formel (32) sofort aus (37) und (38) folgt.

Der Beweis von (32) ist also geliefert für den Fall, daß  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $b$  den Bedingungen (27), (28) und (29) (im Falle  $|\arg \zeta| = \frac{1}{2}(n-2)\pi$  den Bedingungen (27), (28), (29) und (31)) genügen.

Durch analytische Fortsetzung schließt man aber <sup>13)</sup>, daß Formel (32) für alle Werte von  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $b$  mit (28) und (29) (im Falle  $|\arg \zeta| = \frac{1}{2}(n-2)\pi$  mit (28), (29) und (31)) gültig ist.

## § 2.

### Beweis der Sätze 1—15.

BEWEIS VON SATZ 1. Setzt man die rechte Seite von (30) gleich  $\varphi_n(\alpha, \beta; b_1, b_2, b_3, b_4; \zeta)$ , so ist

$$\varphi_n(\alpha, \beta; a_1, a_2, a_3, \alpha; \zeta) = G_n(\beta; a_1, a_2, a_3; \zeta) \quad (n=1, 2, 3),$$

so daß Satz 1 sofort aus Hilfssatz 1 folgt.

BEWEIS VON SATZ 2. Ersetzt man  $n$  durch  $n+1$  in (32) und setzt man überdies  $b_1 = \alpha$ ,  $b_2 = a_1$ ,  $b_3 = a_2$  und  $b_4 = a_3$ , so geht die rechte Seite über in  $G_n(\beta; a_1, a_2, a_3; \zeta)$ ; Satz 2 und die

<sup>12)</sup> MEIJER, [6], Formeln (5) und (6).

<sup>13)</sup> Für kleine Werte von  $|v|$  ist  $J_\nu(v) = O(|v|^{\Re(\nu)})$ .

zugehörige Bemerkung folgen also aus Hilfssatz 2 und der Bemerkung zu Hilfssatz 2.

BEWEIS DER SÄTZE 3–14. Die Funktionen (7) sind Spezialfälle der durch (8) definierte Funktion  $G_n(\beta; a_1, a_2, a_3; \zeta)$ . Denn aus (1), bzw. (2) folgt

$$(39) \quad \mathbf{H}_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\nu + \frac{3}{2}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+1} {}_1F_2\left(1; \frac{3}{2}, \nu + \frac{3}{2}; -\frac{1}{4}z^2\right),$$

bzw.

$$(40) \quad J_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu {}_1F_2\left(\sigma; \nu+1, \sigma; -\frac{1}{4}z^2\right)$$

( $\sigma$  ist beliebig mit  $\sigma \neq 0, -1, -2, \dots$ ). Mit Rücksicht auf (8) hat man also

$$(41) \quad \mathbf{H}_\nu(z) = G_1\left(\frac{1}{2}\nu; \frac{1}{2}\nu, \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}; \frac{1}{2}z\right)$$

und

$$(42) \quad J_\nu(z) = G_1\left(\beta; \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}, \beta; \frac{1}{2}z\right)$$

( $\beta$  ist beliebig mit  $\beta - \frac{1}{2}\nu \neq \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$  (siehe (9))).

Auf analoge Weise findet man mit Hilfe von (3), (4) und (8)

$$(43) \quad I_\nu(z) - \mathbf{L}_\nu(z) = \frac{1}{\pi} G_2\left(\frac{1}{2}\nu; \frac{1}{2}\nu, \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}; \frac{1}{2}z\right)$$

und

$$(44) \quad I_{-\nu}(z) - \mathbf{L}_\nu(z) = \frac{\cos \nu\pi}{\pi} G_2\left(\frac{1}{2}\nu; \frac{1}{2}\nu, -\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}; \frac{1}{2}z\right).$$

Aus (6), (4) und (8) geht hervor

$$(45) \quad K_\nu(z) = \frac{1}{2} G_2\left(\beta; \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}, \beta; \frac{1}{2}z\right)$$

( $\beta$  ist beliebig mit  $\beta \pm \frac{1}{2}\nu \neq \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$ ). Aus (39), (5), (40) und (8) ergibt sich noch

$$(46) \quad \mathbf{H}_\nu(z) - Y_\nu(z) = \frac{\cos \nu\pi}{\pi^2} G_3\left(\frac{1}{2}\nu; \frac{1}{2}\nu, \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}; \frac{1}{2}z\right).$$

Die Sätze 3–14 folgen nun mit Hilfe von (46), (43), (44), (45), (41) und (42) aus den Sätzen 1 und 2 (siehe auch die Bemerkung zu Satz 2).

BEWEIS VON SATZ 15. Setzt man die rechte Seite von (32) gleich  $\psi_n(\alpha, \beta; b_1, b_2, b_3, b_4; \zeta)$ , so hat man für ganze Werte von  $\sigma$

$$\begin{aligned} & (-1)^{\sigma+1} \psi_2\left(-\frac{1}{2}\nu-\sigma, \beta; \frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\nu-\sigma, \beta; \frac{1}{2}z\right) = \\ & = -\frac{\Gamma(-\nu)\cos\nu\pi}{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu {}_0F_1\left(\nu+1; -\frac{1}{4}z^2\right) - \frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} {}_0F_1\left(-\nu+1; -\frac{1}{4}z^2\right) = Y_\nu(z) \\ & \text{(wegen (2) und (5)).} \end{aligned}$$

Satz 15 folgt also aus Hilfssatz 2.

### § 3.

#### Hilfsformeln.

Ich werde zeigen, daß  $J_\nu(z)$  und  $K_\nu(z)$  Spezialfälle der durch (10) definierten Funktion  $S_n(b_1, b_2, b_3, b_4; \eta)$  sind. Wegen (2) gilt nämlich

$$\begin{aligned} J_{2\nu}(2w) &= \frac{1}{\Gamma(2\nu+1)} w^{2\nu} {}_0F_3\left(\frac{1}{2}, \nu+\frac{1}{2}, \nu+1; \frac{1}{16}w^4\right) \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(2\nu+2)} w^{2\nu+2} {}_0F_3\left(\frac{3}{2}, \nu+1, \nu+\frac{3}{2}; \frac{1}{16}w^4\right). \end{aligned}$$

Mit Rücksicht auf (10) hat man also

$$(47) \quad S_2\left(\frac{1}{2}\nu, \frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\nu; \frac{1}{4}w^2\right) = J_{2\nu}(2w).$$

Aus (10) und (2) folgt auch

$$(48) \quad S_2\left(\frac{1}{2}\nu, \frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\nu-1; \frac{1}{4}w^2\right) = \frac{2}{w} J_{2\nu+1}(2w)$$

und

$$(49) \quad S_2\left(\frac{1}{2}\nu-1, \frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\nu; \frac{1}{4}w^2\right) = \frac{2}{w} J_{2\nu-1}(2w).$$

In ganz ähnlicher Weise findet man mit Hilfe von (4), (6) und (10)

$$(50) \quad S_4\left(-\frac{1}{2}\nu, \frac{1}{2}\nu, \frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}w^2\right) = 4\pi K_{2\nu}(2w)$$

und

$$(51) \quad S_4\left(-\frac{1}{2}\nu-1, \frac{1}{2}\nu, \frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}w^2\right) = \frac{8\pi}{w} K_{2\nu+1}(2w).$$

Auch  $I_\nu(z)J_\nu(z)$ ,  $K_\nu(z)J_\nu(z)$  und einige andre Produkte von Besselschen Funktionen sind Spezialfälle der Funktion  $S_n(b_1, b_2, b_3, b_4; \eta)$ . Denn man hat <sup>14)</sup>

<sup>14)</sup> WATSON, [12], 148, Formeln (3) und (5).

$$(52) \quad I_\nu(w) J_\nu(w) = \frac{1}{\Gamma^2(\nu+1)} \left(\frac{w}{2}\right)^{2\nu} {}_0F_3\left(\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\nu + 1, \nu + 1; -\frac{1}{64}w^4\right)$$

und

$$(53) \quad I_{-\nu}(w) J_\nu(w) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(-\nu+1)} {}_0F_3\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\nu + 1, -\frac{1}{2}\nu + 1; -\frac{1}{64}w^4\right) + \\ + \frac{\nu w^2}{2\Gamma(\nu+2)\Gamma(-\nu+2)} {}_0F_3\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\nu + \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\nu + \frac{3}{2}; -\frac{1}{64}w^4\right).$$

Wegen (10) und (52) gilt nun

$$(54) \quad S_1\left(\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0; \frac{1}{8}w^2\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} I_\nu(w) J_\nu(w),$$

$$(55) \quad S_1\left(\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\nu - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\nu; \frac{1}{8}w^2\right) = \frac{2^{2\nu} w^{-2\nu}}{\sqrt{\pi}} I_{2\nu}(w) J_{2\nu}(w)$$

und

$$(56) \quad S_1\left(\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\nu - \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\nu - 1; \frac{1}{8}w^2\right) = \frac{2^{2\nu+3} w^{-2\nu-2}}{\sqrt{\pi}} I_{2\nu+1}(w) J_{2\nu+1}(w)$$

Auf analoge Weise findet man mit Hilfe von (10) und (53)

$$(57) \quad S_1\left(\frac{1}{2}\nu, \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\nu - \frac{1}{2}; \frac{1}{8}w^2\right) \sin \nu\pi = \\ = \frac{2^{-3\nu-1} w^{2\nu}}{\sqrt{\pi}} \{I_{-2\nu}(w) J_{2\nu}(w) - I_{2\nu}(w) J_{-2\nu}(w)\},$$

$$(58) \quad S_1\left(\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\nu, \frac{3}{2}\nu - \frac{1}{2}; \frac{1}{8}w^2\right) \cos \nu\pi = \\ = \frac{2^{-3\nu-1} w^{2\nu}}{\sqrt{\pi}} \{I_{2\nu}(w) J_{-2\nu}(w) + I_{-2\nu}(w) J_{2\nu}(w)\}$$

und

$$(59) \quad S_1\left(\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\nu - 1, \frac{3}{2}\nu - \frac{3}{2}; \frac{1}{8}w^2\right) \cos \nu\pi = \\ = \frac{2^{2-3\nu} w^{2\nu-2}}{\sqrt{\pi}} \{I_{2\nu-1}(w) J_{1-2\nu}(w) - I_{1-2\nu}(w) J_{2\nu-1}(w)\}.$$

Aus (10), (6), (52) und (53) geht hervor

$$(60) \quad S_3\left(\frac{3}{2}\nu - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\nu, \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}; \frac{1}{8}w^2\right) = 2^{2-3\nu} w^{2\nu} \sqrt{\pi} K_{2\nu}(w) J_{2\nu}(w),$$

$$(61) \quad S_3\left(\frac{1}{2}\nu, \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\nu - \frac{1}{2}; \frac{1}{8}w^2\right) = 2^{2-3\nu} w^{2\nu} \sqrt{\pi} K_{2\nu}(w) J_{-2\nu}(w),$$

$$(62) \quad S_3\left(-\frac{1}{2}\nu, \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\nu - \frac{1}{2}; \frac{1}{8}w^2\right) = 2^{3\nu+2} w^{-2\nu} \sqrt{\pi} K_{2\nu}(w) J_{2\nu}(w),$$

$$(63) \quad S_3\left(-\frac{1}{2}\nu - 1, \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\nu - \frac{3}{2}; \frac{1}{8}w^2\right) = \\ = 2^{3\nu+5} w^{-2\nu-2} \sqrt{\pi} K_{2\nu+1}(w) J_{2\nu+1}(w)$$

und

$$(64) S_3\left(\frac{3}{2}\nu - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\nu, -\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}; \frac{1}{8}w^2\right) \cos \nu\pi =$$

$$= 2^{1-3\nu} w^{2\nu} \sqrt{\pi} K_{2\nu}(w) \{J_{2\nu}(w) + J_{-2\nu}(w)\}.$$

Aus (10) ergibt sich überdies noch mit Rücksicht auf (5), (6), (52) und (53)

$$(65) S_3\left(\frac{3}{2}\nu - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\nu; \frac{1}{8}w^2\right) =$$

$$= -2^{2-3\nu} w^{2\nu} \sqrt{\pi} K_{2\nu}(w) \{J_{2\nu}(w) \sin \nu\pi + Y_{2\nu}(w) \cos \nu\pi\},$$

$$(66) S_3\left(\frac{3}{2}\nu - \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\nu - 1; \frac{1}{8}w^2\right) =$$

$$= 2^{5-3\nu} w^{2\nu-2} \sqrt{\pi} K_{2\nu-1}(w) \{J_{2\nu-1}(w) \sin \nu\pi + Y_{2\nu-1}(w) \cos \nu\pi\},$$

$$(67) S_3\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}, 0; \frac{1}{8}w^2\right) =$$

$$= -4\sqrt{\pi} K_\nu(w) \left\{J_\nu(w) \sin \frac{1}{2}\nu\pi + Y_\nu(w) \cos \frac{1}{2}\nu\pi\right\}$$

und

$$(68) S_3\left(0, \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; \frac{1}{8}w^2\right) =$$

$$= 4\sqrt{\pi} K_\nu(w) \left\{J_\nu(w) \cos \frac{1}{2}\nu\pi - Y_\nu(w) \sin \frac{1}{2}\nu\pi\right\}.$$

Nun folgt aus (10)

$$S_4\left(\frac{3}{2}\nu - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\nu, \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}; t\right) =$$

$$= \frac{\pi}{\sin 2\nu\pi} \left\{ e^{\frac{1}{2}\nu\pi i} S_3\left(\frac{1}{2}\nu, \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\nu - \frac{1}{2}; t e^{\frac{1}{2}\pi i}\right) \right.$$

$$\left. - e^{-\frac{3}{2}\nu\pi i} S_3\left(\frac{3}{2}\nu - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\nu, \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}; t e^{\frac{1}{2}\pi i}\right) \right\}.$$

Infolge (61) und (60) hat man also

$$(69) S_4\left(\frac{3}{2}\nu - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\nu, \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}; \frac{1}{8}w^2\right) =$$

$$= \frac{2^{2-3\nu} w^{2\nu} \pi^{\frac{3}{2}}}{\sin 2\nu\pi} K_{2\nu}(we^{\frac{1}{4}\pi i}) \{e^{\nu\pi i} J_{-2\nu}(we^{\frac{1}{4}\pi i}) - e^{-\nu\pi i} J_{2\nu}(we^{\frac{1}{4}\pi i})\}.$$

Aus (2) und (4) ergibt sich aber mit Rücksicht auf (6)

$$\frac{\pi}{\sin 2\nu\pi} \{e^{\nu\pi i} J_{-2\nu}(we^{\frac{1}{4}\pi i}) - e^{-\nu\pi i} J_{2\nu}(we^{\frac{1}{4}\pi i})\} = 2K_{2\nu}(we^{-\frac{1}{4}\pi i}).$$

Wegen (69) gilt daher

$$(70) \quad S_4\left(\frac{3}{2}\nu - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\nu, \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}; \frac{1}{8}w^2\right) = \\ = 2^{3-3\nu} w^{2\nu} \sqrt{\pi} K_{2\nu}(we^{\frac{1}{2}\pi i}) K_{2\nu}(we^{-\frac{1}{2}\pi i}).$$

## § 4.

## Spezialfälle der Sätze.

Ich werde jetzt einige merkwürdige Spezialfälle der Sätze 3–14 mitteilen. Diese Spezialfälle — zum Teil schon bekannt — können in zwei Klassen verteilt werden<sup>15)</sup>.

*Spezialfälle der ersten Klasse.*

Ist  $z \neq 0$ ,  $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$  und  $\Re(\nu) < \frac{1}{2}$ , bzw.  $\Re(\nu) < 0$ , so folgt aus (18) (mit  $z^2$  statt  $z$ ,  $v = u^2$  und  $\alpha = -\frac{1}{2}\nu$ , bzw.  $\alpha = -\frac{1}{2}\nu - 1$  angewendet) mit Rücksicht auf (50), bzw. (51)<sup>16)</sup>

$$(71) \quad \mathbf{H}_\nu(z^2) - Y_\nu(z^2) = \frac{8 \cos \nu\pi}{\pi} \int_0^\infty J_{-\nu}(u^2) K_{2\nu}(2zu) u du,$$

bzw.

$$(72) \quad \mathbf{H}_\nu(z^2) - Y_\nu(z^2) = \frac{8 \cos \nu\pi}{\pi z} \int_0^\infty J_{-\nu-1}(u^2) K_{2\nu+1}(2zu) u^2 du.$$

Ist  $z \neq 0$  und  $\Re(\nu) > -\frac{1}{2}$ , bzw.  $\Re(\nu) > -\frac{3}{2}$ , so folgt aus (19) (mit  $z^2$  statt  $z$ ,  $v = u^2$  und  $\alpha = -\frac{1}{2}\nu$ , bzw.  $\alpha = -\frac{1}{2}\nu - 1$  angewendet) mit Rücksicht auf (47), bzw. (48)<sup>17)</sup>

$$(73) \quad I_\nu(z^2) - \mathbf{L}_\nu(z^2) = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_\nu(u^2) J_{2\nu}(2zu) u du,$$

bzw.

$$(74) \quad I_\nu(z^2) - \mathbf{L}_\nu(z^2) = \frac{4}{\pi z} \int_0^\infty K_{\nu+1}(u^2) J_{2\nu+1}(2zu) u^2 du.$$

<sup>15)</sup> Die Hankelsche Umkehrformeln der Relationen (71), (72), (79) und (80) kommen vor in meiner Arbeit [7] (26–28, Beispiele 9, 10, 3 und 4).

<sup>16)</sup> In (18) ist  $\nu$  außerdem noch der Bedingung  $2\nu \neq 0, -1, -2, \dots$  unterworfen; von dieser Beschränkung kann man sich aber in (71) und (72) durch Grenzübergang befreien.

<sup>17)</sup> Man beachte auch, daß  $K_{-\mu} = K_\mu$  ist (siehe (6)).



Die Integraldarstellungen (71), (72), (73) und (74) kommen schon vor in einer vorigen Arbeit <sup>18)</sup> des Verfassers.

Ich betrachte jetzt die drei Spezialfälle mit  $\alpha = \frac{1}{2}\nu$  und  $\beta = -\frac{1}{2}\nu$ , bzw.  $\alpha = \frac{1}{2}\nu$  und  $\beta = -\frac{1}{2}\nu - 1$ , oder  $\alpha = \frac{1}{2}\nu - 1$  und  $\beta = -\frac{1}{2}\nu$  von (25). Diese drei Spezialfälle liefern, wenn ich überdies noch  $z$  durch  $z^2$  ( $z > 0$ ) und  $v$  durch  $u^2$  ersetze und außerdem die Formeln (47), bzw. (48) oder (49) verwende,

$$(75) \quad J_\nu(z^2) = 2 \int_0^\infty J_\nu(u^2) J_{2\nu}(2zu) u du$$

(wo  $\Re(\nu) > -\frac{1}{2}$  ist), bzw.

$$(76) \quad J_\nu(z^2) = \frac{2}{z} \int_0^\infty J_{\nu+1}(u^2) J_{2\nu+1}(2zu) u^2 du$$

(wo  $\Re(\nu) > -\frac{3}{2}$  ist), oder

$$(77) \quad J_\nu(z^2) = \frac{2}{z} \int_0^\infty J_{\nu-1}(u^2) J_{2\nu-1}(2zu) u^2 du$$

(wo  $\Re(\nu) > 0$  ist).

Formel (75) rührt von Bateman <sup>19)</sup> her; sie ist auch von Hardy <sup>20)</sup> und von van der Pol und Niessen <sup>21)</sup> abgeleitet worden. Die Spezialfälle mit  $\nu = -\frac{1}{2}$  von (76) und mit  $\nu = \frac{1}{2}$  von (77) sind schon von Mitra <sup>22)</sup> gegeben worden <sup>23)</sup>.

### Spezialfälle der zweiten Klasse.

Ist  $z \neq 0$  und  $\Re(\nu) < \frac{1}{2}$ , so folgt aus (17) (mit  $z^2$  statt  $z$ ,  $v = \frac{1}{2}u^2$  und  $\alpha = \frac{3}{2}\nu - \frac{1}{2}$  angewendet) mit Rücksicht auf (61)

$$(78) \quad \mathbf{H}_\nu(z^2) - Y_\nu(z^2) = \frac{2^{\nu+2} z^{2\nu} \cos \nu\pi}{\pi^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty K_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}u^2\right) K_{2\nu}(zu) J_{-2\nu}(zu) u^{2-2\nu} du.$$

<sup>18)</sup> MEIJER, [5], 747–749; in [5] habe ich irrtümlich behauptet, daß (73) und (74) für alle Werte von  $\nu$  gültig seien.

<sup>19)</sup> BATEMAN, [2], 185.

<sup>20)</sup> HARDY, [4], 190.

<sup>21)</sup> VAN DER POL und NIESSEN, [9], 558.

<sup>22)</sup> MITRA, [8], 87–88.

<sup>23)</sup> Diese zwei Spezialfälle werden besonders einfach; denn es gilt

$$J_{-\frac{1}{2}}(\zeta) = \left(\frac{2}{\pi\zeta}\right)^{\frac{1}{2}} \cos \zeta, \quad J_{\frac{1}{2}}(\zeta) = \left(\frac{2}{\pi\zeta}\right)^{\frac{1}{2}} \sin \zeta.$$

Ist  $z \neq 0$ ,  $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$  und  $|\Re(\nu)| < \frac{1}{2}$ , so folgt aus (18) (mit  $z^2$  statt  $z$ ,  $v = \frac{1}{2}u^2$  und  $\alpha = \frac{3}{2}\nu - \frac{1}{2}$  angewendet) mit Rücksicht auf (70)

$$(79) \quad \mathbf{H}_\nu(z^2) - Y_\nu(z^2) = \frac{2^{\nu+2} z^{2\nu} \cos \nu\pi}{\pi^2} \int_0^\infty J_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}u^2\right) K_{2\nu}(zu e^{\frac{1}{2}\pi i}) K_{2\nu}(zu e^{-\frac{1}{2}\pi i}) u^{2-2\nu} du.$$

Ist  $z \neq 0$ ,  $|\arg z| < \frac{1}{4}\pi$  und  $\Re(\nu) > -\frac{1}{2}$ , so folgt aus (20) (mit  $z^2$  statt  $z$ ,  $v = \frac{1}{2}u^2$  und  $\alpha = \frac{3}{2}\nu - \frac{1}{2}$  angewendet) mit Rücksicht auf (60)

$$(80) \quad I_\nu(z^2) - \mathbf{L}_\nu(z^2) = \frac{2^{\nu+1} z^{2\nu}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty J_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}u^2\right) K_{2\nu}(zu) J_{2\nu}(zu) u^{2-2\nu} du.$$

Ist  $z \neq 0$ ,  $|\arg z| < \frac{1}{4}\pi$  und  $|\Re(\nu)| < \frac{1}{2}$ , so folgt aus (21) (mit  $z^2$  statt  $z$ ,  $v = \frac{1}{2}u^2$  und  $\alpha = \frac{3}{2}\nu - \frac{1}{2}$  angewendet) mit Rücksicht auf (64)

$$(81) \quad I_{-\nu}(z^2) - \mathbf{L}_\nu(z^2) = \frac{2^\nu z^{2\nu}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty J_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}u^2\right) K_{2\nu}(zu) \{J_{2\nu}(zu) + J_{-2\nu}(zu)\} u^{2-2\nu} du.$$

Die Beziehungen (79) und (80) habe ich früher<sup>24)</sup> auf andre Weise abgeleitet. Der Spezialfall mit  $\nu = 0$  von (78) und der gemeinsame Spezialfall mit  $\nu = 0$  von (80) und (81) kommen auch bei Herrn Mitra<sup>25)</sup> vor.

Ich wende nun Formel (22) sechsmal an, nämlich mit  $\alpha = -\frac{1}{2}\nu$  und  $\beta = -\frac{3}{2}\nu - \frac{1}{2}$ , mit  $\alpha = -\frac{1}{2}\nu - 1$  und  $\beta = -\frac{3}{2}\nu - \frac{3}{2}$ , mit  $\alpha = \frac{3}{2}\nu - \frac{1}{2}$  und  $\beta = \frac{1}{2}\nu$ , mit  $\alpha = \frac{3}{2}\nu - \frac{3}{2}$  und  $\beta = \frac{1}{2}\nu - 1$ , mit  $\alpha = -\frac{1}{2}$  und  $\beta = 0$  und mit  $\alpha = 0$  und  $\beta = -\frac{1}{2}$ . Ich finde dann, wenn ich ferner noch  $z$  durch  $z^2$  und  $v$  durch  $\frac{1}{2}u^2$  ersetze und überdies die Beziehungen (62), (63), (65), (66), (67) und (68) successive benutze,

$$(82) \quad K_\nu(z^2) = 2^{-\nu} z^{-2\nu} \sqrt{\pi} \int_0^\infty J_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}u^2\right) K_{2\nu}(zu) J_{2\nu}(zu) u^{2\nu+2} du$$

(wo  $\Re(\nu) > -\frac{1}{2}$  ist)<sup>26)</sup>,

<sup>24)</sup> MEIJER, [5], Formeln (49) und (53).

<sup>25)</sup> MITRA, [8], Formeln (19) und (15).

<sup>26)</sup> Ich nehme an, daß  $z \neq 0$  und  $|\arg z| < \frac{1}{4}\pi$  ist.

$$K_\nu(z^2) = 2^{-\nu-1} z^{-2\nu-2} \sqrt{\pi} \int_0^\infty J_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}u^2\right) K_{2\nu+1}(zu) J_{2\nu+1}(zu) u^{2\nu+4} du$$

(wo  $\Re(\nu) > -1$  ist),

$$K_\nu(z^2) = -2^\nu z^{2\nu} \sqrt{\pi} \int_0^\infty J_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}u^2\right) K_{2\nu}(zu) \times \\ \times \{J_{2\nu}(zu) \sin \nu\pi + Y_{2\nu}(zu) \cos \nu\pi\} u^{2-2\nu} du$$

(wo  $|\Re(\nu)| < \frac{1}{2}$  ist),

$$K_\nu(z^2) = 2^{\nu-1} z^{2\nu-2} \sqrt{\pi} \int_0^\infty J_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}u^2\right) K_{2\nu-1}(zu) \times \\ \times \{J_{2\nu-1}(zu) \sin \nu\pi + Y_{2\nu-1}(zu) \cos \nu\pi\} u^{4-2\nu} du$$

(wo  $-\frac{1}{2} < \Re(\nu) < \frac{3}{2}$  ist),

$$(z^2) = -2 \int_0^\infty \cos\left(\frac{1}{2}u^2\right) K_\nu(zu) \left\{J_\nu(zu) \sin \frac{1}{2}\nu\pi + Y_\nu(zu) \cos \frac{1}{2}\nu\pi\right\} u du$$

(wo  $|\Re(\nu)| < 1$  ist) und

$$) K_\nu(z^2) = 2 \int_0^\infty \sin\left(\frac{1}{2}u^2\right) K_\nu(zu) \left\{J_\nu(zu) \cos \frac{1}{2}\nu\pi - Y_\nu(zu) \sin \frac{1}{2}\nu\pi\right\} u du$$

(wo  $|\Re(\nu)| < 2$  ist).

Der gemeinsame Spezialfall mit  $\nu = 0$  von (82) und (83) ist schon von Herrn Mitra<sup>27)</sup> gegeben worden<sup>28)</sup>.

Ist  $z \neq 0$  und  $\Re(\nu) < \frac{3}{2}$ , so folgt aus (23) (mit  $z^2$  statt  $z$ ,  $v = \frac{1}{2}u^2$  und  $\alpha = \frac{3}{2}\nu - \frac{1}{2}$  angewendet) mit Rücksicht auf (57)

$$\mathbf{H}_\nu(z^2) \sin \nu\pi = \frac{2^{\nu-1} z^{2\nu}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty K_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}u^2\right) \times \\ \times \{I_{-2\nu}(zu) J_{2\nu}(zu) - I_{2\nu}(zu) J_{-2\nu}(zu)\} u^{2-2\nu} du.$$

Ich wende nun Formel (24) fünfmal an, nämlich mit  $\alpha = -\frac{1}{2}\nu$  und  $\beta = -\frac{3}{2}\nu - \frac{1}{2}$ , mit  $\alpha = -\frac{1}{2}\nu - 1$  und  $\beta = -\frac{3}{2}\nu - \frac{3}{2}$ , mit  $\alpha = \frac{3}{2}\nu - \frac{1}{2}$  und  $\beta = \frac{1}{2}\nu$ , mit  $\alpha = \frac{3}{2}\nu - \frac{3}{2}$  und  $\beta = \frac{1}{2}\nu - 1$  und mit  $\alpha = 0$  und  $\beta = -\frac{1}{2}$ . Ich finde dann, wenn ich ferner noch  $z$  durch  $z^2$  ( $z \neq 0$ ) und  $v$  durch  $\frac{1}{2}u^2$  ersetze und überdies

<sup>27)</sup> MITRA, [8], Formel (14).

<sup>28)</sup> Mit Hilfe von  $K_\nu(z^2) = K_{-\nu}(z^2)$  kann man aus den obigen Integraldarstellungen noch andre ableiten.

die Beziehungen (55), (56), (58), (59) und (54) successive benutze,

$$J_\nu(z^2) = \frac{2^{-\nu} z^{-2\nu}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty K_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}u^2\right) I_{2\nu}(zu) J_{2\nu}(zu) u^{2\nu+2} du$$

(wo  $\Re(\nu) > -\frac{1}{2}$  ist),

$$J_\nu(z^2) = \frac{2^{-\nu-1} z^{-2\nu-2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty K_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}u^2\right) I_{2\nu+1}(zu) J_{2\nu+1}(zu) u^{2\nu+4} du$$

(wo  $\Re(\nu) > -1$  ist),

$$J_\nu(z^2) \cos \nu\pi = \frac{2^{\nu-1} z^{2\nu}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty K_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}u^2\right) \times \\ \times \{I_{2\nu}(zu) J_{-2\nu}(zu) + I_{-2\nu}(zu) J_{2\nu}(zu)\} u^{2-2\nu} du$$

(wo  $\Re(\nu) < 1$  ist),

$$J_\nu(z^2) \cos \nu\pi = \frac{2^{\nu-2} z^{2\nu-2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty K_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}u^2\right) \times \\ \times \{I_{2\nu-1}(zu) J_{1-2\nu}(zu) - I_{1-2\nu}(zu) J_{2\nu-1}(zu)\} u^{4-2\nu} du$$

(wo  $\Re(\nu) < 2$  ist) und <sup>29)</sup>

$$(84) \quad J_\nu(z^2) = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}u^2} I_\nu(zu) J_\nu(zu) u du$$

(wo  $\Re(\nu) > -1$  ist).

Formel (84) war schon bekannt <sup>30)</sup>.

<sup>29)</sup>  $K_{\frac{1}{2}}(\zeta) = \left(\frac{\pi}{2\zeta}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\zeta}$ .

<sup>30)</sup> Man vergl. WATSON, [12], 395, Formel (1).

## LITERATURVERZEICHNIS.

### E. W. BARNES.

[1] The asymptotic expansion of integral functions defined by generalized hypergeometric series [Proc. London Math. Soc. (2) 5 (1907), 59–116].

### H. BATEMAN.

[2] The solution of linear differential equations by means of definite integrals [Trans. Cambridge Phil. Soc. 21 (1912), 171–196].

### S. BOCHNER.

[3] Vorlesungen über Fouriersche Integrale (1932).

## G. H. HARDY.

[4] Some further applications of Mellin's inversion formula [Messenger of Math. 56 (1927), 186–192].

## C. S. MEIJER.

[5] Integraldarstellungen für Lommelsche und Struvesche Funktionen [Proc. Amsterdam 38 (1935), 628–634 und 744–749].

[6] Einige Integraldarstellungen für Produkte von Whittakerschen Funktionen [Quarterly Journ. (Oxford) 6 (1935), 241–248].

[7] Über Whittakersche bzw. Besselsche Funktionen und deren Produkte [Nieuw Archief Wiskunde (2) 18 (4e stuk, 1936), 10–39].

## S. C. MITRA.

[8] On certain integrals and expansions involving Bessel functions [Bulletin Calcutta 25 (1933), 81–98].

## B. VAN DER POL and K. F. NIESSEN.

[9] Symbolic calculus [Philos. Mag. (7) 13 (1932), 537–577].

## E. C. TITCHMARSH.

[10] Hankel transforms [Proc. Cambridge Phil. Soc. 21 (1923), 463–473].

[11] Introduction to the theory of Fourier integrals (1937).

## G. N. WATSON.

[12] A treatise on the theory of Bessel functions (1922).

(Eingegangen den 15. November 1938.)

---