SAMUEL EILENBERG

Généralisation du théorème de M. H. Hopf sur les classes des transformations en surfaces sphériques

Compositio Mathematica, tome 6 (1939), p. 428-433
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1939__6__428_0>

Généralisation du théorème de M. H. Hopf sur les classes des transformations en surfaces sphériques

par

Samuel Eilenberg

Warszawa

---

1. Le i-ème groupe d'homotopie $\pi_i(S^m)$ de la surface sphérique m-dimensionnelle S^m (pour $m>0$) sera désigné par (m^i). C'est un groupe abelien au plus dénombrable [1]). $(m^i)^*$ désignera le groupe topologique compact orthogonal à (m^i) [2]). En particulier, (m^m) sera interprêté comme le groupe des nombres entiers et, par conséquent, $(m^m)^*$ comme celui des nombres réels réduits mod 1.

2. Soit P^n un polyèdre n-dimensionnel et f une transformation continue telle que $f(P^n) \subset S^m$. A tout cycle m-dimensionnel Z^m de P^n à coefficients puisés de $(m^m)^*$ correspond alors un élément $g(f;\, Z^m) \epsilon\, (m^m)^*$ qui est le *degré* de la transformation f sur le cycle Z^m. Cette correspondance est une homomorphie (continue) $\chi(f)$ du groupe $B^m(P^n)$ coef $(m^m)^*$ [3]) en groupe $(m^m)^*$, c.-à-d. un *caractère* du groupe $B^m(P^n)$ coef $(m^m)^*$.

Si deux transformations $f_0(P^n) \subset S^m$ et $f_1(P^n) \subset S^m$ appartiennent à la même classe, c. à d. sont homotopes, les caractères qui leur correspondent sont — comme on sait — égaux: $\chi(f_0)=\chi(f_1)$. Ainsi: *à toute classe Φ de transformations continues $f(P^n) \subset S^m$ $(m>0)$ correspond un caractère $\chi(\Phi)$ du groupe $B^m(P^n)$* coef $(m^m)^*$.

3. On doit à M. Hopf [4]) le théorème suivant:

(H) *Si $n = m > 0$, les classes Φ de transformations continues*

---

1) W. Hurewicz [Proc. Akad. Amsterdam **38** (1935)], 113—114.

2) L. Pontrjagin [Ann. of Math. (2) **35** (1934), 361—373].

3) Nous désignons par $B^m(P^n)$ coef G le groupe d'homologie qu'on obtient en considérant les cycles m-dimensionnels de P^n à coefficients appartenant au groupe abelien G. Si le groupe G est topologique compact, ce groupe d'homologie l'est aussi; cf. L. Pontrjagin [Ann. of Math. (2) **35** (1934)], 906.

4) H. Hopf [Comm. Math. Helv. **5** (1933),38—54]; H. Freudenthal [Comp. Math. **4** (1937), 235—238]; H. Whitney [Duke Math. Journ. **3** (1937), 46—55].

$f(P^n) \subset S^m$ et les caractères χ du groupe $B^m(P^n)$ coef $(m^m)^*$ *sont en correspondance biunivoque, déterminée par $\chi(\Phi)$.*

Je me propose d'établir ici la généralisation suivante de ce théorème:

Théorème I. *Soit P^n un polyèdre tel que*

$$(3.1)_i \qquad B^i(P^n) \ \text{coef}\ (m^i)^* = 0 \text{ [5]},$$

$$(3.2)_i \qquad B^{i+1}(P^n) \ \text{coef}\ (m^i)^* = 0$$

pour $i = m+1, m+2, \ldots$.

Alors les classes Φ de transformations continues $f(P^n) \subset S^m$ et les caractères χ du groupe $B^m(P^n)$ coef $(m^m)^*$ *sont en correspondance biunivoque déterminée par $\chi(\Phi)$.*

Ce théorème résulte de deux théorèmes suivants qui seront démontrés plus loin:

Théorème II. *Soit P^n un polyèdre tel que*

$$(3.3)_i \qquad B^i(P^n) \ \text{coef}\ (m^i)^* = 0$$

pour $i = m+1, m+2, \ldots$.

Pour que deux transformations continues $f_0(P^n) \subset S^m$ et *$f_1(P^n) \subset S^m$ soient alors homotopes, il faut et il suffit que $\chi(f_0) = \chi(f_1)$.*

Théorème III. *Soit P^n un polyèdre tel que*

$$(3.4)_i \qquad B^{i+1}(P^n) \ \text{coef}\ (m^i)^* = 0$$

pour $i = m+1, m+2, \ldots$.

Alors, pour tout caractère χ du groupe $B^m(P^n)$ coef $(m^m)^*$, *il existe une transformation continue $f(P^n) \subset S^m$ pour laquelle $\chi(f) = \chi$.*

En particulier, dans les hypothèses du th. II, les transformations inessentielles $f(P^n) \subset S^m$ sont caracterisées par la condition $\chi(f) = 0$ (ce que nous avons démontré ailleurs, plus généralement pour les espaces P^n métriques compacts quelconques de dimension finie [6])).

4. Un polyèdre P^n est dit *acyclique en dimensions* $\geqq k$ (où $k > 0$) lorsque

$$(4.1)_i \qquad B^i(P^n) \ \text{coef}\ (i^i)^* = 0$$

pour tout $i \geqq k$.

P^n est dit *acyclique*, lorsqu'il est connexe et acyclique en dimensions $\geqq 1$.

---

[5]) c.-à.-d. que le groupe en question se réduit à l'élément neutre.

[6]) Fund. Math. **31** (1938), 193, th. VI.

On sait [7]) que, pour un polyèdre acyclique en dimensions $\geqq m+1$, les conditions $(3.1)_i$ et $(3.2)_i$ sont satisfaites pour tout $i \geqq m+1$. Le th. I implique donc le

THÉORÈME Ia. *Soit P^n un polyèdre acyclique en dimensions $\geqq m+1$. Alors les classes Φ de transformations continues $f(P^n) \subset S^m$ et les caractères χ du groupe $B^m(P^n)$* coef $(m^m)^*$ *sont en correspondance biunivoque déterminée par $\chi(\Phi)$.*

THÉORÈME IV. *Pour qu'un polyèdre P^n soit acyclique en dimensions $\geqq k$, il faut et il suffit que toute transformation continue $f(P^n) \subset S^m$ soit inessentielle pour tout $m \geqq k$.*

THÉORÈME IVa [8]). *Pour qu'un polyèdre P^n soit acyclique, il faut et il suffit que toute transformation continue $f(P^n) \subset S^m$ soit inessentielle pour $m = 0, 1, \ldots$.*

Pour montrer que la condition du th. IV est nécessaire, on n'a qu'à appliquer le th. Ia. Pour prouver qu'elle est suffisante, désignons par m le plus grand entier tel que

$$B^m(P^n) \text{ coef } (m^m)^* \neq 0. \tag{4.2}$$

Il existe [2]) alors un caractère $\chi \neq 0$ du groupe (4.2). Le polyèdre P^n étant acyclique en dimensions $\geqq m+1$, on obtient en vertu du th. Ia une transformation continue $f(P^n) \subset S^m$ pour laquelle $\chi(f) = \chi \neq 0$, donc une transformation f essentielle.

Pour déduire le th. IVa du th. IV, on n'a qu'à remarquer que la connexité de P^n équivaut à ce que toute transformation continue $f(P^n) \subset S^0$ est inessentielle.

5. Soit X un sous-ensemble fermé d'un polyèdre P^n. Une transformation continue $f(X) \subset S^m$ sera dite *algébriquement prolongeable sur P^n* lorsque, pour tout cycle convergent $(m+1)$-dimensionnel Z^{m+1} mod X de P^n [9]) à coefficients de $(m^m)^*$, on a $g(f; \partial Z^{m+1}) = 0$ [10]). Evidemment c'est une condition nécessaire pour l'existence d'un prolongement $f(P^n) \subset S^m$.

THÉORÈME V [11]). *Soit X un sous-ensemble fermé d'un polyèdre P^n tel que*

---

[7]) N. E. STEENROD [Amer. Journ. of Math. 58 (1936)], 675—676.

[8]) Une partie de ce théorème (la nécessité) a été établie par M. K. Borsuk dans les Fund. Math 28 (1937), 203. L'autre partie (la suffisance) constitue une réponse affirmative à un des problèmes de M. Borsuk posés ibid., 210.

[9]) Ce sont toujours les cycles à support compact; pour plus de détails voir S. EILENBERG [Fund. Math. 31 (1938)], 185—186.

[10]) c. à d. $f(\partial Z^{m+1}) \backsim 0$ dans S^m, ∂Z^{m+1} désignant la frontière combinatoire de Z^{m+1}.

[11]) Pour le cas $n = m$, voir le renvoi [1]).

$(5.1)_i$ $$B^{i+1}(P^n) \bmod X \text{ coef } (m^i)^* = 0$$

pour $i = m+1,\ m+2, \ldots$. *Pour qu'une transformation continue* $f(X) \subset S^m$ *admette un prolongement* $f(P^n) \subset S^m$, *il faut et il suffit qu'elle soit algébriquement prolongeable sur* P^n.

Démonstration. Admettons que P^n est un sous-polyèdre simplicial de S^{2n+1}. Soit $Y \subset S^{2n+1} - P^n$ un polyèdre tel que

(5.2) Chaque cycle convergent mod X de $S^{2n+1} - Y$ est homologue mod X dans $S^{2n+1} - Y$ à un cycle convergent mod X de P^n [12]).

Ceci implique que

(5.3) Toute transformation continue $f(X) \subset S^m$ qui est algébriquement prolongeable sur P^n est aussi algébriquement prolongeable sur $S^{2n+1} - Y$.

Les propositions (5.2) et $(5.1)_i$ donnent

$(5.4)_i$ $$B^{i+1}(S^{2n+1} - Y) \bmod X \text{ coef } (m^i)^* = 0$$

pour $i = m+1,\ m+2, \ldots$.

Or, comme nous l'avons démontré ailleurs [13]), $(5.4)_i$ implique que

(5.5) Toute transformation continue $f(X) \subset S^m$ algébriquement prolongeable sur $S^{2n+1} - Y$ admet un prolongement $f(S^{2n+1} - Y) \subset S^m$.

La thèse du th. V résulte de (5.3) et (5.5).

6. *Démonstration du th. II.* Désignons par I l'intervalle fermé $[0, 1]$, par P^{n+1} le produit cartésien $P^n \times I$ et par X l'ensemble $P^n \times (0) + P^n \times (1) \subset P^{n+1}$. On déduit de $(3.1)_i$ que

$(6.1)_i$ $$B^{i+1}(P^{n+1}) \bmod X \text{ coef } (m^i)^* = 0$$

pour $i = m+1,\ m+2, \ldots$.

Envisageons deux transformations continues

(6.2) $$f_0(P^n) \subset S^m \quad f_1(P^n) \subset S^m$$

pour lesquelles

(6.3) $$\chi(f_0) = \chi(f_1).$$

---

[12]) Il suffit dans ce but de faire Y égal à la somme de tous les simplexes fermés de S^{2n+1} disjoints à P^n.

[13]) Fund. Math. **31** (1938), 189, th. IV.

En posant

$$f(x, 0) = f_0(x),\ f(x, 1) = f_1(x), \tag{6.4}$$

on obtient une transformation continue $f(X) \subset S^m$.

Soit Z^{m+1} un cycle $(m+1)$-dimensionnel mod X de P^{n+1} à coefficients de $(m^m)^*$. On a alors

$$\partial Z^{m+1} = Z_0^m - Z_1^m, \tag{6.5}$$

où Z_0^m est un cycle de $P^n \times (0)$ et Z_1^m en est un de $P^n \times (1)$. En désignant par $\overset{*}{Z}{}_0^m$ et $\overset{*}{Z}{}_1^m$ les cycles correspondants dans P^n, on a en vertu de (6.5) $\overset{*}{Z}{}_0^m \sim \overset{*}{Z}{}_1^m$ dans P^n, ce qui implique en vertu de (6.3) que

$$g(f_0; \overset{*}{Z}{}_0^m) = g(f_1; \overset{*}{Z}{}_1^m)$$

et d'après (6.4) que

$$g(f; Z_0^m) = g(f; Z_1^m),$$

d'où selon (6.5)

$$g(f; \partial Z^{m+1}) = 0.$$

La transformation $f(X) \subset S^m$ étant ainsi algébriquement prolongeable sur P^{n+1}, il existe en vertu de $(6.1)_i$ et du th. V un prolongement $f(P^{n+1}) \subset S^m$, ce qui prouve en vertu de (6.4) que les transformations (6.2) sont homotopes.

7. *Démonstration du th. III.* Admettons que P^n est donné dans une division simpliciale et désignons par P^m la somme de tous les simplexes au plus m-dimensionnels de P^n. En vertu de $(3.4)_i$, on a alors

$$B^{i+1}(P^n) \bmod P^m \text{ coef } (m^i)^* = 0 \tag*{$(7.1)_i$}$$

pour $i = m+1,\ m+2, \ldots$.

Tout caractère χ du groupe $B^m(P^n)$ coef $(m^m)^*$ est en même temps un caractère du groupe $B^m(P^m)$ coef $(m^m)^*$. En vertu du th. de M. Hopf [4]), il existe donc une transformation continue $f(P^m) \subset S^m$ telle que $\chi(f) = \chi$. Pour tout cycle Z^m de P^m à coefficients de $(m^m)^*$, tel que $Z^m \sim 0$ dans P^n, on a alors $g(f; Z^m) = 0$, c.-à-d. que la transformation f est algébriquement prolongeable sur P^n. Les conditions $(7.1)_i$ étant satisfaites, il existe en vertu du th. V un prolongement $f(P^n) \subset S^m$, ce qui achève la démonstration.

8. Remarquons pour terminer que la démonstration du th. V repose entièrement sur l'application du théorème cité dans le renvoi [13]), après avoir plongé P^n dans S^{2n+1}. Cependant la démonstration de ce théorème exige à son tour l'emploi de l'appareil des théorèmes de dualité tout entier. Il serait intéressant de démontrer le th. V (dont tous les autres théorèmes de cet article résultent) d'une facon intrinsèque.

(Reçu le 10 septembre 1938.)