

COMPOSITIO MATHEMATICA

ALBERT EDREI

Sur les déterminants récurrents et les singularités d'une fonction donnée par son développement de Taylor

Compositio Mathematica, tome 7 (1940), p. 20-88

http://www.numdam.org/item?id=CM_1940__7__20_0

© Foundation Compositio Mathematica, 1940, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Sur les déterminants récurrents et les singularités d'une fonction donnée par son développement de Taylor

par

Albert Edrei

Zurich

TABLE DES MATIÈRES.

INTRODUCTION	[1]	20
CHAP. I: Propriétés générales des déterminants récurrents; l'invariance- limite	[11]	30
CHAP. II: Sur les fonctions uniformes qui n'ont que des pôles et un nombre fini de singularités essentielles	[17]	36
CHAP. III: Les fractions continues du type de Grommer	[31]	50
CHAP. IV: Sur les fonctions du type $f(z) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\varphi(x)}{z-x} dx$	[44]	63
CHAP. V: Les séries de la forme $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{r_{\nu}}{z-s_{\nu}}$	[57]	76

INTRODUCTION.

1. Nature des problèmes traités. Soit

$$(1) \quad \frac{a_0}{z} + \frac{a_1}{z^2} + \dots + \frac{a_n}{z^{n+1}} + \dots,$$

une série entière, convergente pour quelque valeur finie de la variable z . Considérons la fonction analytique $f(z)$, définie par le prolongement de l'élément (1). Supposons tout d'abord cette fonction uniforme dans tout son domaine d'existence; dans ce cas, l'ensemble E de ses points singuliers est parfaitement défini et l'on sait que E est fermé et borné et que son complémentaire CE est connexe. Ces propriétés sont les seules dont E jouisse, en général.

Posons

$$(2) \quad A_k^{(n)} = \begin{vmatrix} a_k & a_{k+1} & \cdots & a_{k+n-1} \\ a_{k+1} & a_{k+2} & \cdots & a_{k+n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k+n-1} & a_{k+n} & \cdots & a_{k+2n-2} \end{vmatrix},$$

et désignons par $\tau(E)$, le diamètre transfini ¹⁾ de l'ensemble E ; M. Pólya ²⁾ a démontré l'inégalité

$$(3) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |A_0^{(n)}|^{\frac{1}{n^2}} \leq \tau(E).$$

On peut se proposer, connaissant certaines propriétés de la suite

$$(4) \quad a_0, a_1, \dots, a_n, \dots,$$

de déduire certaines propriétés de l'ensemble E ; c'est là un aspect très général du célèbre problème de M. Hadamard. Le résultat de M. Pólya en fixe un aspect plus particulier: celui auquel ce travail est consacré. Voici comment j'énoncerai ce problème partiel: l'ensemble E étant caractérisé par un nombre, retrouver ce nombre dans les propriétés-limites de certaines suites de déterminants formés avec les termes de (4).

Nous n'avons envisagé, jusqu'à maintenant, que le cas où $f(z)$ est uniforme dans tout son domaine d'existence; l'inégalité (3) est d'une portée plus vaste et embrasse le cas des fonctions multiformes. Pour présenter le résultat général de M. Pólya, introduisons d'abord une

Définition. Nous dirons qu'un ensemble E^* , de points du plan de la variable complexe, jouit de la propriété (\mathfrak{P}), par rapport à $f(z)$: s'il est fermé et borné, si son complémentaire CE^* est connexe et si la branche de $f(z)$, coïncidant avec (1), pour des $|z|$ suffisamment grands, est uniforme et holomorphe dans CE^* .

Considérons la borne inférieure $\bar{\tau}$ des diamètres transfinis de tous les ensembles jouissant de la propriété (\mathfrak{P}), par rapport à $f(z)$; M. Pólya a démontré l'inégalité

$$(5) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |A_0^{(n)}|^{\frac{1}{n^2}} \leq \bar{\tau}.$$

¹⁾ La notion de diamètre transfini a été introduite par M. Fekete; elle est en relation étroite avec d'autres notions importantes, par exemple, la notion de capacité de la théorie des potentiels. Pour les définitions, voir: M. FEKETE, Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten [Math. Zeitschr. 17 (1923), 228—249].

²⁾ G. PÓLYA, Über gewisse notwendige Determinantenkriterien für die Fortsetzbarkeit einer Potenzreihe [Math. Annalen 99 (1928), 687—706].

Si $f(z)$ est uniforme dans tout son domaine d'existence, les inégalités (3) et (5) sont équivalentes [il suffit d'observer que $\tau(E)$ est une fonction monotone de l'ensemble E , c'est à dire que l'inclusion $E \subset E^*$ entraîne l'inégalité $\tau(E) \leq \tau(E^*)$].

M. Pólya a tiré de (5) un grand nombre de conséquences remarquables; en particulier, par application de cette inégalité, il a établi son théorème, aujourd'hui classique, sur les séries de Taylor à coefficients entiers. Grâce à (5), il est également parvenu à certaines conditions, nécessaires pour qu'une série soit prolongeable au delà de son cercle de convergence.

La richesse du domaine d'application de (5) montre la portée de cette relation et me semble justifier l'étude de certaines des questions qu'elle soulève. La plus importante, à mon sens, se rattache à la possibilité de remplacer l'inégalité (5) par l'égalité ³⁾

$$(6) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |A_0^{(n)}|^{\frac{1}{n^2}} = \bar{\tau}.$$

Voici les circonstances qui incitent à supposer la validité générale de cette relation:

Pour certaines fonctions, M. Pólya est parvenu à calculer les deux membres de (5). Ses exemples, très différents les uns des autres, satisfont cependant tous à la relation (6). M. Pólya a en outre démontré que les deux membres de (5) varient de la même manière ⁴⁾ quand, dans $f(z)$, on pratique la substitution

$$z \mid cz^m + b \quad (c \neq 0; m \geq 1, \text{ entier});$$

on peut ainsi multiplier à l'infini les cas où l'égalité (6) est satisfaite.

M. Wilson, pour une classe particulière de fonctions, a précisé d'une façon intéressante l'inégalité de M. Pólya: il a démontré ⁵⁾ que si $f(z)$ est uniforme dans tout son domaine d'existence, et n'admet pour singularités que des pôles et une seule singularité essentielle

³⁾ M. PÓLYA, à la page 689 du travail précédemment cité, pose non pas cette question, mais une autre, de nature très voisine. Il demande si les conditions qu'il a établies, nécessaires à la prolongeabilité de (1), sont également des conditions suffisantes. A la fin du § 32, nous répondrons à sa question.

⁴⁾ Dans cet ordre d'idées, j'ai également obtenu un résultat; on le trouvera dans une Note des Comptes rendus 203 (1936), 1488—1491. Les propositions énoncées dans cette Note, et que je reprendrai dans le chapitre I de ce travail, semblent fortifier l'hypothèse de la validité générale de (6).

⁵⁾ R. WILSON, An extension of the Hadamard-Pólya determinantal criteria for uniform functions [Proceedings London Math. Soc. (2) 39 (1935), 363—371].

(qui peut être un point d'accumulation de pôles), d'ordre fini ϱ , on a

$$(7) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |A_0^{(n)}|^{\frac{1}{n^2 \log n}} \leq e^{-\frac{1}{\varrho}}.$$

Dans tous les exemples traités par M. Wilson, le cas d'égalité

$$(8) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |A_0^{(n)}|^{\frac{1}{n^2 \log n}} = e^{-\frac{1}{\varrho}}$$

s'est trouvé réalisé; aussi cet auteur a-t-il été naturellement conduit à se demander si la relation (8) n'est pas générale.

Mon cher maître, M. Pólya, me suggéra l'idée de m'occuper des problèmes posés par (6) et (8); c'est à son amicale instigation, à ses précieux conseils et à l'intérêt constant qu'il m'a témoigné, que je dois d'avoir quelque peu élucidé ces questions. J'ajouterai que, dans les deux derniers chapitres de ce travail, la contribution de M. Pólya est plus importante que la mienne propre. Qu'il me soit permis de lui présenter ici l'expression de ma profonde gratitude.

2. Enoncé des principaux résultats. ⁶⁾ Considérons l'élément (1) et les deux suites de déterminants

$$(9) \quad A_0^{(1)}, A_0^{(2)}, \dots, A_0^{(n)}, \dots,$$

$$(10) \quad A_1^{(1)}, A_1^{(2)}, \dots, A_1^{(n)}, \dots$$

Supposons les termes de ces deux suites tous différents de zéro ⁷⁾ et observons que, dans ce cas, la connaissance de (9) et (10) est équivalente à la connaissance de (1) [§ 16, Proposition 3]. Toutes les propriétés de $f(z)$ doivent alors se manifester aussi bien dans ces deux suites que dans la suite (4). Les résultats de MM. Pólya et Wilson suggèrent même une idée précise concernant la comparaison des indications données par (4) et (9):

Désignons par $\Phi(n)$ une fonction positive, assujettie aux deux conditions

$$(11) \quad \Phi(n) \geq n^2,$$

$$(12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi(n+1)}{\Phi(n)} = 1$$

⁶⁾ Quelques-uns des théorèmes suivants ont déjà été énoncés, sans démonstration, dans une Note des Comptes rendus 207 (1938), 560—562.

⁷⁾ Nous ne ferons cette hypothèse restrictive dans aucun des énoncés suivants.

et comparons

$$\Lambda_{\Phi} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |A_0^{(n)}|^{\frac{1}{\Phi(n)}} \quad \text{et} \quad \lambda_{\Phi} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{n}{\Phi(n)}}.$$

Ce travail fera ressortir un certain parallélisme entre les indications données par Λ_{Φ} et λ_{Φ} . On sait que, pour les λ_{Φ} , les choix les plus intéressants ⁸⁾ de $\Phi(n)$ sont: $\Phi(n) = n^2$ (Théorème de Cauchy-Hadamard) et $\Phi(n) = n^2 \log n$ (Théorème sur la détermination de l'ordre d'une fonction entière par les coefficients de son développement de Taylor); Λ_{n^2} et $\Lambda_{n^2 \log n}$ sont également les plus intéressants des Λ_{Φ} .

On sait, que les modules des termes de la suite (4), et par conséquent les λ_{Φ} , sont dominés par l'influence des singularités situées sur le cercle de convergence de (1); nous verrons par contre que les $A_0^{(n)}$ et par conséquent les Λ_{Φ} , échappent certainement à cette influence particulière [§ 4, Propriété I]. Cette propriété, essentielle à mon sens, et qui à elle seule me semble justifier une étude approfondie des Λ_{Φ} , se manifeste dans les énoncés par une symétrie dans la contribution de chaque singularité de $f(z)$ [inégalité de M. Pólya; Théorème III].

Dans le premier chapitre de ce travail, nous établirons certaines propriétés d'invariance des Λ_{Φ} . Observons les deux membres de (5) et de (7), il est aisé de voir que le second membre de chacune de ces inégalités exprime des propriétés-limites de la suite des coefficients de (1), c'est-à-dire qu'on ne saurait, en ajoutant un polynome en $\frac{1}{z}$ à la série (1), ni altérer $\bar{\tau}$, ni modifier l'ordre d'une singularité essentielle de $f(z)$. En est-il bien ainsi du premier membre de (5) ou (7)? Pour $2n \geq \nu + 2$, le coefficient a_{ν} apparaît dans un grand nombre de termes du développement de $A_0^{(n)}$, la

⁸⁾ La classification des fonctions entières d'ordre nul, conduit à la considération de fonctions $\Phi(n)$ telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \log n}{\Phi(n)} = 0$. Dans une étude de ce genre, le choix

de la fonction Φ est délimité par la remarque générale suivante: Soient

1° $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ une suite à termes positifs ou nuls,

2° $\Phi(n)$ et $\Psi(n)$, deux fonctions positives de n telles que: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi(n)}{\Psi(n)} = 0$.

Si $0 < \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^{\frac{1}{\Phi(n)}} < +\infty$ on conclut: $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^{\frac{1}{\Psi(n)}} = 1$. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^{\frac{1}{\Psi(n)}} = 0$, on peut

seulement affirmer que: $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^{\frac{1}{\Psi(n)}} \leq 1$. Ce n'est que dans ce dernier cas qu'il y a intérêt à introduire $\Psi(n)$.

chose n'est donc nullement évidente. Nous démontrerons d'abord le

Théorème I. *Considérons la série*

$$(13) \quad \sum_{n=p}^{+\infty} a_n z^{-n-1} = g(z). \quad (a_p \neq 0; p \text{ entier positif, négatif ou nul})$$

convergente pour quelque valeur finie de la variable z . Posons

$$0 = a_{p-1} = a_{p-2} = \dots = a_{p-n} = \dots,$$

et

$$\tau_k = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |A_k^{(n)}| \frac{1}{\Phi^{(n)}}.$$

Si la fonction positive $\Phi(n)$ est assujettie aux conditions (11) et (12), tous les τ_k sont égaux ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

De ce théorème résulte immédiatement, non seulement l'invariance des Λ_Φ „vis-à-vis des transformations qui consistent à ajouter à la série un polynôme quelconque ⁹⁾”, mais une invariance générale que nous formulons sous forme de

Théorème II. *Considérons la série (13) et la série*

$$\frac{V(z) + W(z)g(z)}{X(z) + Y(z)g(z)} = \sum_{n=q}^{+\infty} c_n z^{-n-1}.$$

Les fonctions $V(z)$, $W(z)$, $X(z)$ et $Y(z)$ désignent quatre polynômes tels que

$$(14) \quad VY - XW \neq 0$$

et

$$(15) \quad X + Yg \neq 0.$$

Si la fonction positive $\Phi(n)$ est assujettie aux conditions (11) et (12), et si par $C_0^{(n)}$ nous désignons le déterminant obtenu en substituant, dans $A_0^{(n)}$, les c_p aux a_p , on a

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |C_0^{(n)}| \frac{1}{\Phi^{(n)}} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |A_0^{(n)}| \frac{1}{\Phi^{(n)}}.$$

Le deuxième chapitre de ce travail constitue une contribution à l'éclaircissement du problème suivant: On sait, d'une fonction $f(z)$, qu'elle est uniforme et qu'elle n'admet pour singularités que des

⁹⁾ Ce sont les propres termes de M. Hadamard, qui avait jugé souhaitable que l'on trouvât des expressions présentant ce caractère d'invariance. Voir: J. HADAMARD, La série de Taylor et son prolongement analytique [Paris, 1901], p. 100.

pôles (en nombre fini ou infini) et un nombre fini de singularités essentielles (isolées ou points d'accumulation de pôles) d'ordres finis. Quelles affirmations peut-on faire alors sur les coefficients de son développement de Taylor?

Nous énonçons notre résultat sous forme de

Théorème III. Soit (1) un élément de fonction uniforme dans tout son domaine d'existence. Nous supposons $f(z)$ uniquement pourvue de pôles et d'un nombre fini s de singularités essentielles d'ordres finis ($s \geq 1$). Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ les affixes des singularités essentielles, et soient $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_s$ leurs ordres respectifs. Sous ces hypothèses, on a

$$(16) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |A_0^{(n)}|^{\frac{1}{n^2 \log n}} \leq e^{-\frac{1}{\varrho_1 + \varrho_2 + \dots + \varrho_s}}.$$

Pour $s = 1$, l'inégalité (16) se réduit à l'inégalité (7), de M. Wilson. Toutefois les difficultés nouvelles, résultant de la présence simultanée de plusieurs singularités essentielles de $f(z)$, me paraissent interdire l'emploi des méthodes de démonstration de M. Wilson. Nous verrons plus loin [Exemples relatifs au Théorème III], que l'inégalité (16) est, dans un sens que nous précisons, „la meilleure possible”.

Dans le chapitre III, nous cherchons à tirer parti, pour l'éclaircissement de notre sujet, de la théorie si riche des fractions continues. On sait que l'on peut, d'une manière purement algébrique, faire correspondre à toute fraction continue¹⁰⁾ du type

$$(17) \quad \frac{k_1}{|z - l_1|} - \frac{k_2}{|z - l_2|} - \dots - \frac{k_n}{|z - l_n|} - \dots$$

une série entière du type (1). Il est naturel, pour nous, d'analyser de près cette correspondance car les déterminants $A_0^{(n)}$ et $A_1^{(n)}$

¹⁰⁾ Dans tout ce travail, nous nous servirons, pour les fractions continues, de la notation commode introduite par M. Pringsheim: nous écrirons

$$b_0 + \frac{a_1}{|b_1|} + \frac{a_2}{|b_2|} + \dots + \frac{a_n}{|b_n|} + \dots,$$

au lieu de

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots + \frac{a_{n-1}}{b_{n-1} + \frac{a_n}{b_n}}}}.$$

y jouent un rôle essentiel ¹¹⁾. Nous parviendrons, en recherchant la nature analytique des fonctions représentées par certaines fractions continues du type (17), non seulement à mettre les égalités (6) et (8) en défaut, mais encore à prouver que même la connaissance complète de la suite (9) ne permet pas d'affirmations ayant la forme d'égalités relatives aux singularités de $f(z)$. Nous énonçons notre résultat sous forme de

Théorème IV. *Il existe des suites*

$$\alpha_0^{(1)}, \alpha_0^{(2)}, \dots, \alpha_0^{(n)}, \dots,$$

de nombres tous différents de zéro, telles que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\alpha_0^{(n)}|^{\frac{1}{n^2 \log n}} = 0,$$

jouissant en outre de la propriété suivante:

Si par \mathfrak{E} , nous désignons l'ensemble de toutes les séries

$$\frac{a_0}{z} + \frac{a_1}{z^2} + \dots + \frac{a_n}{z^{n+1}} + \dots,$$

telles que

$$A_0^{(n)} = \alpha_0^{(n)} \quad (n=1, 2, \dots, \nu, \dots),$$

il y a dans \mathfrak{E}

- 1°. des séries partout divergentes,
- 2°. des éléments de fonctions uniformes ayant un domaine de méromorphie arbitraire,
- 3°. des éléments de fonctions ayant une seule singularité essentielle, d'affixe et d'ordre arbitraires.

Nous recherchons également, au chapitre III, dans quelles conditions une fraction continue du type (17) représente une fonction uniforme, n'ayant que des pôles (en nombre fini ou infini) et une seule singularité essentielle d'ordre donné. Voici notre résultat

Théorème V. *Soit α un nombre complexe quelconque; si*

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |l_n - \alpha|^{\frac{1}{\log n}} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |k_1^n k_2^{n-1} \dots k_{n-1}^2 k_n^1|^{\frac{1}{n^2 \log n}} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |k_n|^{\frac{1}{2 \log n}} = e^{-\frac{1}{\varrho}}$$

où $0 \leq \varrho < +\infty$,

la fraction continue (17), représente une fonction uniforme, n'admettant pour singularités que des pôles (en nombre fini ou infini)

¹¹⁾ Voir, au § 15, les formules (3,7) et (3,13).

et une seule singularité essentielle, dont l'affixe est α et l'ordre exactement égal à ϱ .

Si (1) désigne le développement en série de cette fonction, on a

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |A_0^{(n)}|^{\frac{1}{n^2 \log n}} = e^{-\frac{1}{\varrho}}.$$

L'égalité (8) n'est pas vraie, en général; le Théorème V montre cependant qu'elle est satisfaite pour une classe étendue de fonctions.

En tenant compte des formules (3,7) et (3,13), on peut énoncer le Théorème V sans l'aide des fractions continues; on obtiendra ainsi un premier exemple de proposition qui, supposant certaines propriétés de (9) et (10), permet une affirmation ayant la forme d'une égalité relative aux singularités de $f(z)$.

Les résultats du chapitre IV sont résumés par le

Théorème VI. *Considérons la fonction*

$$(18) \quad f(z) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\varphi(x)}{z-x} dx$$

Nous supposons la fonction réelle $\varphi(x)$:

- 1°. *continue dans l'intervalle (α, β) ;*
- 2°. *pouvant changer de signe, un nombre fini de fois, dans cet intervalle;*
- 3°. *pouvant s'annuler sur un nombre fini d'intervalles et, en outre, en un nombre fini de points isolés.*

De l'intervalle fermé (α, β) , supprimons les points intérieurs aux intervalles sur lesquels $\varphi(x) = 0$; désignons par E l'ensemble fermé ainsi obtenu et par τ son diamètre transfini.

Dans ces conditions on a

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |A_0^{(n)}|^{\frac{1}{n^2}} = \tau.$$

Ce théorème fournit l'exemple d'une classe étendue de fonctions satisfaisant à l'égalité (6).

Dans le cinquième et dernier chapitre de ce travail, nous étudions les déterminants récurrents des fonctions représentables sous forme de séries de fractions simples:

$$(19) \quad f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{r_{\nu}}{z-s_{\nu}}.$$

Cette étude nous conduira au

Théorème VII. Soit E , un ensemble fermé et borné de points du plan de la variable complexe. Soit τ son diamètre transfini, CE son complémentaire, que nous supposerons connexe.

Soit θ un nombre réel, tel que

$$0 \leq \theta \leq 1.$$

Sous ces hypothèses, il existe une série (1), représentant une fonction uniforme, holomorphe dans CE , admettant exactement CE pour domaine d'existence et telle que

$$(20) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |A_0^{(n)}|^{\frac{1}{n^2}} = \theta\tau.$$

L'inégalité (5) est donc, dans un sens qui ressort clairement de notre énoncé, la „meilleure possible”. On peut obtenir un résultat analogue, relatif à l'inégalité (16); pour plus de simplicité, nous nous contenterons de prouver par des *exemples* de caractère général, que, quels que soient les ordres $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_s$ apparaissant dans l'énoncé du Théorème III, l'inégalité (16) ne peut être améliorée:

Exemples relatifs au Théorème III. Soit $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ une série convergente, à termes tous positifs; posons

$$(21) \quad f(z; \varrho) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{z - n^{\frac{1}{\varrho}}} \quad (\varrho > 0),$$

$$(22) \quad f(z; 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{z - n^{-n}}.$$

Soient $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_s$, s nombres non négatifs, et soit (1) le développement de la fonction

$$(23) \quad \sum_{j=1}^s f(z - 2j; \varrho_j).$$

Cette fonction ne possède que des pôles et les s singularités essentielles d'affixes $2, 4, \dots, 2s$ et d'ordres respectivement égaux à $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_s$.

Pour $c_n = \frac{1}{2^n}$ ($n=1, 2, \dots, \nu, \dots$), on a

$$(24) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} [A_0^{(n)}]^{n^2 \log n} = e^{-\frac{1}{\varrho_1 + \varrho_2 + \dots + \varrho_s}}.$$

Pour $c_n = \frac{1}{2^{n^2}}$ ($n=1, 2, \dots, \nu, \dots$), on a

$$(25) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} [A_0^{(n)}]^{\frac{1}{n^2 \log n}} = 0.$$

3. Résumé des résultats de notre analyse. Tous les théorèmes que nous venons d'énoncer peuvent se grouper autour de la question générale suivante: *connaissant les deux suites de déterminants (9) et (10), que peut-on dire des singularités de la fonction définie par l'élément (1)?*

Voici, très brièvement formulées, les réponses que ce travail apporte:

1°. Si les termes des suites (9) et (10) sont tous différents de zéro, la connaissance *complète* de ces deux suites est équivalente à la connaissance de l'élément (1) [§ 16, Proposition 3].

2°. La connaissance de certaines propriétés-limites de la suite (9) permet des affirmations ayant la forme d'*inégalités* relatives aux singularités de $f(z)$ [Inégalité (5); Théorème III].

3°. Les propriétés-limites *correspondantes*, formées avec les termes de (10), n'ajoutent aucun nouvel élément d'information [Théorème I].

4°. Même la connaissance *complète* de (9) ne permet pas d'affirmations ayant la forme d'égalités relatives aux singularités de $f(z)$ [Théorème IV].

5°. Si l'on veut obtenir des affirmations ayant la forme d'*égalités* relatives aux singularités de $f(z)$, on doit

a) ou bien joindre à la connaissance de propriétés-limites, relativement *simples*, de (9), la connaissance de propriétés plus *complexes* de (10), en particulier celle des rapports entre (9) et (10) [Théorème V et annotation ¹¹].

b) ou bien, supposant connues des propriétés-limites simples de (9), *restreindre* suffisamment la classe des fonctions considérées [Théorème VI].

6°. Les inégalités énoncées précédemment sont, en général, les meilleures possibles [Théorème VII; Exemples relatifs au Théorème III].

CHAPITRE I

Propriétés générales des déterminants récurrents; l'invariance-limite.

4. Propriétés algébriques des déterminants récurrents.
Considérons quelques transformations simples de la série (1) et

indiquons les transformations correspondantes subies par les $A_k^{(n)}$.

Dans nos formules, les symboles $B_k^{(n)}$, $C_k^{(n)}$, $D_k^{(n)}$, ..., désigneront les déterminants obtenus en remplaçant, dans $A_k^{(n)}$, les a par des b , c , d , ...

I. Soit β un nombre complexe quelconque. Si

$$\frac{b_0}{z - \beta} + \frac{b_1}{(z - \beta)^2} + \cdots + \frac{b_n}{(z - \beta)^{n+1}} + \cdots = f(z)$$

désigne le développement de centre β , de $f(z)$, on a

$$(1,1) \quad B_0^{(n)} = A_0^{(n)}.$$

II. Si

$$\frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z^2} + \cdots + \frac{c_n}{z^{n+1}} + \cdots = f(\gamma z),$$

où γ désigne un nombre complexe, différent de zéro, on a

$$(1,2) \quad C_0^{(n)} = \gamma^{-n^2} A_0^{(n)}.$$

III. Si

$$\frac{d_0}{z} + \frac{d_1}{z^2} + \cdots + \frac{d_n}{z^{n+1}} + \cdots = \frac{1}{z - \beta - f(z)},$$

où β désigne un nombre complexe quelconque, on a

$$(1,3) \quad D_0^{(1)} = 1; \quad D_0^{(n+1)} = A_0^{(n)} \quad (n \geq 1).$$

IV. Considérons la série (13) et posons

$$\sum_{n=-(p+2)}^{+\infty} e_n z^{-n-1} = \frac{1}{g(z)};$$

on a alors,

$$(1,4) \quad E_{-(p+2)}^{(n+1)} = (-1)^n \frac{1}{a_p^{2n+1}} A_{p+2}^{(n)} \quad (n \geq 1).$$

V. Si

$$\frac{h_0}{z} + \frac{h_1}{z^2} + \cdots + \frac{h_n}{z^{n+1}} + \cdots = f(z^m).$$

où m désigne un entier, au moins égal à un, on a

$$(1,5) \quad \begin{cases} H_0^{(n)} = 0, & \text{si } n \not\equiv 0 \pmod{m}; \\ H_0^{(\nu m)} = \pm \{A_0^{(\nu)}\}^m & (\nu = 1, 2, 3, \dots). \end{cases}$$

Les propriétés I, II et V ont été démontrées par M. Pólya ¹²⁾; III est une conséquence immédiate de la théorie des fractions continues du type (17); il en est d'ailleurs de même de I. Nous démontrerons I et III au § 17. Dans l'annotation ¹⁸⁾, nous donnerons une seconde démonstration de I. Voici maintenant, comment on peut déduire IV de III:

$$\begin{aligned}
 & a_p z + a_{p+1} + \frac{a_{p+2}}{z} + \frac{a_{p+3}}{z^2} + \dots = g(z) z^{p+2}, \\
 & z + \frac{a_{p+1}}{a_p} - \left[\frac{-\frac{a_{p+2}}{a_p}}{z} + \frac{-\frac{a_{p+3}}{a_p}}{z^2} + \dots \right] = \frac{g(z) z^{p+2}}{a_p}, \\
 (1,6) \quad & \frac{j_0}{z} + \frac{j_1}{z^2} + \dots + \frac{j_n}{z^{n+1}} + \dots = \frac{a_p}{g(z) z^{p+2}}.
 \end{aligned}$$

En vertu de III,

$$(1,7) \quad j_0 = J_0^{(1)} = 1; \quad J_0^{(n+1)} = \frac{(-1)^n}{a_p^n} A_{p+2}^{(n)} \quad (n \geq 1),$$

et de (1,6)

$$\frac{j_0}{a_p} z^{p+1} + \frac{j_1}{a_p} z^{p+2} + \dots = \sum_{n=-(p+2)}^{+\infty} e_n z^{-n-1} = \frac{1}{g(z)}.$$

Finalement.

$$(1,8) \quad J_0^{(n+1)} = a_p^{n+1} E_{-(p+2)}^{(n+1)};$$

(1,4) s'obtient par combinaison de (1,7) et (1,8).

5. Démonstration du Théorème I. Nous établirons tout d'abord une inégalité que nous formulons sous forme de

Lemme 1. Soit (13) une série convergente pour $|z| > R$.
Posons

$$\begin{aligned}
 0 &= a_{p-1} = a_{p-2} = \dots = a_{p-p} = \dots; \\
 M &= \max_{|z|=R+\varepsilon} |g(z)| \quad (\varepsilon > 0).
 \end{aligned}$$

On a alors

$$(1,9) \quad |A_k^{(n)}| \leq n! M^n (R+\varepsilon)^{kn} (R+\varepsilon)^{n^2},$$

quel que soit l'entier k (positif, négatif ou nul).

Par $(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$ nous désignons une permutation quelconque

¹²⁾ G. PÓLYA, Beitrag zur Verallgemeinerung des Verzerrungssatzes auf mehrfach zusammenhängende Gebiete [Sitzungsberichte Akad. Berlin 1929, 55—62].

des nombres $(1, 2, \dots, n)$; le terme général du développement de $A_k^{(n)}$ est alors

$$\pm a_{k-2+1+\nu_1} a_{k-2+2+\nu_2} \cdots a_{k-2+n+\nu_n}.$$

De l'inégalité

$$|a_n| \leq M(R+\varepsilon)^{n+1},$$

il résulte que le module de ce terme général est au plus égal à

$$M^n(R+\varepsilon)^{kn}(R+\varepsilon)^{n^2}.$$

c.q.f.d.

Le Théorème I est obtenu par combinaison des deux propriétés suivantes des τ_k :

(\mathcal{A}) *Il existe un nombre P , indépendant de k , tel que*

$$\tau_k \leq P \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$$(\mathcal{B}) \quad \tau_k^2 \leq \tau_{k-1} \tau_{k+1} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

La chaîne d'inégalités (\mathcal{B}) permet d'affirmer que les τ_k sont: ou tous nuls ou tous différents de zéro. Dans le premier cas, tout se trouve démontré. Dans le second cas, mettons (\mathcal{B}) sous la forme

$$(1,10) \quad \log \tau_k \leq \frac{\log \tau_{k-1} + \log \tau_{k+1}}{2}.$$

Considérons (dans le plan de la variable complexe) la ligne polygonale de sommets $k + i \log \tau_k$. La propriété (\mathcal{A}) exprime que cette ligne est bornée supérieurement. De (1,10), il résulte qu'elle est convexe, et que sa convexité est tournée vers le bas. Les deux propriétés ne sont compatibles que si la ligne polygonale se réduit à une droite, parallèle à l'axe réel. Tous les τ_k sont alors égaux.

Démonstration de (\mathcal{A}). Mettons l'inégalité (1,9) sous la forme

$$|A_k^{(n)}| \frac{1}{\Phi^{(n)}} \leq e^{\frac{n^2}{\Phi^{(n)}} \left[\frac{\log n + \log M + k \log (R+\varepsilon)}{n} \right]} e^{\frac{n^2}{\Phi^{(n)}} \log (R+\varepsilon)},$$

gardons k fixe, tenons compte de l'hypothèse (11), et passons à la limite $n \rightarrow +\infty$. Il vient:

$$\tau_k \leq P = \max [1, R+\varepsilon].$$

Démonstration de (B). Posons

$$\tau_k + \delta = T_k > 0 \quad (\delta > 0).$$

La formule connue

$$\{A_k^{(n)}\}^2 = A_{k-1}^{(n)} A_{k+1}^{(n)} - A_{k-1}^{(n+1)} A_{k+1}^{(n-1)}$$

fournit, pour n suffisamment grand, l'inégalité

$$(1,11) \quad |A_k^{(n)}|^2 < T_{k-1}^{\Phi(n)} T_{k+1}^{\Phi(n)} + T_{k-1}^{\Phi(n+1)} T_{k+1}^{\Phi(n-1)} \\ = T_{k-1}^{\Phi(n)} T_{k+1}^{\Phi(n)} \left[1 + \left\{ T_{k-1}^{\frac{\Phi(n+1)}{\Phi(n)}-1} T_{k+1}^{\frac{\Phi(n-1)}{\Phi(n)}-1} \right\}^{\Phi(n)} \right].$$

Nous poserons encore

$$(1,12) \quad 1 + \varepsilon_n = T_{k-1}^{\frac{\Phi(n+1)}{\Phi(n)}-1} T_{k+1}^{\frac{\Phi(n-1)}{\Phi(n)}-1}.$$

De cette définition de ε_n et de l'hypothèse (12), on déduit

$$(1,13) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0.$$

Reprenons (1,11) et (1,12); il vient

$$|A_k^{(n)}|^2 < T_{k-1}^{\Phi(n)} T_{k+1}^{\Phi(n)} [1 + (1 + |\varepsilon_n|)^{\Phi(n)}] \leq 2 T_{k-1}^{\Phi(n)} T_{k+1}^{\Phi(n)} (1 + |\varepsilon_n|)^{\Phi(n)}, \\ |A_k^{(n)}|^{\frac{2}{\Phi(n)}} \leq 2^{\frac{1}{\Phi(n)}} T_{k-1} T_{k+1} (1 + |\varepsilon_n|).$$

Gardons δ fixe et passons à la limite $n \rightarrow +\infty$. En tenant compte de (11) et (1,13),

$$\tau_k^2 \leq T_{k-1} T_{k+1}.$$

Nous obtiendrons (B) par le passage à la limite $\delta \rightarrow 0$.

6. Les corollaires du Théorème I; démonstration du Théorème II. Posons

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |A_k^{(n)}|^{\frac{1}{\Phi(n)}} = A_{\Phi}(k)$$

nous venons de voir que $A_{\Phi}(k)$ est indépendant de k . Nous allons maintenant effectuer certaines opérations sur la série (13); ces opérations transformeront (13) en une série

$$\sum_{n=q}^{+\infty} u_n z^{-n-1} \quad (q \text{ entier quelconque}).$$

Si ces opérations sont telles que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |U_0^{(n)}|^{\frac{1}{\Phi^{(n)}}} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |A_0^{(n)}|^{\frac{1}{\Phi^{(n)}}},$$

nous dirons simplement: qu'elles n'altèrent pas Λ_{Φ} .

On n'altère pas Λ_{Φ}

1°. *En ajoutant à (13) une expression de la forme*

$$\frac{v_0}{z} + \frac{v_1}{z^2} + \dots + \frac{v_{m-1}}{z^m}.$$

En effet, cette opération ne laisse aucune trace sur $A_m^{(n)}$.

2°. *En ajoutant à (13) une expression de la forme*

$$(1,14) \quad \frac{v_0}{z-\beta} + \frac{v_1}{(z-\beta)^2} + \dots + \frac{v_{m-1}}{(z-\beta)^m}.$$

Par une translation, nous amènerons (13) à la forme

$$(1,15) \quad \sum_{n=p}^{+\infty} b_n (z-\beta)^{-n-1}.$$

La présence de puissances non négatives de z et $z - \beta$, dans (13) et (1,15), n'altère visiblement pas les déterminants $A_0^{(n)}$ et $B_0^{(n)}$; la relation (1,1) subsiste donc également pour des séries du type (13), où $p < 0$: dans tous les cas, Λ_{Φ} n'est pas altéré par une translation. En vertu de 1°, on n'altère pas Λ_{Φ} en ajoutant (1,14) à (1,15). Grâce à (1,1), on reviendra à une série procédant suivant les puissances de z .

3°. *En ajoutant à (13) une fonction rationnelle quelconque.*

Toute fonction rationnelle peut se mettre sous la forme

$$P_0(z) + P_1\left(\frac{1}{z-\beta}\right) + P_2\left(\frac{1}{z-\beta_2}\right) + \dots + P_s\left(\frac{1}{z-\beta_s}\right),$$

où $P_0(t)$, $P_1(t)$, ..., $P_s(t)$ sont des polynomes en t . Il suffira d'appliquer 2°, s fois.

4°. *En multipliant (13) par une constante $c \neq 0$.*

Cette multiplication fait passer de $A_0^{(n)}$ à $c^n A_0^{(n)}$. Il suffit de tenir compte de l'hypothèse (11).

5°. *En multipliant (13) par z .*

Cette opération fait passer de $A_0^{(n)}$ à $A_1^{(n)}$; elle ne saurait donc altérer Λ_{Φ} .

6°. *En multipliant (13) par $(z-\beta)$.*

Nous franchissons, entre 5° et 6°, le même pas qu'entre 1° et 2°.

7°. *En multipliant (13) par un polynome quelconque (non identiquement nul).*

Il suffit d'appliquer 4° et 6°, un certain nombre de fois.

8°. *En divisant (13) par un polynome quelconque $P(z)$ (non identiquement nul).*

On applique 7°, à $\frac{g(z)}{P(z)}$.

9°. *En multipliant (13) par une fonction rationnelle quelconque (non identiquement nulle).*

On combine 7° et 8°.

10°. *En passant de la fonction $g(z)$ à la fonction $\frac{1}{g(z)}$.*

On met (1,4) sous la forme

$$\left| E_{-(p+2)}^{(n+1)} \right| \frac{1}{\Phi^{(n+1)}} = \frac{1}{\frac{2n+1}{a_p}} \left| A_{p+2}^{(n)} \right| \frac{1}{\Phi^{(n)}} \frac{\Phi^{(n)}}{\Phi^{(n+1)}}.$$

On passe à la limite $n \rightarrow \infty$, en tenant compte, à nouveau, de (11) et (12). On applique ensuite le Théorème I. Toutes ces propositions sont résumées par le Théorème II. Si $Y(z) \equiv 0$, le Théorème II est contenu dans 3° et 9°. Dans le cas $Y(z) \not\equiv 0$,

on mettra $\frac{V+Wg}{X+Yg}$ sous la forme

$$\frac{W}{Y} + \frac{(VY - XW)Y^{-1}}{X + Yg}.$$

On tiendra compte de (14) et (15) et on appliquera 3°, 9° et 10°.

CHAPITRE II.

Sur les fonctions uniformes qui n'ont que des pôles et un nombre fini de singularités essentielles.

7. Remarques préliminaires. Soit (1) un élément de fonction analytique, convergent pour $|z| > R$. Nous supposons $f(z)$, uniforme dans tout son domaine d'existence, et uniquement pourvue des singularités suivantes:

- 1°. de pôles
- 2°. de s singularités non polaires, d'affixes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ ($s \geq 1$).

Ces singularités non polaires sont donc, soit des *points d'accumulation de pôles*, soit des *singularités essentielles isolées*. D'un

théorème de Weierstraß, on déduit la possibilité de mettre $f(z)$ sous la forme

$$f(z) = f_1\left(\frac{1}{z-\alpha_1}\right) f_2\left(\frac{1}{z-\alpha_2}\right) \cdots f_s\left(\frac{1}{z-\alpha_s}\right),$$

où $f_1(t), f_2(t), \dots, f_s(t)$ désignent des fonctions méromorphes. Nous allons étudier les propriétés asymptotiques des $A_0^{(n)}$ dans le cas où les fonctions $f_1(t), f_2(t), \dots, f_s(t)$ sont d'ordres finis, ¹³⁾ égaux respectivement à $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_s$. Remarquons que les nombres ϱ ne dépendent pas de la décomposition particulière de $f(z)$, en produit: dans toute autre décomposition

$$f(z) = g_1\left(\frac{1}{z-\alpha_1}\right) g_2\left(\frac{1}{z-\alpha_2}\right) \cdots g_s\left(\frac{1}{z-\alpha_s}\right),$$

l'ordre de $g_j(t)$ sera égal à ϱ_j . Nous dirons, avec M. Maillet ¹⁴⁾, que la fonction *quasi méromorphe* $f(z)$ est d'ordres $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_s$.

Indiquons deux propriétés des fonctions quasi méromorphes dont nous ferons usage:

1°. Soient $V(z), W(z), X(z)$ et $Y(z)$, quatre polynomes tels que $VY - XW \neq 0$. Les fonctions $f(z)$ et $g(z) = \frac{V + Wf}{X + Yf}$ ont alors les mêmes singularités essentielles, pourvues des mêmes ordres ¹⁵⁾.

2°. Du théorème de M. Picard, on déduit immédiatement la possibilité de trouver un nombre β , tel que toutes les singularités essentielles de la fonction quasi méromorphe $\frac{1}{f(z) - \beta}$ soient des points d'accumulation de pôles. On peut même affirmer qu'il y a au plus $2s$ valeurs de β pour lesquelles ce fait ne se produit pas ¹⁶⁾.

En ce qui concerne les propriétés-limites des $A_0^{(n)}$, il résulte du Théorème II, que la fonction $\frac{1}{f(z) - \beta}$ est équivalente à la fonction $f(z)$. Nous pouvons donc, sans restreindre la généralité,

¹³⁾ Pour la définition de l'ordre d'une fonction méromorphe, voir: E. BOREL, Leçons sur les fonctions méromorphes [Paris, 1903], 61 et 62; R. NEVANLINNA, Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes [Paris, 1929], 30.

¹⁴⁾ E. MAILLET, Sur les fonctions entières et quasi entières [Journal de math., (5) 8 (1902), 329—386].

¹⁵⁾ On démontrerait cette proposition en suivant une méthode analogue à celle donnée à la page 62 du livre cité de E. Borel.

¹⁶⁾ Il serait intéressant de savoir si, pour $s > 1$, il peut effectivement y avoir $2s$ „valeurs exceptionnelles”.

supposer que les s singularités essentielles de $f(z)$ sont toutes des points d'accumulation de pôles.

Soit \mathfrak{C}_j un cercle de centre α_j et de rayon A . Nous prendrons A suffisamment petit pour que les cercles $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \dots, \mathfrak{C}_s$ soient extérieurs les uns aux autres. Désignons les pôles de $f(z)$, situés à l'intérieur de \mathfrak{C}_j , par

$$z_{j1}, z_{j2}, \dots, z_{j\lambda}, \dots;$$

les pôles multiples sont répétés autant de fois que l'indique leur degré de multiplicité.

Posons

$$z_{j\lambda} = \alpha_j + \frac{1}{t_{j\lambda}};$$

nous supposons la suite des $z_{j\lambda}$ ordonnée de manière que

$$|t_{j1}| \leq |t_{j2}| \leq \dots \leq |t_{j\lambda}| \leq \dots.$$

Soit $\Pi_j(t)$, le produit canonique admettant les zéros

$$t_{j1}, t_{j2}, \dots, t_{j\lambda}, \dots.$$

Nous pouvons mettre $f(z)$ sous la forme

$$f(z) = R(z) \cdot \frac{h_1\left(\frac{1}{z-\alpha_1}\right)}{\Pi_1\left(\frac{1}{z-\alpha_1}\right)} \cdot \frac{h_2\left(\frac{1}{z-\alpha_2}\right)}{\Pi_2\left(\frac{1}{z-\alpha_2}\right)} \dots \frac{h_s\left(\frac{1}{z-\alpha_s}\right)}{\Pi_s\left(\frac{1}{z-\alpha_s}\right)},$$

où $R(z)$ désigne une fonction rationnelle; $h_1(t), h_2(t), \dots, h_s(t)$ désignent des fonctions entières d'ordres respectivement égaux à $\varrho'_1, \varrho'_2, \dots, \varrho'_s$; $\Pi_1(t), \Pi_2(t), \dots, \Pi_s(t)$ désignent des produits canoniques d'ordres respectivement égaux à $\varrho''_1, \varrho''_2, \dots, \varrho''_s$. Par définition de l'ordre,

$$\varrho_j = \max \{ \varrho'_j, \varrho''_j \} \quad (j=1, 2, \dots, s).$$

Nous allons maintenant démontrer le Théorème III. En vertu des remarques précédentes et du Théorème II, il nous suffira d'établir l'inégalité (16) pour une fonction de la forme

$$(2,1) \quad f(z) = \frac{h_1\left(\frac{1}{z-\alpha_1}\right)}{\Pi_1\left(\frac{1}{z-\alpha_1}\right)} \cdot \frac{h_2\left(\frac{1}{z-\alpha_2}\right)}{\Pi_2\left(\frac{1}{z-\alpha_2}\right)} \dots \frac{h_s\left(\frac{1}{z-\alpha_s}\right)}{\Pi_s\left(\frac{1}{z-\alpha_s}\right)},$$

où chaque produit canonique est composé d'une *infinité* de facteurs. Nous obtiendrons le résultat annoncé par l'estimation d'une certaine intégrale multiple représentant $A_0^{(n)}$.

8. Expression de $A_0^{(n)}$ par une intégrale multiple; structure de la démonstration. Soit Γ un contour d'intégration formé par le système des s circonférences de $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \dots, \mathfrak{C}_s$. Considérons le déterminant

$$A_0^{(n)} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \left| \int_{\Gamma} f(\zeta) \zeta^{l-1+k-1} d\zeta \right|_{l, k = 1, 2, \dots, n};$$

en ajoutant, à chaque ligne de ce déterminant, une combinaison linéaire des lignes précédentes, on pourra le mettre sous la forme

$$A_0^{(n)} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \left| \int_{\Gamma} f(\zeta) P_l(\zeta) d\zeta, \int_{\Gamma} f(\zeta) P_l(\zeta) \zeta d\zeta, \dots, \int_{\Gamma} f(\zeta) P_l(\zeta) \zeta^{n-1} d\zeta \right|_l$$

où

$$P_1(\zeta) \equiv 1; P_l(\zeta) \equiv \zeta^{l-1} + \dots \text{ pour } l \geq 2,$$

les $l - 1$ racines de $P_l(\zeta)$ étant absolument quelconques. En modifiant la notation de la variable d'intégration et des contours d'intégration:

$$A_0^{(n)} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \left| \int_{\Gamma_l} f(\zeta_l) P_l(\zeta_l) d\zeta_l, \int_{\Gamma_l} f(\zeta_l) P_l(\zeta_l) \zeta_l d\zeta_l, \dots, \int_{\Gamma_l} f(\zeta_l) P_l(\zeta_l) \zeta_l^{n-1} d\zeta_l \right|_l.$$

Nous supposerons Γ_l formé par les circonférences de s cercles $\mathfrak{C}_1(l), \mathfrak{C}_2(l), \dots, \mathfrak{C}_s(l)$. Ces cercles seront respectivement intérieurs à $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \dots, \mathfrak{C}_s$, et tels que $f(\zeta) P_l(\zeta)$ soit holomorphe en tout point $\zeta \neq \infty$, situé dans le domaine extérieur aux $\mathfrak{C}(l)$ ou sur la circonférence d'un de ceux-ci; $l = 1, 2, \dots, \lambda, \dots$. Sous ces hypothèses, le terme général du développement de $(2\pi i)^n A_0^{(n)}$ sera:

$$\begin{aligned} & \pm \int_{\Gamma_1} f(\zeta_1) P_1(\zeta_1) \zeta_1^{k_1} d\zeta_1 \cdot \int_{\Gamma_2} f(\zeta_2) P_2(\zeta_2) \zeta_2^{k_2} d\zeta_2 \cdot \dots \cdot \int_{\Gamma_n} f(\zeta_n) P_n(\zeta_n) \zeta_n^{k_n} d\zeta_n \\ = & \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \dots \int_{\Gamma_n} f(\zeta_1) P_1(\zeta_1) \cdot f(\zeta_2) P_2(\zeta_2) \cdot \dots \cdot f(\zeta_n) P_n(\zeta_n) \{ \pm \zeta_1^{k_1} \zeta_2^{k_2} \dots \zeta_n^{k_n} \} d\zeta_1 d\zeta_2 \cdot \dots \cdot d\zeta_n. \end{aligned}$$

En sommant tous ces termes, nous obtiendrons la formule

$$(2,2) \quad A_0^{(n)} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \dots \int_{\Gamma_n} f(\zeta_1) P_1(\zeta_1) \cdot f(\zeta_2) P_2(\zeta_2) \cdot \dots \cdot f(\zeta_n) P_n(\zeta_n) V(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) d\zeta_1 d\zeta_2 \cdot \dots \cdot d\zeta_n$$

On a posé

$$(2,3) \quad V(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) = \begin{vmatrix} 1 & \zeta_1 & \zeta_1^2 & \dots & \zeta_1^{n-1} \\ 1 & \zeta_2 & \zeta_2^2 & \dots & \zeta_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \zeta_n & \zeta_n^2 & \dots & \zeta_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Voici maintenant la marche générale de notre démonstration:

Nous concentrerons, dans un lemme (Lemme 2), tout ce dont nous aurons besoin de la notion „d'ordre d'une fonction méromorphe". Puis, nous rangerons les pôles de $f(z)$ dans une suite unique; l'influence des différentes singularités essentielles sera dosée par la fréquence d'apparition des pôles voisins d'un même point-limite (Lemme 3). Nous choisirons les contours d'intégration (Lemme 4) et nous estimerons sur ces contours: la fonction $f(z)$, multipliée par une fonction rationnelle convenable (Lemme 5), et le déterminant de Vandermonde (Lemmes 6 et 7).

9. Sur l'ordre d'une fonction méromorphe. Désignons par $E(u, p)$ le facteur primaire de genre p et considérons le produit canonique

$$(2,4) \quad \Pi(t) = \prod_{\lambda=1}^{\infty} E\left(\frac{t}{t_\lambda}, p\right),$$

où nous supposons

$$0 < |t_1| \leq |t_2| \leq \dots \leq |t_\lambda| \leq \dots.$$

Lemme 2. Soient

$h(t)$ une fonction entière d'ordre ϱ' ;

$\Pi(t)$ le produit canonique (2, 4), d'ordre ϱ'' ;

$\varphi(0), \varphi(1), \dots, \varphi(l), \dots$ une suite de nombres entiers, non bornés, tels que:

$$(2,5) \quad 0 \leq \varphi(0) \leq \varphi(1) \leq \dots \leq \varphi(l) \leq \dots, \\ \varphi(l-1) < l,$$

$$(2,6) \quad |t_{\varphi(l-1)}| > 4r_l = 4 \frac{l^\sigma}{A} \text{ dès que } l \geq \omega \text{ et } \varphi(l-1) \geq 1,$$

où $\sigma = \varrho + \varepsilon$, $\varrho = \max(\varrho', \varrho'')$; A et ε désignent des nombres positifs et ω une certaine borne finie.

Posons encore

$$\mathfrak{P}_l(t) \equiv \left(1 - \frac{t}{t_1}\right) \left(1 - \frac{t}{t_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{t}{t_{\varphi(l-1)}}\right) \text{ pour } l \geq \omega \text{ et } \varphi(l-1) \geq 1.$$

Sous ces hypothèses, il existe un nombre positif B , tel que

$$\max_{|t| \leq r_l} \left| \frac{h(t)}{H(t)} \mathfrak{P}_l(t) \right| \leq e^{Bl} \text{ dès que } l \geq \omega \text{ et } \varphi(l-1) \geq 1.$$

Nous établirons ce lemme en nous appuyant sur les estimations classiques de la théorie des fonctions entières; on pourrait également le déduire de la théorie des fonctions méromorphes de M. R. Nevanlinna¹⁷). Nous supposerons constamment $l \geq \omega$ et $\varphi(l-1) \geq 1$.

L'holomorphie de $\frac{h(t)}{H(t)} \mathfrak{P}_l(t)$, pour $|t| \leq r_l$, résulte de l'hypothèse (2,6). Faisons $|t| = r_l$ dans

$$(2,7) \quad \log \left| \frac{h(t)}{H(t)} \mathfrak{P}_l(t) \right| \leq \log |h(t)| + \sum_{\lambda=1}^{\varphi(l-1)} \left\{ \left| \frac{t}{t_\lambda} \right| + \frac{1}{2} \left| \frac{t}{t_\lambda} \right|^2 + \cdots + \frac{1}{p} \left| \frac{t}{t_\lambda} \right|^p \right\} \\ + \sum_{\lambda=\varphi(l-1)+1}^{+\infty} \left| \log \left| E \left(\frac{t}{t_\lambda}, p \right) \right| \right|.$$

Dans la suite de la démonstration, les majuscules C, D, G, H, I, J, K désigneront des nombres positifs, indépendants de l . Estimons le second terme du second membre de (2,7)

$$\sum_{\lambda=1}^{\varphi(l-1)} \{ \} = \sum_{|t_\lambda| \leq 4r_l} \{ \} + \sum_{|t_\lambda| > 4r_l}^{\lambda \leq \varphi(l-1)} \{ \}, \\ \sum_{|t_\lambda| \leq 4r_l} \{ \} \leq C \sum_{|t_\lambda| \leq 4r_l} \left| \frac{t}{t_\lambda} \right|^p = C r_l^p \sum_{|t_\lambda| \leq 4r_l} \frac{|t_\lambda|^{\sigma-p}}{|t_\lambda|^\sigma}.$$

De $\sigma - p > 0$, de (2,6) et de la convergence de $\sum_{\lambda=1}^{+\infty} \frac{1}{|t_\lambda|^\sigma}$, on tire

$$(2,8) \quad \sum_{|t_\lambda| \leq 4r_l} \{ \} \leq C r_l^p (4r_l)^{\sigma-p} \sum_{\lambda=1}^{+\infty} \frac{1}{|t_\lambda|^\sigma} = D l.$$

De l'hypothèse (2,5), il résulte

$$(2,9) \quad \sum_{|t_\lambda| > 4r_l}^{\lambda \leq \varphi(l-1)} \{ \} \leq G l.$$

On sait que

$$\left| \log |E(u, p)| \right| \leq 2 |u|^{p+1} \text{ dès que } |u| < \frac{1}{4}.$$

¹⁷) Voir¹³) le livre cité de R. Nevanlinna.

On en déduit

$$(2,10) \quad \sum_{\lambda=\varphi(l-1)+1}^{+\infty} \left| \log \left| E\left(\frac{t}{t_\lambda}, p\right) \right| \right| \leq \sum_{|t_\lambda| > 4r_t} \left| \log \left| E\left(\frac{t}{t_\lambda}, p\right) \right| \right| \leq 2 \sum_{|t_\lambda| > 4r_t} \left| \frac{t}{t_\lambda} \right|^{p+1}.$$

ϱ'' est l'exposant de convergence de la suite

$$t_1, t_2, \dots, t_\lambda, \dots$$

Si $\varrho'' < p + 1$, on choisira un nombre positif δ , inférieur à ε et tel que $\varrho'' + \delta < p + 1$.

De (2,6), on tire alors

$$(2,11) \quad 2 \sum_{|t_\lambda| > 4r_t} \left| \frac{t}{t_\lambda} \right|^{p+1} = 2r_t^{p+1} \sum_{|t_\lambda| > 4r_t} \frac{1}{|t_\lambda|^{p+1}} \frac{|t_\lambda|^{\varrho''+\delta}}{|t_\lambda|^{\varrho''+\delta}} \\ \leq 2r_t^{p+1} (4r_t)^{\varrho''+\delta-p-1} \sum_{\lambda=1}^{+\infty} \frac{1}{|t_\lambda|^{\varrho''+\delta}} = Hr_t^{\varrho''+\delta} = Il^{\frac{\varrho''+\delta}{\varrho+\varepsilon}} \leq Il.$$

Si $\varrho'' = p + 1$, on sait que $\sum \frac{1}{|t_\lambda|^{\varrho''}}$ converge, d'où

$$(2,12) \quad 2 \sum_{|t_\lambda| > 4r_t} \left| \frac{t}{t_\lambda} \right|^{p+1} \leq 2r_t^{\varrho''} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{|t_\lambda|^{\varrho''}} = J l^{\frac{\varrho''}{\varrho+\varepsilon}} \leq Jl.$$

Enfin, il existe une constante K , telle que l'on ait constamment

$$(2,13) \quad \log |h(t)| < Kl \quad \text{pour} \quad |t| = r_t.$$

Nous obtiendrons le résultat annoncé, par combinaison des relations (2,7), (2,13), (2,8), (2,9), (2,10) et (2,11) ou (2,12).

10. Distribution des pôles de $f(z)$, dans une suite unique.

Considérons le tableau

$$(Z) \quad \begin{cases} z_{11}, z_{12}, \dots, z_{1\lambda}, \dots & (z_1) \\ z_{21}, z_{22}, \dots, z_{2\lambda}, \dots & (z_2) \\ \dots & \dots \\ z_{s1}, z_{s2}, \dots, z_{s\lambda}, \dots & (z_s). \end{cases}$$

Ordonnons les éléments de (Z) dans une suite unique

$$z_1^*, z_2^*, \dots, z_\lambda^*, \dots \quad (z^*)$$

en imposant les deux conditions suivantes

I. La suite (z^*) est formée des mêmes éléments que le tableau (Z) ; chaque élément de (Z) apparaît une, et une seule, fois dans (z^*) .

II. L'ordre des termes de chacune des suites du tableau (Z) est conservé dans la suite (z^*) . En d'autres termes, si

$$z_{jk} = z_k^*, \quad z_{jl} = z_l^* \quad \text{et} \quad k < l,$$

on a $k^* < l^*$.

Désignons par $\varphi_j(l)$, le nombre d'éléments de (z_j) apparaissant parmi les l premiers éléments de (z^*) . Il résulte de nos définitions

$$\varphi_1(l) + \varphi_2(l) + \dots + \varphi_s(l) = l.$$

Posons

$$\sigma_j = \varrho_j + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \quad (j=1, 2, \dots, s).$$

Nous admettrons sans démonstration le

Lemme 3. *On peut choisir la suite (z^*) de manière que*

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\varphi_j(l)}{l} = \frac{\sigma_j}{\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_s} \quad (j=1, 2, \dots, s).$$

11. Choix des contours d'intégration; étude de $f(z)$ sur ces contours. Nous définirons au préalable quelques fonctions, importantes dans la suite de notre démonstration: les polynômes

$$(2,14) \quad P_1(z) \equiv 1; \quad P_l(z) \equiv (z - z_1^*)(z - z_2^*) \dots (z - z_{l-1}^*) \quad \text{pour } l \geq 2;$$

$$(2,15) \quad Q_1(z) \equiv 1; \quad Q_l(z) \equiv (z - \alpha_1)^{\varphi_1(l-1)} (z - \alpha_2)^{\varphi_2(l-1)} \dots (z - \alpha_s)^{\varphi_s(l-1)} \\ \text{pour } l \geq 2;$$

$$(2,16) \quad \mathfrak{P}_{jl}(t) \equiv 1 \quad \text{pour } \varphi_j(l-1) = 0;$$

$$\mathfrak{P}_{jl}(t) \equiv \left(1 - \frac{t}{t_{j1}}\right) \left(1 - \frac{t}{t_{j2}}\right) \dots \left(1 - \frac{t}{t_{j, \varphi_j(l-1)}}\right) \quad \text{pour } \varphi_j(l-1) \geq 1 \\ (j=1, 2, \dots, s);$$

et les fonction rationnelles

$$R_l(z) = \frac{P_l(z)}{Q_l(z)}, \quad l \geq 1.$$

On a

$$R_l(z) = \prod_{j=1}^s \mathfrak{P}_{jl} \left(\frac{1}{z - \alpha_j} \right),$$

et en vertu de (2,1)

$$(2,17) \quad f(z)R_l(z) = \prod_{j=1}^s \frac{h_j \left(\frac{1}{z - \alpha_j} \right)}{\prod_j \left(\frac{1}{z - \alpha_j} \right)} \mathfrak{P}_{jl} \left(\frac{1}{z - \alpha_j} \right).$$

Les s séries

$$\sum_{\lambda=1}^{+\infty} \frac{1}{|t_{j\lambda}|^{\sigma_j}} \quad (j=1, 2, \dots, s)$$

sont convergentes, à termes positifs et décroissants. On sait que,

dans ces conditions,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \left| \frac{1}{t_{j\lambda}} \right|^{\sigma_j} = 0 \quad (j=1, 2, \dots, s).$$

Posons

$$\frac{1}{2} \min \left\{ \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_s}, \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_s}, \dots, \frac{\sigma_s}{\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_s} \right\} = \gamma > 0.$$

Pour des l suffisamment grands,

$$1 \leq \gamma l < \varphi_j(l-1),$$

$$\varphi_j(l-1) \left| \frac{1}{t_{j, \varphi_j(l-1)}} \right|^{\sigma_j} \leq \gamma \frac{A^{\sigma_j}}{4^{\sigma_j}} \quad (j=1, 2, \dots, s).$$

Il existe donc un nombre \varkappa , positif et entier, tel que

$$(2,18) \quad \varphi_j(l-1) \geq 1 \quad \text{et} \quad |t_{j, \varphi_j(l-1)}| > 4 \frac{1}{l^{\sigma_j}} \quad \text{dès que} \quad l \geq \varkappa$$

$$(j=1, 2, \dots, s).$$

Soient

$$(2,19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{C}_1^*(l), \mathfrak{C}_2^*(l), \dots, \mathfrak{C}_s^*(l), \\ \text{les cercles dont les centres sont respectivement} \\ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \\ \text{et les rayons} \\ \frac{A}{l^{\sigma_1}}, \frac{A}{l^{\sigma_2}}, \dots, \frac{A}{l^{\sigma_s}}; \end{array} \right.$$

et soit Γ_l^* , le système des s circonférences de $\mathfrak{C}_1^*(l), \mathfrak{C}_2^*(l), \dots, \mathfrak{C}_s^*(l)$.

Choisissons les contours d'intégration de (2,2); nous prendrons

$$(2,20) \quad \Gamma_l = \Gamma_l^* \quad \text{pour} \quad l \geq \varkappa; \quad \Gamma_1 = \Gamma_2 = \dots = \Gamma_{\varkappa-1} = \Gamma.$$

Ce choix est possible en vertu du

Lemme 4. *Quel que soit l'entier l , la fonction $f(z)R_l(z)$ est holomorphe dans le domaine non borné, limité par la frontière Γ_l , ainsi que sur cette frontière.*

Pour le voir, il suffit de confronter les définitions (2,16), (2,17) et (2,20) et les inégalités (2,18).

Passons maintenant à l'estimation de $f(z)R_l(z)$ sur Γ_l . De (2,17), nous tirons, pour $l \geq \varkappa$

$$\begin{aligned} \log |f(z)R_l(z)| &= \sum_{j=1}^s \log \left| \frac{h_j\left(\frac{1}{z-\alpha_j}\right)}{\Pi_j\left(\frac{1}{z-\alpha_j}\right)} \mathfrak{P}_{jl}\left(\frac{1}{z-\alpha_j}\right) \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^s \max_{|z-\alpha_j|=\frac{A}{l^{\sigma_j}}} \left\{ \log \left| \frac{h_j\left(\frac{1}{z-\alpha_j}\right)}{\Pi_j\left(\frac{1}{z-\alpha_j}\right)} \mathfrak{P}_{jl}\left(\frac{1}{z-\alpha_j}\right) \right| \right\} \\ &= \sum_{j=1}^s \max_{\substack{|t|=\frac{1}{A} \\ l^{\sigma_j}}} \left\{ \log \left| \frac{h_j(t)}{\Pi_j(t)} \mathfrak{P}_{jl}(t) \right| \right\}. \end{aligned}$$

En vertu de (2,18), nous sommes dans les conditions d'application du Lemme 2.

Il existe donc s nombres positifs B_1, B_2, \dots, B_s , tels que

$$\max_{z \text{ sur } \Gamma_l} \{\log |f(z)R_l(z)|\} \leq (B_1 + B_2 + \dots + B_s)l \text{ dès que } l \geq \kappa.$$

Lemme 5. *Il existe un nombre positif L , tel que*

$$\max_{z \text{ sur } \Gamma_l} |f(z)R_l(z)| \leq e^{Ll} \text{ dès que } l \geq \kappa.$$

12. Estimation de $V(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$ sur les contours d'intégration. Cette estimation fait l'objet du Lemme 7; nous établirons au préalable une inégalité que nous formulons sous forme de

Lemme 6. *Soient*

$$\begin{aligned} n_1, n_2, \dots, n_\mu & \quad \mu \text{ nombres entiers,} \\ \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_\mu & \quad \mu \text{ nombres positifs,} \end{aligned}$$

satisfaisant aux conditions

- I. $n_\nu \geq 2 \quad (\nu=1, 2, \dots, \mu)$;
- II. $n_1 + n_2 + \dots + n_\mu = n$.

Sous ces hypothèses

$$\frac{n_1^2 \log n_1}{\gamma_1} + \frac{n_2^2 \log n_2}{\gamma_2} + \dots + \frac{n_\mu^2 \log n_\mu}{\gamma_\mu} \geq \frac{n^2}{\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_\mu} (\log n - \log \mu).$$

La fonction réelle $y = x\sqrt{\log x}$ tourne sa convexité vers le bas, dès que $x > \sqrt{e}$. D'une propriété connue des fonctions convexes, il résulte, en vertu de I,

$$\frac{n_1 + n_2 + \dots + n_\mu}{\mu} \sqrt{\log \left(\frac{n_1 + n_2 + \dots + n_\mu}{\mu} \right)} < \frac{n_1 \sqrt{\log n_1} + n_2 \sqrt{\log n_2} + \dots + n_\mu \sqrt{\log n_\mu}}{\mu}$$

et de l'hypothèse II

$$n \sqrt{\log n - \log \mu} < \frac{n_1 \sqrt{\log n_1}}{\sqrt{\gamma_1}} \sqrt{\gamma_1} + \frac{n_2 \sqrt{\log n_2}}{\sqrt{\gamma_2}} \sqrt{\gamma_2} + \dots + \frac{n_\mu \sqrt{\log n_\mu}}{\sqrt{\gamma_\mu}} \sqrt{\gamma_\mu}.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy, il vient

$$n^2 (\log n - \log \mu) < \left[\frac{n_1^2 \log n_1}{\gamma_1} + \frac{n_2^2 \log n_2}{\gamma_2} + \dots + \frac{n_\mu^2 \log n_\mu}{\gamma_\mu} \right] (\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_\mu).$$

Lemme 7. *Considérons une répartition des variables ζ , sur les contours d'intégration Γ , telle que:*

$$\zeta_l \text{ sur } \Gamma_l \quad (l=1, 2, \dots, n),$$

quelconque par ailleurs. Pour $n \rightarrow +\infty$, on a

$$|V(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)| \leq e^{O(n^2)} e^{-\frac{n^2 \log n}{2(\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_s)}}.$$

Désignons par $\zeta_{j1}, \zeta_{j2}, \dots, \zeta_{jn_j}$ les n_j variables voisines de α_j

$$(2,21) \quad |V(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)| = \prod_{0 < \lambda < \nu \leq n} |\zeta_\lambda - \zeta_\nu| \\ \leq M^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{j=1}^s |V(\zeta_{j1}, \zeta_{j2}, \dots, \zeta_{jn_j})|$$

où $M = \max \{1, \max_{\lambda, \nu} |\zeta_\lambda - \zeta_\nu|\}$.

Mettons $\zeta_{j\lambda}$ sous la forme

$$\zeta_{j\lambda} = \alpha_j + \eta_{j\lambda};$$

nous pouvons supposer

$$|\eta_{j1}| \geq |\eta_{j2}| \geq \dots \geq |\eta_{jn_j}| \geq \dots,$$

d'où

$$(2,22) \quad |V(\zeta_{j1}, \zeta_{j2}, \dots, \zeta_{jn_j})| \leq |2\eta_{j1}|^{n_j-1} |2\eta_{j2}|^{n_j-2} \dots |2\eta_{jn_j}|^{n_j-n_j}.$$

On sait que

$$|\eta_{j\lambda}| \leq A \text{ pour } \lambda=1, 2, \dots, \kappa-1; \quad |\eta_{j\lambda}| \leq \frac{A}{\lambda^{\sigma_j}} \text{ pour } \lambda \geq \kappa.$$

L'inégalité (2,22) devient

$$|V(\zeta_{j_1}, \zeta_{j_2}, \dots, \zeta_{j_n})| \leq \frac{(2A)^{\frac{n_j(n_j-1)}{2}} (1^{n_j-1} 2^{n_j-2} \dots (\kappa-1)^{n_j-\kappa+1})^{\frac{1}{\sigma_j}}}{(1^{n_j-1} 2^{n_j-2} \dots n_j^{n_j-n_j})^{\frac{1}{\sigma_j}}}.$$

Pour $n \rightarrow +\infty$,

$$(2,23) \quad |V(\zeta_{j_1}, \zeta_{j_2}, \dots, \zeta_{j_n})| \leq e^{O(n^2)} \frac{(1^1 2^2 \dots n_j^{n_j})^{\frac{1}{\sigma_j}}}{(n_j!)^{\frac{1}{\sigma_j}}}.$$

En combinant (2,21) et (2,23), nous obtenons

$$(2,24) \quad |V(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)| \leq e^{O(n^2)} \prod_{j=1}^s (1^1 2^2 \dots n_j^{n_j})^{\frac{1}{\sigma_j}} (n_j!)^{-\frac{n_j}{\sigma_j}}.$$

Soient $n_{j_1}, n_{j_2}, \dots, n_{j_\mu}$ ceux des nombres n_j supérieurs à 1. On a manifestement

$$n_{j_1} + n_{j_2} + \dots + n_{j_\mu} > n - s.$$

Mettons (2,24) sous la forme

$$|V(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)| \leq e^{O(n^2)} \prod_{\nu=1}^{\mu} (1^1 \cdot 2^2 \dots n_{j_\nu}^{n_{j_\nu}})^{\frac{1}{\sigma_{j_\nu}}} (n_{j_\nu}!)^{-\frac{n_{j_\nu}}{\sigma_{j_\nu}}};$$

en tenant compte des inégalités

$$\frac{1}{n!} < \frac{e^n}{n^n} \text{ et } 1^1 2^2 \dots n^n < n^{1+2+\dots+n},$$

il vient

$$\log |V(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)| \leq O(n^2) + \sum_{\nu=1}^{\mu} \left\{ \frac{n_{j_\nu}(n_{j_\nu}+1)}{2\sigma_{j_\nu}} - \frac{n_{j_\nu}^2}{\sigma_{j_\nu}} \right\} \log n_{j_\nu} + \sum_{\nu=1}^{\mu} \frac{n_{j_\nu}^2}{\sigma_{j_\nu}},$$

$$\log |V(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)| \leq O(n^2) - \sum_{\nu=1}^{\mu} \frac{n_{j_\nu}^2 \log n_{j_\nu}}{2\sigma_{j_\nu}}.$$

En appliquant le Lemme 6,

$$\log |V(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)| \leq O(n^2) - \frac{(n-s)^2 [\log(n-s) - \log \mu]}{2(\sigma_{j_1} + \sigma_{j_2} + \dots + \sigma_{j_\mu})},$$

$$\log |V(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)| \leq O(n^2) - \frac{n^2 \log n}{2(\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_s)}.$$

13. Démonstration du Théorème III. Mettons la formule (2,2) sous la forme

$$(2,25) \quad A_0^{(n)} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \dots \int_{\Gamma_n} \left\{ \prod_{l=1}^n f(\zeta_l) R_l(\zeta_l) \right\} \left[\prod_{l=1}^n Q_l(\zeta_l) \right] V(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) d\zeta_1 d\zeta_2 \dots d\zeta_n.$$

Soit N la longueur du plus grand des contours d'intégration, de (2,25) on tire

$$|A_0^{(n)}| \leq \frac{N^n}{(2\pi)^n} \left\{ \prod_{l=1}^n \max_{\zeta \text{ sur } \Gamma_l} |f(\zeta) R_l(\zeta)| \right\} \left[\prod_{l=1}^n \max_{\zeta \text{ sur } \Gamma_l} |Q_l(\zeta)| \right] \max |V(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)|.$$

Appliquons le Lemme 5 à l'estimation de $\max_{\zeta \text{ sur } \Gamma_l} |f(\zeta) R_l(\zeta)|$, et le Lemme 7 à l'estimation de $\max |V(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)|$; il vient

$$(2,26) \quad |A_0^{(n)}| \leq e^{O(n^2)} e^{-\frac{n^2 \log n}{2(\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_s)}} \left[\prod_{l=\kappa}^n \max_{\zeta \text{ sur } \Gamma_l} |Q_l(\zeta)| \right].$$

Pour $l \geq \kappa$, ζ_l est sur Γ_l^* , donc sur l'un des cercles $\mathfrak{C}_1^*(l)$, $\mathfrak{C}_2^*(l)$, \dots , $\mathfrak{C}_s^*(l)$; soit $\mathfrak{C}_{m_l}^*(l)$ le cercle sur lequel le maximum de $|Q_l(\zeta)|$ est atteint. L'expression $|Q_l(\zeta)|$ contient le facteur

$$|\zeta - \alpha_{m_l}|^{\varphi_{m_l}(l-1)} = A^{\varphi_{m_l}(l-1)} l^{-\frac{\varphi_{m_l}(l-1)}{\sigma_{m_l}}}.$$

Le degré de $Q_l(\zeta)$ est égal à $(l-1)$; il existe donc un nombre positif S , indépendant de l , tel que

$$(2,27) \quad \max_{\zeta \text{ sur } \Gamma_l} |Q_l(\zeta)| \leq S^{l-1} l^{-\frac{\varphi_{m_l}(l-1)}{\sigma_{m_l}}} = S^{l-1} l^{-\theta_l \frac{l}{\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_s}}.$$

On a posé

$$\frac{\varphi_{m_l}(l-1)}{\sigma_{m_l}} = \theta_l \frac{l}{\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_s} \quad \text{pour } l \geq \kappa,$$

c'est-à-dire

$$\theta_l = \frac{\frac{\varphi_{m_l}(l-1)}{(l-1)}}{\sigma_{m_l}} \frac{l-1}{l}.$$

$$\frac{\varphi_{m_l}(l-1)}{(l-1)} = \frac{\varphi_{m_l}(l-1)}{\sigma_{m_l}} \frac{l-1}{l} \frac{l}{l-1} = \frac{\varphi_{m_l}(l-1)}{\sigma_{m_l}} \frac{l}{l-1}.$$

$$\theta_l = \frac{\frac{\varphi_{m_l}(l-1)}{\sigma_{m_l}} \frac{l}{l-1}}{(\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_s)}.$$

Sous cette dernière forme, on voit que, en vertu du Lemme 3,

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \theta = 1.$$

Posons encore

$$\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_{n-1} = 0;$$

en combinant (2,26) et (2,27), et en prenant les logarithmes

$$\log | A_0^{(n)} | \leq O(n^2) - \frac{n^2 \log n}{2(\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_s)}$$

$$- \frac{\theta_1 1 \log 1 + \theta_2 2 \log 2 + \dots + \theta_n n \log n}{1 \log 1 + 2 \log 2 + \dots + n \log n} - \frac{1 \log 1 + 2 \log 2 + \dots + n \log n}{\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_s}.$$

Divisons les deux membres par $n^2 \log n$ et passons à la limite $n \rightarrow +\infty$, il vient

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \log | A_0^{(n)} |^{\frac{1}{n^2 \log n}} \leq - \frac{1}{\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_s}.$$

Un second passage à la limite, $\varepsilon \rightarrow 0$, nous donnera l'inégalité (16).

14. Sur des simplifications notables de la démonstration dans certains cas particuliers. Notre démonstration se simplifie considérablement dans deux cas particuliers importants.

1°. *Si $f(z)$ ne possède qu'une seule singularité essentielle.* (Cas des fonctions méromorphes.) Les Lemmes 3, 5 et 6 deviennent sans objet. Dans le Lemme 2, on prendra $\varphi(l) = l$; énoncés et démonstrations des Lemmes 4 et 7 se simplifient considérablement.

2°. *S'il existe une valeur β , finie ou infinie, telle que l'équation $f(z) - \beta$ n'ait qu'un nombre limité de racines.*

En vertu du Théorème II, on pourra remplacer (2,1) par

$$(2,28) \quad f(z) = h_1 \left(\frac{1}{z - \alpha_1} \right) h_2 \left(\frac{1}{z - \alpha_2} \right) \dots h_s \left(\frac{1}{z - \alpha_s} \right).$$

Il sera commode de remplacer la formule (2,2) par la formule ¹⁸⁾

$$(2,29) \quad A_0^{(n)} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \frac{1}{n!} \int_{\Gamma_n^*} \int_{\Gamma_n^*} \dots \int_{\Gamma_n^*} f(\zeta_1) f(\zeta_2) \dots f(\zeta_n) V^2(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) d\zeta_1 d\zeta_2 \dots d\zeta_n,$$

Γ_n^* étant défini par (2,19) [$A=1$]. Les Lemmes 2, 3 et 4 deviennent sans objet. Au lieu du Lemme 5 on utilisera directement la notion d'ordre d'une fonction entière. Les Lemmes 6 et 7 sont à remplacer par d'autres, beaucoup plus simples à démontrer.

¹⁸⁾ Observons, en passant, que l'on a

$$V(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) = V(\zeta_1 - \beta, \zeta_2 - \beta, \dots, \zeta_n - \beta),$$

quel que soit le nombre β . La propriété I du § 4 est une simple conséquence de cette remarque.

CHAPITRE III.

Les fractions continues du type de Grommer.

15. Fraction continue et série entière associée. Considérons la fraction continue (17), où les l_n sont des nombres complexes quelconques, et les k_n des nombres complexes, *tous différents de zéro*, quelconques par ailleurs. Nous appellerons ce type de fractions continues: *le type de Grommer*¹⁹⁾. Définissons deux suites de polynomes par les formules de récurrence

$$(3,1) \quad P_0(z) \equiv 0; P_1(z) \equiv k_1; P_n(z) \equiv (z-l_n)P_{n-1}(z) - k_n P_{n-2}(z) \quad (n \geq 2);$$

$$(3,2) \quad Q_0(z) \equiv 1; Q_1(z) \equiv z-l_1; Q_n(z) \equiv (z-l_n)Q_{n-1}(z) - k_n Q_{n-2}(z) \quad (n \geq 2).$$

Ces formules nous permettent de poser

$$P_n(z) \equiv k_1 z^{n-1} + p_{n2} z^{n-2} + \dots + p_{nn} \quad (n \geq 1),$$

$$Q_n(z) \equiv z^n + q_{n1} z^{n-1} + \dots + q_{nn} \quad (n \geq 1).$$

De (3,1) et (3,2), on tire aussi les formules

$$(3,3) \quad Q_n P_{n+1} - P_n Q_{n+1} \equiv k_1 k_2 \dots k_{n+1} \quad (n \geq 0),$$

$$(3,4) \quad \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{k_1 k_2 \dots k_{n+1}}{Q_n Q_{n+1}} = \frac{d_{n,2n}}{z^{2n+1}} + \frac{d_{n,2n+1}}{z^{2n+2}} + \dots \quad (n \geq 0).$$

On sait que la $n^{\text{ième}}$ réduite de (17) peut se mettre sous la forme

$$(3,5) \quad \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \frac{a_{n0}}{z} + \frac{a_{n1}}{z^2} + \dots + \frac{a_{ny}}{z^{y+1}} + \dots \quad (n \geq 1).$$

Considérons la série

$$(3,6) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \left\{ \frac{a_{n+1,2n}}{z^{2n+1}} + \frac{a_{n+1,2n+1}}{z^{2n+2}} \right\} = \frac{a_0}{z} + \frac{a_1}{z^2} + \dots + \frac{a_n}{z^{n+1}} + \dots,$$

nous dirons avec M. Perron²⁰⁾, que cette série est *associée à la fraction continue* (17). Nous ne nous préoccuperons pas tout d'abord de la convergence ou de la divergence de (3,6): quelques-uns des théorèmes que nous énoncerons sont de nature purement formelle. De (3,4) et (3,6), on tire la

Propriété fondamentale. *Pour tout $n \geq 1$, le développement*

¹⁹⁾ On trouvera, au § 23, la justification de cette désignation.

²⁰⁾ Au sujet des notions et des méthodes utilisées dans ce chapitre, on consultera: O. PERRON, Die Lehre von den Kettenbrüchen, 2. Aufl. [Leipzig, 1929], Kap. VII et VIII. Voir, tout particulièrement, les p. 324—326.

(3,5), de la $n^{\text{ième}}$ réduite de (17), coïncide avec la série associée, jusqu'au terme en $\frac{1}{z^{2n+1}}$, ce terme non compris.

En faisant usage de cette propriété fondamentale, en identifiant des coefficients et en résolvant des systèmes d'équations linéaires, on obtiendra

$$(3,7) \quad k_1 = A_0^{(1)} = a_0; \quad A_0^{(n+1)} = k_1 k_2 \cdots k_{n+1} A_0^{(n)} \quad (n \geq 1),$$

d'où l'on conclut que: pour la série associée à une fraction continue du type de Grommer, les déterminants de la suite (9) sont tous différents de zéro. On peut alors écrire

$$(3,8) \quad Q_n(z) = \frac{1}{A_0^{(n)}} \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n & a_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1} & a_n & \cdots & a_{2n-2} & a_{2n-1} \\ 1 & z & \cdots & z^{n-1} & z^n \end{vmatrix}.$$

De (3,2), on tire

$$(3,9) \quad q_{11} = -l_1; \quad q_{n1} = q_{n-1,1} - l_n \quad (n \geq 2),$$

et, en posant $q_{00} = 1$,

$$(3,10) \quad q_{nn} = -l_n q_{n-1, n-1} - k_n q_{n-2, n-2} \quad (n \geq 2).$$

En posant

$$(3,11) \quad \bar{A}_0^{(1)} = a_1; \quad \bar{A}_0^{(n)} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1} & a_n & \cdots & a_{2n-3} & a_{2n-1} \end{vmatrix} \quad (n \geq 2);$$

on peut écrire (3,9) sous la forme

$$(3,12) \quad l_1 = \frac{\bar{A}_0^{(1)}}{A_0^{(1)}} = \frac{a_1}{a_0}; \quad l_n = \frac{\bar{A}_0^{(n)}}{A_0^{(n)}} - \frac{\bar{A}_0^{(n-1)}}{A_0^{(n-1)}} \quad (n \geq 2).$$

Si tous les termes de la suite (10) sont différents de zéro (ce qui, pour les séries associées aux fractions continues de Grommer, n'est pas nécessairement le cas), on peut mettre la formule (3,10) sous la forme

$$(3,13) \quad \begin{cases} l_1 = \frac{A_1^{(1)}}{A_0^{(1)}}; \quad l_2 = \frac{A_1^{(2)}/A_1^{(1)}}{A_0^{(2)}/A_0^{(1)}} + \frac{A_0^{(2)}/A_0^{(1)}}{A_1^{(1)}}; \\ l_n = \frac{A_1^{(n)}/A_1^{(n-1)}}{A_0^{(n)}/A_0^{(n-1)}} + \frac{A_0^{(n)}/A_0^{(n-1)}}{A_1^{(n-1)}/A_1^{(n-2)}} \quad (n \geq 3). \end{cases}$$

16. Sur les séries entières ayant des déterminants récurrents prescrits. Soient

$$(\alpha_0) \quad \alpha_0^{(1)}, \alpha_0^{(2)}, \dots, \alpha_0^{(n)}, \dots$$

$$(\bar{\alpha}_0) \quad \bar{\alpha}_0^{(1)}, \bar{\alpha}_0^{(2)}, \dots, \bar{\alpha}_0^{(n)}, \dots$$

$$(\alpha_1) \quad \alpha_1^{(1)}, \alpha_1^{(2)}, \dots, \alpha_1^{(n)}, \dots$$

trois suites de termes complexes. Nous supposons la suite $(\bar{\alpha}_0)$, absolument quelconque; les suites (α_0) et (α_1) auront tous leurs termes différents de zéro et seront quelconques par ailleurs.

Par de simples combinaisons des formules précédentes, on obtiendra quelques propriétés des séries entières. Nous les énoncerons sous forme de

Proposition 1. *L'ensemble des séries, pour lesquelles*

$$\alpha_0^{(n)} = A_0^{(n)} \quad (n=1, 2, \dots, \nu, \dots),$$

est identique à l'ensemble des séries associées à la fraction continue

$$(3,14) \quad \frac{\alpha_0^{(1)}}{|z-l_1|} - \frac{\alpha_0^{(2)}/\{\alpha_0^{(1)}\}^2}{|z-l_2|} - \frac{\alpha_0^{(1)}\alpha_0^{(3)}/\{\alpha_0^{(2)}\}^2}{|z-l_3|} - \dots - \frac{\alpha_0^{(n-2)}\alpha_0^{(n)}/\{\alpha_0^{(n-1)}\}^2}{|z-l_n|} - \dots$$

la suite des l_n étant absolument quelconque.

Proposition 2. *Il existe une et une seule série telle que l'on ait simultanément*

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0^{(n)} &= A_0^{(n)} \\ \bar{\alpha}_0^{(n)} &= \bar{A}_0^{(n)} \end{aligned} \right\} \quad (n=1, 2, \dots, \nu, \dots)$$

Cette série est associée à la fraction continue (3,14) et la suite des l_n se calcule par les formules (3,12).

Proposition 3. *Il existe une et une seule série telle que l'on ait simultanément*

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0^{(n)} &= A_0^{(n)} \\ \alpha_1^{(n)} &= A_1^{(n)} \end{aligned} \right\} \quad (n=1, 2, \dots, \nu, \dots).$$

Cette série²¹⁾ est associée à la fraction continue (3,14) et la suite des l_n se calcule par les formules (3,13).

Dans le paragraphe suivant, nous démontrerons les relations (1,1) et (1,3). Le reste du chapitre est consacré à la question

²¹⁾ En vertu du Théorème I, et en reprenant ses notations, on peut affirmer que cette série n'est nulle part convergente, si

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \alpha_0^{(n)} \right| \frac{1}{\Phi^{(n)}} \neq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \alpha_1^{(n)} \right| \frac{1}{\Phi^{(n)}}.$$

suivante: dans les circonstances fixées par la Proposition 1, que peut-on affirmer de la nature analytique des fonctions représentées par les séries associées à (3,14)?

17. Sur la substitution $z|z-\beta$; démonstration de la relation (1,3). Ecrivons la fraction continue (17), sous la forme

$$(3,15) \quad \frac{k_1}{|t-(l_1-\beta)} - \frac{k_2}{|t-(l_2-\beta)} - \dots - \frac{k_n}{|t-(l_n-\beta)} - \dots,$$

où l'on a posé $t = z - \beta$, β désignant un nombre complexe quelconque. Soit

$$\frac{b_0}{t} + \frac{b_1}{t^2} + \dots + \frac{b_n}{t^{n+1}} + \dots,$$

la série associée à (3,15); on s'assure aisément que cette série n'est autre que le développement de centre β de la série (3,6). Appliquons les formules (3,7) à (17) et (3,15), il vient

$$A_0^{(1)} = k_1 = B_0^{(1)}; \quad \frac{A_0^{(n+1)}}{A_0^{(n)}} = k_1 k_2 \dots k_{n+1} = \frac{B_0^{(n+1)}}{B_0^{(n)}} \quad (n \geq 1).$$

Si tous les $A_0^{(n)}$ sont différents de zéro, ces formules sont équivalentes à la relation (1,1). En observant que $A_0^{(n)} = B_0^{(n)}$ est une égalité algébrique, il est facile de se débarrasser de l'hypothèse restrictive $A_0^{(n)} \neq 0$ ($n=1, 2, \dots, \nu, \dots$). Notre méthode de démonstration donne d'ailleurs un peu plus que les relations (1,1); elle prouverait aussi bien l'identité

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n & a_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & a_n & \dots & a_{2n-2} & a_{2n-1} \\ 1 & z & \dots & z^{n-1} & z^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_{n-1} & b_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n & b_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n-1} & b_n & \dots & b_{2n-2} & b_{2n-1} \\ 1 & (z-\beta) & \dots & (z-\beta)^{n-1} & (z-\beta)^n \end{vmatrix}.$$

Passons maintenant à la démonstration de (1,3). En vertu d'une remarque déjà faite pour (1,1), il suffit de démontrer la relation dans le cas $A_0^{(n)} \neq 0$ ($n=1, 2, \dots, \nu, \dots$).

Considérons la série (3,6), associée à (17), puis le développement formel

$$\frac{1}{z-\beta - \left[\frac{a_0}{z} + \frac{a_1}{z^2} + \dots + \frac{a_n}{z^{n+1}} + \dots \right]} = \frac{d_0}{z} + \frac{d_1}{z^2} + \dots + \frac{d_n}{z^{n+1}} + \dots.$$

On s'assure aisément que cette dernière série est associée à

$$\frac{1}{|z-\beta} - \frac{k_1}{|z-l_1} - \frac{k_2}{|z-l_2} - \dots - \frac{k_n}{|z-l_n} - \dots.$$

Des formules (3,7), on tire les relations

$$D_0^{(1)} = 1; D_0^{(2)} = k_1 = A_0^{(1)}; \frac{D_0^{(n+2)}}{D_0^{(n+1)}} = k_1 k_2 \cdots k_{n+1} = \frac{A_0^{(n+1)}}{A_0^{(n)}} \quad (n \geq 1),$$

équivalentes à (1,3).

18. Considérations générales, introduisant les Théorèmes IV et V. Considérons la fraction continue (17) et la suite des réduites

$$\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \dots, \frac{P_n}{Q_n}, \dots$$

Si l'on se propose d'éclaircir les questions relatives à la convergence de cette suite, on est naturellement amené à rechercher les points-limites des racines de la suite

$$(3,16) \quad Q_1(z), Q_2(z), \dots, Q_n(z), \dots$$

Examinons la définition (3,2) de $Q_n(z)$. Si $|k_n|$ est très petit, le polynôme $Q_n(z)$ diffèrera assez peu du polynôme $(z-l_n)Q_{n-1}(z)$; si tous les $|k_n|$ sont très petits, le polynôme

$$(z-l_1)(z-l_2) \cdots (z-l_n)$$

constituera donc une assez bonne approximation de $Q_n(z)$. Dans le Lemme 8, nous donnerons une forme précise à cette idée. Nous rechercherons ensuite, dans quelles conditions les l_n donnent également des approximations des pôles de la fonction représentée par la série associée à (17); la Proposition 4 résume nos résultats dans ce sens. En choisissant convenablement les l_n , nous obtiendrons l'affirmation 2° du Théorème IV; l'affirmation 1° est déjà contenue dans l'annotation ²¹⁾, relative à la Proposition 3. Avant de pouvoir démontrer 3°, nous devons rechercher des classes de fractions continues représentant des fonctions méromorphes d'ordre fini (Proposition 6). La Proposition 6, rapprochée du Théorème III, nous donnera le Théorème V; elle nous permettra également de compléter la démonstration du Théorème IV.

19. Sur les racines de $Q_n(z)$ et la convergence de (17). Considérons une suite de cercles, *extérieurs les uns aux autres*

$$(3,17) \quad \mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \dots, \mathfrak{C}_n, \dots,$$

dont les centres sont respectivement

$$(3,18) \quad l_1, l_2, \dots, l_n, \dots,$$

et les rayons

$$(3,19) \quad r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$$

Lemme 8. *Si la suite*

$$(3,20) \quad |k_1|, |k_2|, \dots, |k_n|, \dots$$

est assujettie aux deux conditions

$$(3,21) \quad 0 < \sqrt{|k_n|} \leq \frac{r_n}{2 + \varepsilon} \quad (\varepsilon > 0; n = 1, 2, \dots, \nu, \dots)$$

et

$$(3,22) \quad |k_1| \geq |k_2| \geq \dots \geq |k_n| \geq \dots,$$

le polynôme $Q_n(z)$ a une racine à l'intérieur de chacun des cercles $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \dots, \mathfrak{C}_n$ ($n = 1, 2, \dots, \nu, \dots$).

Considérons le domaine défini par les n inégalités

$$|z - l_1| \geq r_1, |z - l_2| \geq r_2, \dots, |z - l_n| \geq r_n,$$

et évaluons, dans ce domaine, les polynômes $Q_\nu(z)$ ($\nu \leq n$). Des relations (3,2), on tire

$$|Q_\nu| \geq |z - l_\nu| |Q_{\nu-1}| - |k_\nu| |Q_{\nu-2}| \geq r_\nu |Q_{\nu-1}| - |k_\nu| |Q_{\nu-2}| \quad (\nu \geq 2).$$

De l'hypothèse (3,21), il résulte

$$(3,23) \quad \begin{aligned} |z - l_\nu| |Q_{\nu-1}| - |k_\nu| |Q_{\nu-2}| &\geq (2 + \varepsilon) \sqrt{|k_\nu|} |Q_{\nu-1}| - |k_\nu| |Q_{\nu-2}| \\ &\geq \left[(1 + \varepsilon) \sqrt{|k_\nu|} + \frac{1}{1 + \varepsilon} \sqrt{|k_\nu|} \right] |Q_{\nu-1}| - |k_\nu| |Q_{\nu-2}| \\ &= \frac{\sqrt{|k_\nu|}}{1 + \varepsilon} |Q_{\nu-1}| + (1 + \varepsilon) \sqrt{|k_\nu|} \left\{ |Q_{\nu-1}| - \frac{\sqrt{|k_\nu|}}{1 + \varepsilon} |Q_{\nu-2}| \right\}. \end{aligned}$$

En vertu de l'hypothèse (3,22)

$$|Q_\nu| - \frac{\sqrt{|k_{\nu+1}|}}{1 + \varepsilon} |Q_{\nu-1}| \geq (1 + \varepsilon) \sqrt{|k_\nu|} \left\{ |Q_{\nu-1}| - \frac{\sqrt{|k_\nu|}}{1 + \varepsilon} |Q_{\nu-2}| \right\} \quad (\nu \geq 2).$$

De ces inégalités, pour $\nu = 2, 3, \dots, n$, on tire

$$|Q_n| - \frac{\sqrt{|k_{n+1}|}}{1 + \varepsilon} |Q_{n-1}| \geq (1 + \varepsilon)^{n-1} \sqrt{|k_2 k_3 \dots k_n|} \left\{ |Q_1| - \frac{\sqrt{|k_2|}}{1 + \varepsilon} \right\}.$$

Finalement

$$(3,24) \quad |Q_n| \geq |Q_n| - \frac{\sqrt{|k_{n+1}|}}{1 + \varepsilon} |Q_{n-1}| \geq (1 + \varepsilon)^n \sqrt{|k_1 k_2 \dots k_n|} > 0,$$

car, en vertu de (3,21) et (3,22), on a

$$|z-l_1| - \frac{\sqrt{|k_2|}}{1+\varepsilon} \geq r_1 - \frac{\sqrt{|k_2|}}{1+\varepsilon} \geq (2+\varepsilon)\sqrt{|k_1|} - \frac{\sqrt{|k_1|}}{1+\varepsilon} > (1+\varepsilon)\sqrt{|k_1|}.$$

Nous venons de démontrer que toutes les racines de $Q_n(z)$ sont à l'intérieur des cercles $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \dots, \mathfrak{C}_n$. Nous avons suivi une méthode équivalente, quant au fond, à celle ²²⁾ par laquelle M. Pringsheim obtient des conditions suffisantes pour la convergence d'une fraction continue numérique. Nous allons maintenant, par induction complète, démontrer qu'il n'y a qu'une racine de $Q_n(z)$ dans chacun des cercles $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \dots, \mathfrak{C}_n$. Observons que $Q_1(z)$ a manifestement une seule racine dans \mathfrak{C}_1 et supposons que $Q_{n-1}(z)$ ait juste une racine dans chacun des cercles $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \dots, \mathfrak{C}_{n-1}$. Le polynome $(z-l_n)Q_{n-1}(z)$ aura alors juste une racine dans chacun des cercles $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \dots, \mathfrak{C}_{n-1}, \mathfrak{C}_n$; par application du théorème de Rouché, nous allons vérifier cette propriété pour $Q_n(z)$.

Il suffit de s'assurer que, sur les circonférences de $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \dots, \mathfrak{C}_n$, on a

$$|z-l_n| |Q_{n-1}| > |k_n| |Q_{n-2}|.$$

En tenant compte de (3,21) et (3,24), il vient

$$|z-l_n| |Q_{n-1}| - |k_n| |Q_{n-2}| \geq (2+\varepsilon)\sqrt{|k_n|} \left(|Q_{n-1}| - \frac{\sqrt{|k_n|}}{2+\varepsilon} |Q_{n-2}| \right) > 0$$

c.q.f.d.

Lemme 9. Dans le domaine \mathfrak{D}_n , défini par les inégalités

$$|z-l_\nu| \geq r_\nu \quad (\nu=n, n+1, \dots, n+m, \dots),$$

et sous les hypothèses du Lemme 8, la fraction continue

$$\frac{k_n}{|z-l_n} - \frac{k_{n+1}}{|z-l_{n+1}} - \dots - \frac{k_{n+m}}{|z-l_{n+m}} - \dots$$

est convergente. Sa valeur $f_n(z)$ satisfait à l'inégalité

$$|f_n| \leq \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon(2+\varepsilon)} \sqrt{|k_n|}.$$

Il suffit évidemment de démontrer la proposition pour $n=1$. Grâce aux relations (3,4), tout revient à prouver la convergence de la série

$$(3,25) \quad f_1(z) = \frac{k_1}{Q_1} + \frac{k_1 k_2}{Q_1 Q_2} + \dots + \frac{k_1 k_2 \dots k_m}{Q_{m-1} Q_m} + \dots$$

dans le domaine \mathfrak{D}_1 . De (3,24) et (3,25), nous tirons

²²⁾ Cette méthode est exposée à la p. 255 du traité cité de O. Perron.

$$|f_1(z)| \leq \frac{\sqrt{|k_1|}}{1+\varepsilon} + \frac{\sqrt{|k_2|}}{(1+\varepsilon)^3} + \dots + \frac{\sqrt{|k_m|}}{(1+\varepsilon)^{2m-1}} + \dots, \text{ pour } z \text{ dans } \mathfrak{D}_1;$$

et de (3,22)

$$|f_1(z)| \leq \frac{\sqrt{|k_1|}}{1+\varepsilon} \frac{1}{1 - \frac{1}{(1+\varepsilon)^2}}.$$

Observons que la convergence de (3,25) est uniforme dans \mathfrak{D}_1 ; donc, dans chaque domaine connexe, intérieur à \mathfrak{D}_1 , la somme $f_1(z)$, de la série (3,25), est une fonction holomorphe de z .

20. Énoncé et démonstration de la Proposition 4. Considérons la suite de cercles (3,17); nous supposons tous ces cercles contenus dans le domaine $|z| \leq R$. Cette hypothèse implique, puisque les cercles sont extérieurs les uns aux autres, la convergence de $\sum r_n^2$, et aussi, par conséquent,

$$(3,26) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0.$$

Proposition 4. *Soit \mathfrak{D} un domaine ouvert et connexe, contenant le point ∞ et ne contenant aucun point-limite de la suite (3,18). Sous les hypothèses du Lemme 8, et en supposant tous les cercles \mathfrak{C}_n , contenus dans le cercle $|z| < R$, la série associée à la fraction continue (17) est convergente pour $|z| > R$. Elle représente un élément de fonction analytique $f(z)$, méromorphe dans le domaine \mathfrak{D} . Si l'on remplace l'hypothèse (3,21) par l'hypothèse*

$$(3,27) \quad \sqrt{|k_n|} < \frac{r_n}{2 \cdot 3^n} \quad (n=1, 2, \dots, \nu, \dots),$$

on peut même affirmer que $f(z)$ possède un seul pôle simple dans chacun des cercles \mathfrak{C}_n .

En vertu du Lemme 9, la fraction continue (17) converge pour $|z| > R$; soit $f(z)$ sa valeur. La série associée à (17) converge également dans ce domaine, et sa somme vaut $f(z)$ (Théorème de Weierstraß). Soit $\overline{\mathfrak{D}}$, un domaine fermé, intérieur à \mathfrak{D} , et admettant le point ∞ pour point intérieur. En vertu du Lemme 9 et de (3,26), il est possible de trouver un indice N , tel que pour $n \geq N$, $f_n(z)$ soit holomorphe dans $\overline{\mathfrak{D}}$. Pour $|z| > R$,

$$(3,28) \quad f(z) = \frac{k_1}{z-l_1} - \frac{k_2}{z-l_2} - \dots - \frac{k_{n-1}}{z-l_{n-1}-f_n(z)} = \frac{P_{n-1}(z) - P_{n-2}(z)f_n(z)}{Q_{n-1}(z) - Q_{n-2}(z)f_n(z)}.$$

Cette expression nous donne le prolongement analytique de

$f(z)$, dans le domaine $\overline{\mathfrak{D}}$ (à supposer que $\overline{\mathfrak{D}}$ soit un domaine plus vaste que le domaine de convergence de la série (3,6)).

Il est bien visible que $f(z)$ est *méromorphe* dans le domaine $\overline{\mathfrak{D}}$; la première partie de la Proposition 4 se trouve donc démontrée.

Les racines de l'équation

$$(3,29) \quad Q_{n-1}(z) - Q_{n-2}(z)f_n(z) = 0$$

sont les seuls pôles possibles de $f(z)$, dans $\overline{\mathfrak{D}}$. Toutes ces racines sont effectivement des pôles. En effet, dans le cas contraire, il y aurait une racine z^* de (3,29), qui serait aussi racine de l'équation

$$(3,30) \quad P_{n-1}(z) - P_{n-2}(z)f_n(z) = 0.$$

Ceci impliquerait

$$\left| \begin{array}{c} P_{n-1}(z^*) P_{n-2}(z^*) \\ Q_{n-1}(z^*) Q_{n-2}(z^*) \end{array} \right| = 0,$$

relation incompatible avec (3,3). La démonstration de la Proposition 4 s'achève par l'application du théorème de Rouché, à l'équation (3,29). En vertu de (3,27),

$$(3,31) \quad \sqrt{|k_n|} < \frac{\frac{r_n}{2}}{2+1} \quad (n=1, 2, \dots, m, \dots).$$

Nous poserons $\varepsilon = 1$, dans les Lemmes 8 et 9. De (3,31) et du Lemme 8, on déduit que $Q_n(z)$ a un zéro simple, dans chacun des cercles de centre l_ν et de rayon $\frac{r_\nu}{2}$ ($\nu=1, 2, \dots, n$).

Sur les circonférences des cercles \mathfrak{C} , on a

$$\prod_{\nu=1}^n \left\{ |z - l_\nu| - \frac{r_\nu}{2} \right\} < |Q_n(z)| < \prod_{\nu=1}^n \left\{ |z - l_\nu| + \frac{r_\nu}{2} \right\}$$

donc aussi

$$(3,32) \quad \left| \frac{Q_{n-1}(z)}{Q_{n-2}(z)} \right| \geq \left\{ \prod_{\nu=1}^{n-2} \frac{|z - l_\nu| - \frac{r_\nu}{2}}{|z - l_\nu| + \frac{r_\nu}{2}} \right\} \left[|z - l_{n-1}| - \frac{r_{n-1}}{2} \right] \geq \frac{1}{3^{n-2}} \cdot \frac{r_{n-1}}{2} \quad (n \geq 2).$$

Du Lemme 9 et des hypothèses (3,22) et (3,27), on tire

$$|f_n| \leq \frac{2}{3} \sqrt{|k_n|} \leq \frac{2}{3} \sqrt{|k_{n-1}|} < \frac{2}{3} \frac{r_{n-1}}{2 \cdot 3^{n-1}} = \frac{r_{n-1}}{3^n} \quad (n \geq 2).$$

En reprenant (3,32), il vient finalement

$$\left| \frac{Q_{n-1}(z)}{Q_{n-2}(z)} \right| > \frac{9}{2} |f_n(z)| \geq |f_n(z)|.$$

Notre Proposition 4 se trouve ainsi complètement démontrée. L'affirmation 2° du Théorème IV en est un simple corollaire: il suffit de choisir convenablement la suite des l_n . Voici comment on procédera:

On fixera, une fois pour toutes, la suite des r_n . Il sera suffisant, et commode, de supposer la convergence de $\sum r_n$. Puis on fixera la suite des k_n , en faisant les hypothèses (3,22) et (3,27). Nous allons maintenant montrer qu'il est possible de choisir les centres l_n , des cercles \mathfrak{C} , de manière que

I. les \mathfrak{C} soient tous situés dans le domaine de méromorphie prescrit pour $f(z)$;

II. les \mathfrak{C} soient extérieurs les uns aux autres;

III. l'ensemble \mathfrak{F} des points-frontière du domaine de méromorphie prescrit pour $f(z)$ soit identique à l'ensemble des points d'accumulation des l_n .

En vertu de la Proposition 4, si ces trois conditions sont réalisées, l'ensemble \mathfrak{F} est aussi identique à l'ensemble des points d'accumulation des pôles que l'on trouvera dans chacun des \mathfrak{C} . Comme l'a montré M. Besse, ceci ne permet pas encore d'affirmer l'impossibilité de prolonger $f(z)$ au delà de la frontière \mathfrak{F} : il sera encore nécessaire de prendre certaines précautions²³⁾ dans le choix des l_n . Il semble, au premier abord, que la réalisation de la condition II soulève l'objection suivante: la suite des r_n ayant été fixée, une fois pour toutes, ne se pourrait-il pas que la décroissance de cette suite fût trop lente pour assurer une liberté suffisante dans le choix des l_n ? Non, comme il est facile de s'en rendre compte en effectuant le choix des l_n en deux opérations distinctes: on fera un premier choix, *provisoire*, de tous les l_n , puis on modifiera convenablement une suite partielle

$$(3,33) \quad l_{n_1}, l_{n_2}, \dots, l_{n_r}, \dots$$

de termes de la suite provisoire.

Supposons d'abord, que le domaine de méromorphie imposé à $f(z)$ se compose de tout le plan complexe, à l'exception d'un point d'affixe fini: α . On tracera, par exemple, une droite issue

²³⁾ M. Besse a remarqué l'insuffisance de la plupart des constructions de fonctions ayant un domaine d'existence (ou de méromorphie) prescrit. Comme il l'a montré, les constructions considérées jusqu'à maintenant comme rigoureuses sont faciles à corriger dès que l'on a compris l'objection qu'il leur fait. Voir: J. BESSE, Sur le domaine d'existence d'une fonction analytique [Commentarii Math. Helvet. 10 (1938), 302—305].

de α et l'on disposera les l_n sur cette droite, de manière que α soit leur seul point d'accumulation. Ceci est possible en vertu de la convergence de $\sum r_n$.

Dans ce cas particulier, ce choix des l_n sera le choix définitif.

Si le domaine de méromorphie, imposé à $f(z)$, est plus complexe, ou prendra pour α un point-frontière convenable de ce domaine. La construction précédente nous livrera le choix provisoire des l_n . Le choix définitif sera obtenu en disposant convenablement, dans le domaine de méromorphie, les termes de la suite partielle (3,33). Ici, nous ne serons pas gênés par une décroissance trop lente de la suite

$$r_{n_1}, r_{n_2}, \dots, r_{n_i}, \dots$$

puisque nous avons toute liberté dans le choix des indices n_i .

21. Fractions continues et fonctions méromorphes. De très légères modifications des méthodes du § 19 ou l'application directe des conditions de convergence de M. Pringsheim permettent de prouver la

Proposition 5. *Soit (17) une fraction continue, telle que*

I.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} |k_n| = 0,$$

II.
$$|l_n| \leq R < +\infty \quad (n=1, 2, \dots, \nu, \dots),$$

III. *la suite (3,18) a exactement s points d'accumulation $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$.*

Sous ces hypothèses, la série (3,6), convergente pour $|z| > R$, est un élément de fonction quasi méromorphe, admettant au plus s singularités essentielles dont les affixes ne peuvent être que $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$.

Nous établirons maintenant des théorèmes relatifs à l'ordre; nous nous bornerons au cas $s = 1$ (cas des fonctions méromorphes). Par une translation éventuelle, nous amènerons la singularité essentielle à l'origine.

Proposition 6. *Sous les deux hypothèses*

$$(3,34) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |k_n|^{\frac{1}{2 \log n}} = e^{-\frac{1}{\varrho'}} \quad (0 \leq \varrho' < +\infty),$$

et

$$(3,35) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |l_n|^{\frac{1}{\log n}} = e^{-\frac{1}{\varrho''}} \quad (0 \leq \varrho'' < +\infty),$$

la fraction continue (17) représente une fonction méromorphe de z^{-1} , d'ordre au plus égal à $\varrho = \max \{ \varrho', \varrho'' \}$.

Considérons le domaine \mathfrak{G}_n , défini par les inégalités

$$(3,36) \quad |z| > |l_\nu| + 2\sqrt{|k_\nu|} + 2\sqrt{|k_{\nu+1}|} \quad (\nu=n, n+1, \dots).$$

Sa frontière Γ_n est une circonférence de rayon R_n . De nos deux hypothèses (3,34) et (3,35), on tire, pour tout nombre positif δ ,

$$(3,37) \quad R_n < 5n^{-\frac{1}{\varrho+\delta}}, \text{ dès que } n > K(\delta).$$

En reprenant les méthodes et les notations du § 19 (ou en appliquant les critères de convergence de M. Pringsheim), on verrait que $f_n(z)$ est holomorphe dans \mathfrak{G}_n , et que dans ce domaine

$$(3,38) \quad |f_n(z)| \leq A,$$

où A désigne une certaine borne finie, indépendante de n .

Par l'inégalité de Jensen, nous évaluerons le nombre de pôles de la fonction

$$(3,39) \quad f(z) = \frac{P_{n-1} - P_{n-2}f_n}{Q_{n-1} - Q_{n-2}f_n},$$

dans \mathfrak{G}_n (nous effectuerons, plus loin, le détail de cette opération). En faisant, dans (3,39), $n = 2$, on verra que ce nombre de pôles est aussi le nombre de racines, dans \mathfrak{G}_n , de l'équation

$$(3,40) \quad z - f_2(z) = l_1.$$

Le premier membre de (3,40) est une fonction méromorphe de $\frac{1}{z}$; soient

$$z_1(l_1), z_2(l_1), \dots, z_\nu(l_1), \dots$$

toutes les racines de l'équation (3,40). Nous considérons ces racines comme des fonctions du second membre et nous démontrerons la convergence de

$$(3,41) \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} |z_\nu(l_1)|^{\varrho+\eta} \quad (\eta > 0).$$

Le nombre ϱ ne dépend que des propriétés-limites des k_n et des l_n ; donc, ne dépend certainement pas de l_1 : la série (3,41) est convergente, quel que soit le nombre l_1 . Faisons prendre à l_1 trois valeurs distinctes; d'un théorème de M. R. Nevanlinna ²⁴⁾ il résulte que l'ordre de la fonction méromorphe $f_2\left(\frac{1}{z}\right)$ n'excède

²⁴⁾ Voir, par exemple, les énoncés de la p. 72 du traité cité de R. Nevanlinna.

pas ϱ . En faisant, dans (3,39), $n = 2$, on verra que l'ordre de $f\left(\frac{1}{z}\right)$ n'excède pas ϱ .

Voici maintenant comment on appliquera l'inégalité de Jensen. Dans la formule (3,39), divisons numérateur et dénominateur par z^{n-1} . Les nouveaux numérateur et dénominateur sont des fonctions holomorphes pour

$$(3,42) \quad |z| \geq 5n^{-\frac{1}{\varrho+\delta}}, \quad \text{dès que } n \geq K(\delta);$$

ceci en vertu de (3,37). Désignons par $M(5n^{-\frac{1}{\varrho+\delta}})$, le module maximum de l'expression

$$(3,43) \quad \frac{Q_{n-1}}{z^{n-1}} - \frac{Q_{n-2}}{z^{n-1}} f_n$$

dans le domaine (3,42); et soit $\mathfrak{N}(15n^{-\frac{1}{\varrho+\delta}})$, le nombre de pôles de $f(z)$ (ou de zéros de (3,43)) dans le domaine $|z| \geq 15n^{-\frac{1}{\varrho+\delta}}$. Observons que la fonction (3,43) vaut 1 au point à l'infini, et utilisons l'inégalité de Jensen sous la forme ²⁵⁾

$$(3,44) \quad \mathfrak{N}(15n^{-\frac{1}{\varrho+\delta}}) \leq \frac{1}{\log 3} \log M(5n^{-\frac{1}{\varrho+\delta}}).$$

Les zéros des polynomes de la suite (3,16) sont bornés dans leur ensemble. Il existe donc une constante B , telle que

$$(3,45) \quad |Q_n(z)| < B^n \quad \text{pour } |z| < 1.$$

En estimant le second membre de (3,44), on tiendra compte de (3,38) et (3,45) et on obtiendra

$$\mathfrak{N}(15n^{-\frac{1}{\varrho+\delta}}) \leq \frac{1}{\log 3} \log M(5n^{-\frac{1}{\varrho+\delta}}) = O(n \log n).$$

Nous n'insisterons pas sur la façon classique dont on déduit, de ces dernières relations, la convergence de (3,41).

22. Achèvement de la démonstration du Théorème IV et démonstration du Théorème V. Pour démontrer l'affirmation 3°, du Théorème IV, on choisira convenablement les l_n et les r_n .

²⁵⁾ Pour cette forme de l'inégalité de Jensen, voir, par exemple: E. C. TITCHMARSH, The Theory of Functions [Oxford, 1932], 171.

En prenant, par exemple,

$$(3,46) \quad l_n = e^{-\frac{\log n}{\varrho}} \quad (\varrho > 0); \quad r_n = e^{-n^2},$$

la série associée à (17) aura une seule singularité essentielle, d'ordre ϱ . En effet: l'exposant de convergence des pôles de la fonction méromorphe $f\left(\frac{1}{z}\right)$ sera égal à ϱ (en vertu de la Proposition 4) et en combinant cette remarque et la Proposition 6, on verra que l'ordre de $f\left(\frac{1}{z}\right)$ est exactement égal à ϱ . Pour obtenir une fonction d'ordre nul, on remplacera (3,46) par

$$(3,47) \quad l_n = e^{-n \log n}; \quad r_n = e^{-n^2}.$$

Observons que dans (3,46), aussi bien que dans (3,47), on a $r_n = e^{-n^2}$ et que ce choix des r_n fait converger la série $\sum r_n$. On peut donc, comme le veut l'énoncé du Théorème IV, affirmer simultanément 2° et 3°. Remarquons enfin, que l'affirmation 1° est toujours possible, tout à fait indépendamment du choix des r_n . Le Théorème IV se trouve ainsi complètement démontré et nous passons à la démonstration du Théorème V. De propriétés connues des suites on tire l'inégalité

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |k_1^n k_2^{n-1} \dots k_{n-1}^2 k_n^1|^{\frac{1}{n^2 \log n}} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |k_n|^{\frac{1}{2 \log n}}.$$

Si la suite des $|k_n|$ n'est pas trop irrégulière, on a même

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |k_1^n k_2^{n-1} \dots k_{n-1}^2 k_n^1|^{\frac{1}{n^2 \log n}} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |k_n|^{\frac{1}{2 \log n}}.$$

Dans ce dernier cas, on peut faire des affirmations précises sur l'ordre de la singularité essentielle de la fonction représentée par (17): on obtiendra le Théorème V en utilisant les formules (3,7) et en combinant l'inégalité (7) et la Proposition 6.

CHAPITRE IV

Sur les fonctions du type: $f(z) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\varphi(x)}{z-x} dx.$

23. Intégrales de Stieltjes et déterminants récurrents.

Dans les premiers paragraphes [§ 23, 24 et 25] de ce chapitre, nous étudierons des éléments de fonctions représentables sous la forme

$$(4,1) \quad f(z) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\psi(x)}{z-x}.$$

L'intégrale du second membre est une *intégrale de Stieltjes*; la fonction réelle $\psi(x)$ est une fonction monotone, non décroissante et bornée; les limites d'intégration sont des nombres réels, finis; la représentation (4,1) est valable pour tous les z non situés sur l'intervalle réel (α, β) .

Les relations, entre le développement (1) de (4,1) et les fractions continues du type (17), sont fort connues depuis que Grommer a généralisé ²⁶⁾ les belles recherches de Stieltjes, relatives au „problème des moments”. Pour l'intelligence de chapitre, il nous suffira de rappeler une très petite partie des résultats de Grommer; nous nous contenterons d'énoncer la proposition suivante:

Soit (1), une série entière à coefficients réels, convergente pour $|z| > R$.

Pour qu'il existe une fonction réelle $\psi(x)$, définie dans l'intervalle réel $(-R, R)$, non décroissante et bornée, effectivement croissante en une infinité de points et telle que

$$(4,2) \quad a_n = \int_{-R}^{+R} x^n d\psi(x) \quad (n = 0, 1, \dots, \nu, \dots),$$

il faut et il suffit que

$$(4,3) \quad A_0^{(n)} > 0 \quad (n = 1, 2, \dots, \nu, \dots).$$

De l'existence d'une représentation de $f(z)$, du type (4,1), on déduit [en vertu de (3,7), (3,12), (4,2) et (4,3)] la possibilité d'associer, au développement de $f(z)$, une fraction continue du type (17) où: *tous les k_n sont positifs et tous les l_n réels* ²⁷⁾.

Considérons, dans ce cas particulier de *Stieltjes-Grommer*, la suite de polynomes (3,16), définis par (3,8). Remplaçons z par x , dans cette formule; multiplions en les deux membres par

$$x^m d\psi(x) \quad (m \text{ entier, non négatif}),$$

et intégrons entre les limites $-R$ et $+R$.

En tenant compte de (4,2), il vient

$$(4,4) \quad \int_{-R}^{+R} x^m Q_n(x) d\psi(x) = 0 \quad (m < n);$$

$$(4,5) \quad \int_{-R}^{+R} x^n Q_n(x) d\psi(x) = \frac{A_0^{(n+1)}}{A_0^{(n)}} \quad (n \geq 1).$$

²⁶⁾ J. GROMMER, Ganze transzendente Funktionen mit lauter reellen Nullstellen [Journal f. r. u. angew. Math. 144 (1914), 114—165].

²⁷⁾ Nous appellerons le cas particulier de (17), ainsi défini: cas de *Stieltjes-Grommer*.

On peut aussi exprimer (4,4) et (4,5), sous forme de relations d'orthogonalité:

$$(4,6) \quad \int_{-R}^{+R} Q_m(x) Q_n(x) d\psi(x) = 0 \quad (m \neq n);$$

$$(4,7) \quad \int_{-R}^{+R} Q_n^2(x) d\psi(x) = \frac{A_0^{(n+1)}}{A_0^{(n)}} \quad (n \geq 1).$$

Par des méthodes classiques, on peut déduire, de ces dernières relations, une importante propriété des polynomes $Q_n(x)$.

Soit $U_n(x)$, un polynome réel, de la forme

$$U_n(x) \equiv x^n + \dots$$

Il existe manifestement n nombres réels c_1, c_2, \dots, c_n , univoquement déterminés, et tels que

$$(4,8) \quad U_n(x) \equiv Q_n(x) + c_1 Q_{n-1}(x) + \dots + c_{n-1} Q_1(x) + c_n.$$

De (4,6) et (4,7) on tire

$$(4,9) \quad \int_{-R}^{+R} U_n^2(x) d\psi(x) = \frac{A_0^{(n+1)}}{A_0^{(n)}} + c_1^2 \frac{A_0^{(n)}}{A_0^{(n-1)}} + \dots + c_n^2 A_0^{(1)},$$

puis, par application de (4,3),

$$(4,10) \quad \int_{-R}^{+R} U_n^2(x) d\psi(x) \geq \frac{A_0^{(n+1)}}{A_0^{(n)}} = \int_{-R}^{+R} Q_n^2(x) d\psi(x).$$

Nous terminerons ce paragraphe, consacré aux généralités, par l'énoncé d'un „principe de comparaison” dont nous aurons besoin pour établir le principal résultat de ce chapitre.

Considérons, d'une part, les quantités et expressions définies, dans ce paragraphe, par $\psi(x)$ et, d'autre part, les quantités et expressions correspondantes, définies par une seconde fonction $\bar{\psi}(x)$. En surlignant les symboles qui représentent ces dernières expressions et quantités, nous les distinguerons des premières.

Proposition 7. *Considérons les deux fonctions $\psi(x)$ et $\bar{\psi}(x)$, non décroissantes et bornées, définies dans le même intervalle $(-R, R)$. Soient x_1 et x_2 , les affixes de deux points distincts, situés sur cet intervalle.*

Si l'inégalité

$$(4,11) \quad \frac{\psi(x_2) - \psi(x_1)}{x_2 - x_1} \geq \frac{\bar{\psi}(x_2) - \bar{\psi}(x_1)}{x_2 - x_1}$$

est valable pour tout couple (x_1, x_2) , elle entraîne les inégalités

$$A_0^{(1)} \geq \bar{A}_0^{(1)}; \quad \frac{A_0^{(n+1)}}{A_0^{(n)}} \geq \frac{\bar{A}_0^{(n+1)}}{\bar{A}_0^{(n)}} \quad (n=1, 2, \dots, \nu, \dots).$$

La démonstration de cette proposition est immédiate. En effet, l'inégalité (4,11) entraîne

$$\int_{-R}^{+R} Q_n^2(x) d\psi(x) \geq \int_{-R}^{+R} Q_n^2(x) d\bar{\psi}(x),$$

et, en appliquant (4,10) au second membre de cette inégalité, il vient

$$\int_{-R}^{+R} Q_n^2(x) d\psi(x) \geq \int_{-R}^{+R} \bar{Q}_n^2(x) d\bar{\psi}(x),$$

c.q.f.d.

Nous aurons à utiliser ce principe de comparaison dans le cas particulier où les fonctions $\psi(x)$ et $\bar{\psi}(x)$ admettent respectivement les dérivées $\varphi(x)$ et $\bar{\varphi}(x)$, continues, sauf peut-être en un nombre fini de points. La condition (4,11) sera remplacé par la condition

$$\varphi(x) \geq \bar{\varphi}(x),$$

réalisée en tout point de l'intervalle $(-R, R)$.

24. Une précision de l'inégalité de M. Pólya, dans le cas de Stieltjes-Grommer. Considérons $\psi(x)$ en un point ξ , intérieur à l'intervalle réel $(-R, R)$: ou bien il existe un intervalle ouvert I (de l'axe réel), contenant le point ξ et tel que la fonction $\psi(x)$ soit constante sur I ; ou bien, il n'existe pas de pareil intervalle. Dans le premier cas nous dirons que ξ est un *point de constance* de $\psi(x)$; dans le second cas, un *point de croissance* ²⁸⁾. L'ensemble des points de constance de $\psi(x)$ est *ouvert* (sur l'intervalle fermé $(-R, R)$) et l'ensemble E , des points de croissance, est fermé. En outre, on vérifie aisément que *l'ensemble E jouit de la propriété \mathfrak{B}* (voir § 1), *par rapport à $f(z)$* .

Cette dernière remarque nous amène naturellement à l'étude des relations entre les propriétés limites des $A_0^{(n)}$ et le diamètre transfini τ , de l'ensemble E .

Rappelons d'abord celles des définitions de M. Fekete, dont nous aurons besoin. Soit $T_n(x)$, le polynome de Tchebyscheff, de degré n , relatif à l'ensemble E

$$T_n(x) \equiv x^n + \dots$$

Posons

$$(4,12) \quad \max_{x \text{ sur } E} |T_n(x)| = m_n;$$

²⁸⁾ Les modifications à apporter à ces définitions, pour le cas où ξ désignerait l'un des points R ou $-R$, sont évidentes.

M. Fekete a démontré l'existence de $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n^{\frac{1}{n}}$, et c'est cette limite qu'il a appelé: le diamètre transfini de E . On sait que les polynomes $T_n(x)$ sont univoquement déterminés (si E contient une infinité de points). De cette unicité découle nécessairement la symétrie des racines²⁹⁾, par rapport à l'axe réel et, par conséquent, la *réalité des coefficients de $T_n(x)$* . Nous pouvons donc utiliser la relation (4,10) et, en combinant cette relation avec (4,2), obtenir

$$(4,13) \quad \frac{A_0^{(n+1)}}{A_0^{(n)}} \leq \int_{-R}^{+R} T_n^2(x) d\psi(x) \leq m_n^2 \int_{-R}^{+R} d\psi(x) = m_n^2 a_0,$$

puis,

$$\left[\frac{A_0^{(n+1)}}{A_0^{(n)}} \right]^{\frac{1}{2n}} \leq m_n^{\frac{1}{n}} a_0^{\frac{1}{2n}}.$$

En passant à la limite $n \rightarrow \infty$, et en revenant aux définitions de M. Fekete, il vient

$$(4,14) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{A_0^{(n+1)}}{A_0^{(n)}} \right]^{\frac{1}{2n}} \leq \tau.$$

De l'inégalité (4,14), et de propriétés connues des suites à termes positifs, il résulte

$$(4,15) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} [A_0^{(n)}]^{\frac{1}{n^2}} \leq \tau;$$

par contre, de (4,15) on ne peut déduire³⁰⁾ (4,14).

Au chapitre V, nous verrons qu'il est possible de choisir $\psi(x)$ de manière que le cas d'égalité ne soit point atteint dans (4,14) ni, par conséquent, dans (4,15).

Pour que ce cas d'égalité soit atteint, il faut restreindre suffisamment le choix de $\psi(x)$. Avant de fixer notre attention sur ce

²⁹⁾ Par application de certaines propositions établies par M. Fejér, il serait facile de démontrer que ces racines sont toutes réelles.

³⁰⁾ C'est là la raison pour laquelle nous disons que (4, 14) constitue une précision de (4, 15) (inégalité de la forme générale de M. Pólya). Observons encore qu'il serait très facile, en utilisant les formules (3, 7) et les méthodes du chapitre III, de construire des séries du type (1), convergentes pour $|z| > R$, associées à des fractions continues du type de Stieltjes-Grommer, et telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} [A_0^{(n)}]^{\frac{1}{n^2}}$ n'existe pas. On ne peut donc songer à remplacer, ni dans (4, 15) ni dans (4, 14), $\overline{\lim}$ par \lim .

choix, nous établirons un „principe d'addition”, applicable aux fonctions admettant la représentation (4,1). Ce principe d'addition jouera un rôle important dans la démonstration du Théorème VI.

25. Un principe d'addition. Posons

$$(4,16) \quad \max_{x \text{ sur } E} |Q_n(x)| = M_n,$$

et soit $V_n(x)$, un polynome réel, de degré n , quelconque par ailleurs. $Q_\nu(x)$ étant exactement de degré ν , on peut manifestement déterminer n nombres réels v_0, v_1, \dots, v_n , tels que

$$(4,17) \quad V_n(x) \equiv v_0 \frac{Q_0(x)}{M_0} + v_1 \frac{Q_1(x)}{M_1} + \dots + v_n \frac{Q_n(x)}{M_n}.$$

De cette relation, on tire

$$(4,18) \quad \max_{x \text{ sur } E} |V_n(x)| \leq |v_0| + |v_1| + \dots + |v_n|.$$

On peut admettre que ce maximum de $|V_n(x)|$ est atteint en un certain point ξ de E , car E est fermé. En reprenant un calcul déjà effectué (qui se base sur (4,6) et (4,7)), et en posant [voir (4,7)]

$$(4,19) \quad \mu_n^2 = \frac{A_0^{(n+1)}}{A_0^{(n)}} = \int_{-R}^{+R} Q_n^2(x) d\psi(x),$$

il vient

$$\int_{-R}^{+R} V_n^2(x) d\psi(x) = v_0^2 \frac{\mu_0^2}{M_0^2} + v_1^2 \frac{\mu_1^2}{M_1^2} + \dots + v_n^2 \frac{\mu_n^2}{M_n^2},$$

puis

$$\begin{aligned} & \left(\frac{M_0^2}{\mu_0^2} + \frac{M_1^2}{\mu_1^2} + \dots + \frac{M_n^2}{\mu_n^2} \right) \int_{-R}^{+R} V_n^2(x) d\psi(x) = \\ & = \left(\frac{M_0^2}{\mu_0^2} + \frac{M_1^2}{\mu_1^2} + \dots + \frac{M_n^2}{\mu_n^2} \right) \left(v_0^2 \frac{\mu_0^2}{M_0^2} + v_1^2 \frac{\mu_1^2}{M_1^2} + \dots + v_n^2 \frac{\mu_n^2}{M_n^2} \right). \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy, au second membre de cette relation, on obtient

$$\int_{-R}^{+R} V_n^2(x) d\psi(x) \geq \frac{(|v_0| + |v_1| + \dots + |v_n|)^2}{\frac{M_0^2}{\mu_0^2} + \frac{M_1^2}{\mu_1^2} + \dots + \frac{M_n^2}{\mu_n^2}},$$

et en tenant compte de (4,18)

$$(4,20) \quad \int_{-R}^{+R} V_n^2(x) d\psi(x) \geq \frac{V_n^2(\xi)}{\frac{M_0^2}{\mu_0^2} + \frac{M_1^2}{\mu_1^2} + \dots + \frac{M_n^2}{\mu_n^2}}.$$

L'inégalité (4,20) est particulièrement intéressante dans le cas où l'on peut effectivement calculer les quantités M et μ . Ce calcul est très aisé pour $\psi(x) = x$; dans ce cas particulier, des inégalités du type (4,20) ont été établies par F. Lukács ³¹).

Pour les estimations asymptotiques, que nous avons en vue, il n'est pas nécessaire de connaître exactement les rapports $\frac{M}{\mu}$; il nous suffira de savoir que

$$(4,21) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{M_n}{\mu_n}} = 1.$$

Définition. Nous dirons qu'une fonction de la forme (4, 1) est du type régulier, si elle possède la propriété-limite (4,21) [voir (4,16) et (4,19)].

Entre les trois quantités m_n , μ_n et M_n , nous avons les relations générales

$$(4,22) \quad \mu_n^2 \leq m_n^2 a_0.$$

et

$$(4,23) \quad m_n \leq M_n;$$

l'inégalité (4,22) est équivalente à (4,13); (4,23) résulte de la définition même des polynômes de Tchebyscheff. Pour une fonction du type régulier, on déduit de (4,22) et (4,23) les relations

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{A_0^{(n+1)}}{A_0^{(n)}} \right]^{\frac{1}{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} m_n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n^{\frac{1}{n}} = \tau.$$

Proposition 8. La somme d'un nombre fini de fonctions du type régulier est une fonction du type régulier.

Soient $f_1(z), f_2(z), \dots, f_s(z)$, s fonctions du type régulier et soit

$$(4,24) \quad f(z) = f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_s(z).$$

Considérons, pour chacune des fonctions $f_j(z)$, toutes les expressions et quantités, définies, dans les paragraphes précédents, pour $f(z)$. Nous désignerons ces nouvelles expressions et quan-

³¹) F. LUKÁCS, Verschärfung des ersten Mittelwertsatzes der Integralrechnung für rationale Polynome [Math. Zeitschr. 2 (1918), 295—305].

tités par les symboles correspondants relatifs à $f(z)$, affectés d'un premier indice j [par exemple: M_{jn} , $T_{jn}(\xi_{jn})$].

Posons

$$R = \max (R_1, R_2, \dots, R_s).$$

Si $R_j < R$, nous étendrons la définition de $\psi_j(x)$ à tout l'intervalle $(-R, R)$, en posant

$$\psi_j(x) = \psi_j(R) \text{ pour } x > R_j;$$

et

$$\psi_j(x) = \psi_j(-R) \text{ pour } x < -R_j.$$

Définissons $\psi(x)$ par la relation

$$\psi(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x) + \dots + \psi_s(x).$$

(4,24) peut alors se mettre sous la forme

$$f(z) = \int_{-R}^{+R} \frac{d\psi(x)}{z-x}.$$

Considérons maintenant

$$(4,25) \quad \mu_n^2 = \int_{-R}^{+R} Q_n^2(x) d\psi(x) = \sum_{j=1}^s \int_{-R_j}^{+R_j} Q_n^2(x) d\psi_j(x).$$

Soit ξ_j , le point où $\max_{x \text{ sur } E_j} |Q_n(x)|$ est atteint. En appliquant, aux termes du troisième membre de (4,25), la propriété générale exprimée par (4,20), on obtient

$$(4,26) \quad \mu_n^2 \geq \sum_{j=1}^s \frac{Q_n^2(\xi_j)}{\frac{M_{j_0}^2}{\mu_{j_0}^2} + \frac{M_{j_1}^2}{\mu_{j_1}^2} + \dots + \frac{M_{j_n}^2}{\mu_{j_n}^2}}.$$

De nos définitions, on déduit que l'un au moins des nombres

$$Q_n^2(\xi_1), Q_n^2(\xi_2), \dots, Q_n^2(\xi_s)$$

est égal à M_n^2 . Soit

$$(4,27) \quad Q_n^2(\xi_{j_n}) = M_n^2.$$

De (4,16), (4,19), (4,26), et (4,27), nous tirons

$$(4,28) \quad \frac{\mu_n^2}{\alpha_0} \leq M_n^2 \leq \mu_n^2 \left(\frac{M_{j_n,0}^2}{\mu_{j_n,0}^2} + \frac{M_{j_n,1}^2}{\mu_{j_n,1}^2} + \dots + \frac{M_{j_n,n}^2}{\mu_{j_n,n}^2} \right).$$

Chacune de nos fonctions $f_j(z)$ étant, par hypothèse, du type régulier, on a

$$(4,29) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{M_{j,n}}{\mu_{j,n}} \right)^{\frac{1}{n}} = 1 \quad (j = 1, 2, \dots, s),$$

et aussi, par conséquent,

$$(4,30) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{M_{j,0}^2}{\mu_{j,0}^2} + \frac{M_{j,1}^2}{\mu_{j,1}^2} + \dots + \frac{M_{j,n}^2}{\mu_{j,n}^2} \right)^{\frac{1}{2n}} = 1.$$

En observant que, dans (4,30), l'indice j n'est susceptible de prendre que l'une des valeurs $1, 2, \dots, s$, on peut, en utilisant (4,30), écrire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{M_{j_n,0}^2}{\mu_{j_n,0}^2} + \frac{M_{j_n,1}^2}{\mu_{j_n,1}^2} + \dots + \frac{M_{j_n,n}^2}{\mu_{j_n,n}^2} \right)^{\frac{1}{2n}} = 1.$$

De cette relation, et de (4,28), nous tirons immédiatement

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{M_n}{\mu_n} \right)^{\frac{1}{n}} = 1. \quad \text{c.q.f.d.}$$

Nous allons maintenant appliquer notre Proposition 8 à la fonction $g(z)$, définie par

$$g(z) = \sum_{j=1}^s \int_{\alpha_j}^{\beta_j} \frac{dx}{z-x} = \sum_{j=1}^s \log \left(\frac{z-\alpha_j}{z-\beta_j} \right) \quad (\alpha_j < \beta_j; j = 1, 2, \dots, s).$$

Considérons les polynômes de Legendre, relatifs à l'intervalle (α_j, β_j) . De propriétés connues de ces polynômes, on tire

$$\frac{M_{j_n}^2}{\mu_{j_n}^2} = \frac{2n+1}{\beta_j - \alpha_j},$$

d'où l'on déduit (4,29). On peut donc affirmer que

$$\frac{b_0}{z} + \frac{b_1}{z^2} + \dots + \frac{b_n}{z^{n+1}} + \dots = g(z)$$

est du type régulier. Observons que ce résultat fournit un moyen, tout au moins théorique, de calculer le diamètre transfini d'un ensemble formé d'un nombre fini d'intervalles fermés de l'axe réel.

26. Propriété de continuité du diamètre transfini de certains ensembles. Cette propriété sera utilisée dans la démonstration du Théorème VI.

Considérons s intervalles de l'axe réel, définis par les inégalités

$$\alpha_j \leq x \leq \beta_j \quad (j=1, 2, \dots, s).$$

Nous supposons

$$\alpha_1 < \beta_1 \leq \alpha_2 < \beta_2 \leq \dots \leq \alpha_s < \beta_s.$$

Soit E l'ensemble formé par les points des S intervalles que nous venons de définir.

Outre l'ensemble E , nous considérerons deux autres ensembles $E(\varepsilon)$ et $E[\delta]$, définis ci-dessous en I et II.

I. Soit ε un nombre positif satisfaisant à l'inégalité

$$2\varepsilon < \min \{(\beta_1 - \alpha_1), (\beta_2 - \alpha_2), \dots, (\beta_s - \alpha_s)\}.$$

Par $I_j(\varepsilon)$, nous désignerons l'ensemble des points de l'intervalle fermé $(\alpha_j + \varepsilon, \beta_j - \varepsilon)$, et soit

$$E(\varepsilon) = I_1(\varepsilon) + I_2(\varepsilon) + \dots + I_s(\varepsilon).$$

II. Soit δ un nombre positif, inférieur à 1. Par $I_j[\delta]$ nous désignerons l'ensemble des points de l'intervalle fermé $((1-\delta)\alpha_j, (1-\delta)\beta_j)$ et soit

$$E[\delta] = I_1[\delta] + I_2[\delta] + \dots + I_s[\delta].$$

Les diamètres transfinis de E , $E(\varepsilon)$ et $E[\delta]$ seront désignés respectivement par $\tau(E)$, $\tau(E(\varepsilon))$ et $\tau(E[\delta])$. En vertu des définitions, on vérifie immédiatement

$$\tau(E[\delta]) = (1-\delta)\tau(E),$$

et nous nous proposons de démontrer que

$$(4,31) \quad \tau(E(\varepsilon)) \geq (1-\delta)\tau(E),$$

dès que

$$(4,32) \quad 2\varepsilon \leq \delta \min \{(\beta_1 - \alpha_1), (\beta_2 - \alpha_2), \dots, (\beta_s - \alpha_s)\}.$$

Considérons le déterminant défini en (2,3), et soit (x_1, x_2, \dots, x_n) le système de points de $E[\delta]$, tel que

$$|V(x_1, x_2, \dots, x_n)| = \max_{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n \text{ sur } E[\delta]} |V(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)|.$$

Nous voulons maintenant construire un système $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ de points de $E(\varepsilon)$, tel que

$$(4,33) \quad |V(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)| \geq |V(x_1, x_2, \dots, x_n)|.$$

En vertu des définitions de M. Fekete, cette dernière inégalité, valable quel que soit n , entraîne l'inégalité (4,31).

Voici comment nous obtiendrons le système des points ξ_ν . Nous considérerons chacun des segments $I_j[\delta]$ comme le support de ceux des points x_ν qu'il contient. Nous ferons glisser ces supports $I_j[\delta]$, le long de l'axe réel et nous supposons que, pendant ces translations, la position des x_ν , situés sur un même segment, n'est pas altérée. Nous amènerons $I_j[\delta]$ sur $I_j(\varepsilon)$ ($j=1, 2, \dots, s$) de manière que les centres des intervalles correspondants coïncident. Nous désignerons par ξ_ν la nouvelle position de x_ν ($\nu=1, 2, \dots, n$).

Observons que, en vertu de (4,32), on a

$$(1-\delta)(\beta_j-\alpha_j) \leq (\beta_j-\alpha_j) - 2\varepsilon \quad (j=1, 2, \dots, s),$$

d'où l'on déduit que tous les ξ_ν sont points de $E(\varepsilon)$. Pour démontrer l'inégalité (4,33), il suffira de considérer $|V(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)|$ comme le produit des valeurs absolues de toutes les différences ($\xi_\mu - \xi_\nu$) et de s'assurer que l'on a constamment

$$|\xi_\mu - \xi_\nu| \geq |x_\mu - x_\nu|.$$

(Le cas d'égalité n'a lieu que si ξ_μ et ξ_ν appartiennent à un même intervalle $I_j(\varepsilon)$.)

L'inégalité (4,31) se trouve ainsi démontrée; en la combinant avec l'inégalité

$$\tau(E) \geq \tau(E(\varepsilon)),$$

et en passant à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, il vient

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tau(E(\varepsilon)) = \tau(E).$$

27. Démonstration du Théorème VI, dans un cas particulier. Nous démontrerons d'abord le Théorème VI dans le cas particulier où: l'hypothèse 2°, de son énoncé, est réalisée sous la forme

2° restreinte. *La fonction $\varphi(x)$ n'est jamais négative dans l'intervalle (α, β) .*

Notre démonstration, dans ce cas particulier sera obtenue par combinaison du "principe de comparaison" et du „principe d'addition”, précédemment établis. Au § 28, nous établirons un „principe des changements de signe” grâce auquel il nous sera facile d'étendre la démonstration du Théorème VI, du cas particulier au cas général.

Considérons les points, de l'intervalle (α, β) , où $\varphi(x)$ a un zéro isolé et, en outre, les extrémités de tous les intervalles sur les-

quels $\varphi(x) = 0$. Nous prendrons chacun de ces points pour centre d'un intervalle ouvert de l'axe réel. Soient O_1, O_2, \dots, O_p ces intervalles (en vertu de l'hypothèse 3°, p est un nombre fini); donnons à chacun d'eux la longueur positive 2ε (par la suite nous ferons $\varepsilon \rightarrow 0$).

Considérons l'ensemble

$$E(\varepsilon) = E - (O_1 + O_2 + \dots + O_p),$$

et désignons par $\gamma(x; \varepsilon)$ sa fonction caractéristique, c'est-à-dire la fonction valant 1 ou 0 suivant que x est, ou n'est pas, l'abscisse d'un point de $E(\varepsilon)$. Soit $m(\varepsilon)$ la valeur minimale prise par la fonction continue $\varphi(x)$, sur l'ensemble fermé $E(\varepsilon)$. Si nous désignons par

$$\bar{A}_0^{(1)}(\varepsilon), \bar{A}_0^{(2)}(\varepsilon), \dots, \bar{A}_0^{(n)}(\varepsilon), \dots$$

les déterminants récurrents relatifs à la fonction

$$\int_{\alpha}^{\beta} m(\varepsilon) \frac{\gamma(x; \varepsilon)}{z - x} dx,$$

nous pouvons, en vertu du principe de comparaison, poser

$$A_0^{(1)} \geq \bar{A}_0^{(1)}(\varepsilon); \quad \frac{A_0^{(n+1)}}{A_0^{(n)}} \geq \frac{\bar{A}_0^{(n+1)}(\varepsilon)}{\bar{A}_0^{(n)}(\varepsilon)} \quad (n=1, 2, \dots, \nu, \dots),$$

car, en tout point de l'intervalle (α, β) , on a manifestement

$$\varphi(x) \geq m(\varepsilon)\gamma(x; \varepsilon).$$

En utilisant le résultat obtenu, à la fin du § 25 (comme exemple d'application de la Proposition 8), il vient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{A_0^{(n+1)}}{A_0^{(n)}} \right\}^{\frac{1}{2n}} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\bar{A}_0^{(n+1)}(\varepsilon)}{\bar{A}_0^{(n)}(\varepsilon)} \right\} = \tau(E(\varepsilon)).$$

En appliquant, à cette relation, les résultats des § 24 et 26, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{A_0^{(n+1)}}{A_0^{(n)}} \right\}^{\frac{1}{2n}} = \tau(E),$$

et aussi, par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{A_0^{(n)}\}^{\frac{1}{n^2}} = \tau(E).$$

28. Principe des changements de signe; achèvement de la démonstration du Théorème VI.

Proposition 9. *Soit*

$$\frac{a_0}{z} + \frac{a_1}{z^2} + \dots + \frac{a_n}{z^{n+1}} + \dots = f(z) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\chi(x)}{z-x}$$

où la fonction réelle $\chi(x)$ est supposée à variation bornée. Soit $U(x)$, un polynôme réel, non identiquement nul, et soit

$$(4,34) \quad \frac{b_0}{z} + \frac{b_1}{z^2} + \dots + \frac{b_n}{z^{n+1}} + \dots = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{U(x)}{z-x} d\chi(x).$$

On a alors

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |A_0^{(n)}|^{\frac{1}{n^2}} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |B_0^{(n)}|^{\frac{1}{n^2}}.$$

Pour démontrer cette proposition, il suffit d'observer que la série (4,34) représente une fonction de la forme

$$U(z)f(z) - V(z),$$

où $V(z)$ est un polynôme, et que, par conséquent, on peut lui appliquer le Théorème II. En effet,

$$U(z)f(z) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{U(z) - U(x)}{z-x} d\chi(x) + \int_{\alpha}^{\beta} \frac{U(x)}{z-x} d\chi(x).$$

La première intégrale du second membre est un polynôme $V(z)$.
c.q.f.d.

Voici comment s'achèvera la démonstration du Théorème VI.

I. On considérera une fonction $\varphi(x)$ satisfaisant aux conditions, non restreintes, de l'énoncé du Théorème VI.

II. On construira un polynôme $U(x)$, à racines toutes réelles, telles que l'expression $\varphi(x)U(x)$ ne soit jamais négative.

III. Grâce à la Proposition 9, on ramènera l'évaluation de $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |A_0^{(n)}|^{\frac{1}{n^2}}$ à l'évaluation des limites formées avec les déterminants récurrents de

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{U(x)\varphi(x)}{z-x} dx.$$

Cette évaluation a déjà été effectuée au § 27.

CHAPITRE V

Les séries de la forme $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{r_{\nu}}{z - s_{\nu}}$.

29. Expression de $A_k^{(n)}$ par une somme multiple. Considérons la série (19); nous supposons les nombres complexes s_{ν} bornés dans leur ensemble

$$|s_{\nu}| \leq R \quad (\nu = 1, 2, \dots, p, \dots)$$

et les nombres complexes r_{ν} tels que $\sum_{\nu=1}^{\infty} |r_{\nu}|$ converge. La série (19) représente alors une fonction holomorphe pour $|z| > R$; soit (1) son développement en série entière.

On a manifestement

$$(5,1) \quad a_n = \sum_{\nu=1}^{\infty} r_{\nu} s_{\nu}^n \quad (n=0, 1, \dots, m, \dots).$$

A partir de ces expressions pour les coefficients a_n , on obtient aisément la formule

$$(5,2) \quad A_k^{(n)} = \sum_{0 < \nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_n} r_{\nu_1} r_{\nu_2} \dots r_{\nu_n} (s_{\nu_1} s_{\nu_2} \dots s_{\nu_n})^k V^2(s_{\nu_1}, s_{\nu_2}, \dots, s_{\nu_n}).$$

Les résultats de ce chapitre sont des conséquences assez simples de cette formule.

30. Esquisse de la démonstration du Théorème VII. Soit E l'ensemble défini dans l'énoncé du Théorème VII et soit

$$(5,3) \quad s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$$

une suite de points de E .

On sait qu'il est possible de trouver une suite

$$(5,4) \quad s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*, \dots$$

de points de la frontière de E , telle que, si la suite (5,3) contient tous les éléments de (5,4), la fonction représentée par une série (19) est holomorphe dans CE et admet CE pour domaine d'existence ³²⁾.

L'ensemble E étant fixé, choisissons, à la manière de M. Besse, la suite (5,4). Fixons en outre un nombre positif θ , inférieur à 1.

³²⁾ Cette proposition a été énoncée par M. Pringsheim, mais la démonstration qu'il en a donnée comporte une importante lacune. M. Besse a remarqué la lacune et a démontré la proposition en toute rigueur. Voir ²³⁾.

Nous allons construire, par induction complète, une série (19) telle que les coefficients de son développement (1) satisfassent à la relation (20).

Considérons d'abord, deux suites de nombres non négatifs.

1° Une suite d'entiers

$$(5,5) \quad p_0, p_1, \dots, p_n, \dots,$$

telle que

$$(5,6) \quad 0 = p_0 < p_1 < \dots < p_n < \dots.$$

2° Une suite de nombres positifs

$$(5,7) \quad \eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n, \dots,$$

telle que

$$(5,8) \quad 1 = \eta_0 > \eta_1 > \dots > \eta_n > \dots$$

Nous préciserons plus loin le choix de (5,5) et (5,7).

Posons $q = \theta^2$; en vertu de nos hypothèses

$$(5,9) \quad 0 < q < 1.$$

Posons encore

$$(5,10) \quad r_\nu = \eta_n q^\nu \text{ pour } p_n < \nu \leq p_{n+1}.$$

On peut s'assurer dès maintenant que, malgré l'arbitraire des suites (5,3), (5,5) et (5,7) (seulement soumises aux hypothèses (5,6) et (5,8)), on a

$$(5,11) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |A_0^{(n)}|^{1/n^2} \leq \theta \tau.$$

En effet, posons

$$(5,12) \quad V_n = \max_{z_1, z_2, \dots, z_n \text{ sur } E} |V(z_1, z_2, \dots, z_n)|.$$

De (5,2) et de la définition de (5,3), on tire

$$|A_0^{(n)}| \leq V_n^2 \sum_{0 < \nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_n} r_{\nu_1} r_{\nu_2} \dots r_{\nu_n}.$$

En vertu de (5,8), (5,9) et (5,10), on peut aussi écrire

$$(5,13) \quad |A_0^{(n)}| \leq V_n^2 \sum_{0 < \nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_n} q^{\nu_1} q^{\nu_2} \dots q^{\nu_n}.$$

On calcule sans peine la somme multiple du second membre de (5,13); il vient

$$(5,14) \quad \sum_{0 < \nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_n} q^{\nu_1} q^{\nu_2} \dots q^{\nu_n} = \frac{q}{1-q} \cdot \frac{q^2}{1-q^2} \dots \frac{q^n}{1-q^n}.$$

En tenant compte de (5,9) et (5,14), on peut donc mettre (5,13) sous la forme

$$|A_0^{(n)}| \leq V_n^2 \frac{q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1-q)^n}.$$

En élevant les deux membres à la puissance $\frac{1}{n^2}$, en passant à la limite $n \rightarrow \infty$, et en revenant aux définitions de M. Fekete, on obtient (5,11).

Pour achever la démonstration du Théorème VII, dans le cas $0 < \theta < 1$, il nous suffira de voir que les suites (5,3), (5,5) et (5,7) peuvent être choisies de manière que

$$(5,15) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |A_0^{(p_n)}|^{\frac{1}{p_n^2}} \geq \theta \tau.$$

Pour démontrer cette inégalité, nous utiliserons le Lemme 10, énoncé et démontré au paragraphe suivant.

31. Un Lemme relatif à la définition du diamètre transfini. Soient z_1, z_2, \dots, z_k k points distincts de E . Formons le polynome

$$W_k(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_k).$$

Considérons

$$\max_{z \text{ sur } E} |W_k(z)| = \omega_k,$$

ce maximum est atteint en un ou plusieurs points de E ; soit z_{k+1} un de ces points.

Considérons ensuite

$$W_{k+1}(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_k)(z - z_{k+1}),$$

et posons

$$\max_{z \text{ sur } E} |W_{k+1}(z)| = \omega_{k+1} = |W_{k+1}(z_{k+2})|.$$

Nous formerons ensuite $W_{k+2}(z)$, puis $W_{k+3}(z)$, \dots etc.; en répétant indéfiniment cette opération, et en supposant E composé d'une infinité de points, nous obtiendrons une suite de points distincts

$$(5,16) \quad z_1, z_2, \dots, z_k, z_{k+1}, z_{k+2}, \dots, z_n, \dots$$

Lemme 10. *Pour les éléments de la suite (5, 17), on a*

$$(5,17) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |V^2(z_1, z_2, \dots, z_n)|^{\frac{1}{n^2}} = \tau.$$

Observons que

$$|V(z_1, z_2, \dots, z_n)| = |V(z_1, z_2, \dots, z_k)| |W_k(z_{k+1})| |W_{k+1}(z_{k+2})| \cdots |W_{n-1}(z_n)| \quad (n > k).$$

Soit $T_j(z)$, le polynome de Tchebyscheff, de degré j , relatif à l'ensemble E , et soit

$$\max_{z \text{ sur } E} |T_j(z)| = m_j.$$

Par définition même des polynomes $T_j(z)$

$$|W_j(z_{j+1})| = \omega_j \geq m_j \quad (j \geq k).$$

On a donc [voir (5,12)]

$$V_n \geq |V(z_1, z_2, \dots, z_n)| \geq |V(z_1, z_2, \dots, z_k)| m_k m_{k+1} \cdots m_{n-1}.$$

On obtiendra (5,17) en élevant les deux membres de ces inégalités à la puissance $\frac{2}{n^2}$, en passant à la limite $n \rightarrow \infty$, et en tenant compte des définitions de M. Fekete ³³).

32. Achèvement de la démonstration du Théorème VII.

Nous allons préciser maintenant le choix des suites (5,5) et (5,7). Supposons avoir déjà choisi

$$p_0, p_1, \dots, p_n, \\ \eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n,$$

de même que

$$s_1, s_2, \dots, s_{p_n}.$$

Nous montrerons comment choisir p_{n+1} , η_{n+1} et s_{p_n} ($p_n < v \leq p_{n+1}$). En particulier, le premier pas de notre induction consistera, connaissant $p_0 = 0$ et $\eta_0 = 1$, à choisir p_1 , η_1 et s_1, s_2, \dots, s_{p_1} . Voici le pas général:

³³) Observons, en passant, qu'il est assez facile de démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n^{\frac{1}{n}} = \tau.$$

Nous prendrons pour s_{p_n+1} le premier terme de (5,4) qui ne se trouve pas parmi

$$s_1, s_2, \dots, s_{p_n}.$$

Nous formerons le polynome

$$W_{p_n+1}(s) = (s-s_1)(s-s_2) \cdots (s-s_{p_n})(s-s_{p_n+1})$$

et nous prendrons pour s_{p_n+2} un des points de E pour lesquels $\max_{s \text{ sur } E} |W_{p_n+1}(s)|$ est atteint. Nous continuerons à appliquer cette méthode (voir description exacte avant l'énoncé du Lemme 10) pour choisir

$$s_{p_n+3}, s_{p_n+4}, \dots, s_{\kappa}.$$

En vertu du Lemme 10, et en observant que $\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \eta_n^{\frac{1}{\kappa}} = 1$, nous sommes assurés de trouver un indice κ , tel que

$$(5,18) \quad \left| \eta_n^{\kappa} V^2(s_1, s_2, \dots, s_{\kappa}) \right|^{\frac{1}{\kappa^2}} > \tau \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1} \right).$$

Nous prendrons $\kappa = p_{n+1}$; il nous reste à choisir η_{n+1} .

Nous prendrons pour η_{n+1} un nombre positif, inférieur à η_n , et tel que

$$(5,19) \quad \frac{\eta_{n+1} V_{p_{n+1}}^2}{(1-q) \cdots (1-q^{p_{n+1}})} \leq \frac{1}{2} \eta_n^{p_{n+1}} |V(s_1, s_2, \dots, s_{p_{n+1}})|^2.$$

Donnons maintenant une estimation inférieure de $|A_0^{(p_{n+1})}|$. Dans (5,2), faisons $k=0$, remplaçons n par p_{n+1} et soustrayons du module du terme

$$r_1 r_2 \cdots r_{p_{n+1}} V^2(s_1, s_2, \dots, s_{p_{n+1}})$$

la somme des modules des autres termes du second membre.

En tenant compte de (5,10), (5,14) et de la définition de $V_{p_{n+1}}$, il vient

$$(5,20) \quad \left| A_0^{(p_{n+1})} \right| \geq \eta_n^{p_{n+1}} q^{\frac{p_{n+1}(p_{n+1}+1)}{2}} |V(s_1, s_2, \dots, s_{p_{n+1}})|^2 \\ - \eta_{n+1} \frac{q^{\frac{p_{n+1}(p_{n+1}+1)}{2}}}{(1-q) \cdots (1-q^{p_{n+1}})} V_{p_{n+1}}^2.$$

En combinant (5,19) et (5,20), on obtient

$$\left| A_0^{(p_{n+1})} \right| \geq \frac{1}{2} \eta_n^{p_{n+1}} q^{\frac{p_{n+1}^2 + p_{n+1}}{2}} |V(s_1, s_2, \dots, s_{p_{n+1}})|^2.$$

En élevant les deux membres à la puissance $\frac{1}{p_{n+1}^2}$, et en tenant compte de (5,18), il vient

$$\left| A_0^{(p_{n+1})} \right|^{\frac{1}{p_{n+1}^2}} > \frac{q^{\frac{1}{2p_{n+1}}}}{\frac{1}{2^{p_{n+1}}}} q^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \tau.$$

Par le passage à la limite $n \rightarrow \infty$, nous obtiendrons (5,15). La fonction que nous venons de construire n'est pas prolongeable au delà de CE , car la suite (5,3) contient la suite (5,4). Nous avons ainsi démontré le Théorème VII, dans le cas $0 < \theta < 1$.

Le cas $\theta = 1$ est obtenu en remplaçant (5,10) par

$$(5,21) \quad r_\nu = \eta_n \frac{1}{\nu^2} \quad \text{pour} \quad p_n < \nu \leq p_{n+1}.$$

Le cas $\theta = 0$ est particulièrement simple à traiter; en l'étudiant, il est facile de répondre à une question de M. Pólya ³⁴).

Soit R le rayon de convergence de l'élément (1). Si $n \rightarrow \infty$, de manière que le rapport $\frac{k}{n}$ reste fini, il faut, pour que (1) soit prolongeable au delà de son cercle de convergence, que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| A_k^{(n)} \right|^{\frac{1}{(k+n-1)n}} < R.$$

Cette condition nécessaire, établie par M. Pólya, est-elle suffisante?

Non. En effet, posons

$$r_n = \frac{1}{2^{n^2}} \quad (n=1, 2, \dots, m, \dots);$$

quelle que soit la suite (5,3), de points de E , on a, en vertu de (5,2),

$$\left| A_k^{(n)} \right| \leq V_n^2 R^{kn} \sum_{0 < \nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_n} \frac{1}{2^{\nu_1^2}} \cdot \frac{1}{2^{\nu_2^2}} \cdots \frac{1}{2^{\nu_n^2}}.$$

La somme multiple du second membre est facile à limiter supérieurement; elle décroît tellement rapidement avec $\frac{1}{n}$, que, si $\frac{k}{n}$ reste fini, on a toujours

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| A_k^{(n)} \right|^{\frac{1}{(k+n-1)n}} = 0.$$

³⁴) Voir l'annotation 1).

33. Une précision du Théorème VII dans le cas de Stieltjes-Grommer. Au lieu du Lemme 10, il sera commode d'utiliser le

Lemme 11. *Soit E un ensemble fermé, borné et infini, du plan de la variable complexe. Soit*

$$(5,22) \quad \bar{s}_1, \bar{s}_2, \dots, \bar{s}_n, \dots$$

une suite quelconque de points distincts de E .

J'affirme qu'il existe une suite (5,3) de points distincts de E , contenant tous les éléments de (5,22), jouissant en outre des propriétés

$$(5,23) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n^{\frac{1}{n}} = \tau$$

et

$$(5,24) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |V(s_1, s_2, \dots, s_n)|^{\frac{2}{n^2}} = \tau.$$

On a posé

$$W_n(s) = (s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_n),$$

$$\max_{s \text{ sur } E} |W_n(s)| = \omega_n.$$

La démonstration de ce Lemme est un peu longue, mais n'offre aucune difficulté particulière; nous ne la donnerons pas ici. Disons toutefois, qu'elle repose essentiellement sur la construction utilisée dans le Lemme 10.

Le cas de Stieltjes-Grommer est caractérisé par la positivité des r et la réalité des s et des points de E . Nous prendrons pour (5,22) une suite de M. Besse, relative à l'ensemble E . Nous déterminerons la suite (5,3), comme le veut le Lemme 11. Nous poserons encore

$$r_n = q^n \quad (q = \theta^2),$$

et nous démontrerons que, pour le développement (1) de la série (19), on a

$$(5,25) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{A_0^{(n+1)}}{A_0^{(n)}} \right]^{\frac{1}{2n}} = \theta \tau \quad (0 < \theta < 1).$$

Dans notre cas particulier, il résulte de (5,2) la double inégalité

$$qq^2 \cdots q^n V^2(s_1, s_2, \dots, s_k) \leq A_0^{(n)} \leq \frac{q}{1-q} \cdot \frac{q^2}{1-q^2} \cdots \frac{q^n}{1-q^n} V_n^2.$$

Par le passage à la limite habituel, et en tenant compte de (5,24), il vient

$$(5,26) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |A_0^{(n)}|^{\frac{1}{n^2}} = \theta\tau.$$

Observons l'équivalence de l'intégrale de Stieltjes (4,1) et de (19). De cette équivalence on déduit l'existence d'une suite de polynômes réels

$$Q_1(s), Q_2(s), \dots, Q_n(s), \dots$$

tels que

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} r_{\nu} Q_n^2(s_{\nu}) = \frac{A_0^{(n+1)}}{A_0^{(n)}} \quad (n=1, 2, 3, \dots, m, \dots).$$

De même, si $U_n(x)$ désigne un polynôme réel, du type

$$U_n(x) = x^n + \dots,$$

on aura constamment

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} r_{\nu} Q_n^2(s_{\nu}) \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} r_{\nu} U_n^2(s_{\nu}).$$

On aura, en particulier,

$$\frac{A_0^{(n+1)}}{A_0^{(n)}} \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} r_{\nu} W_n^2(s_{\nu}) = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} r_{\nu} W_n^2(s_{\nu}).$$

De la définition des r et de ω_n

$$\frac{A_0^{(n+1)}}{A_0^{(n)}} \leq \omega_n^2 [q^{n+1} + q^{n+2} + \dots] = \omega_n^2 \frac{q^{n+1}}{1-q}.$$

Elevons les deux membres de cette inégalité à la puissance $\frac{1}{2n}$, passons à la limite $n \rightarrow \infty$. En tenant compte de (5,23), il vient

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{A_0^{(n+1)}}{A_0^{(n)}} \right]^{\frac{1}{2n}} \leq \theta\tau.$$

Si l'égalité (5,25) n'était pas atteinte, nous serions en contradiction avec (5,26).

34. Un lemme sur l'ordre de la singularité essentielle de certaines séries du type (19). Ce paragraphe et le suivant préparent la construction des exemples relatifs au Théorème III.

Considérons les fonctions (21) et (22) et soit

$$g(z; \varrho) = f\left(\frac{1}{z}; \varrho\right) \quad (\varrho \geq 0).$$

Cette fonction méromorphe est d'ordre au moins égal à ϱ , puisque l'exposant de convergence de ses pôles est égal à ϱ . Dans ce paragraphe, nous montrerons que son ordre est effectivement ϱ (simple conséquence du lemme suivant).

Lemme 12. *Soit*

$$r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$$

une suite de nombres complexes, telle que $\sum_{n=1}^{\infty} |r_n|$ converge.

Soit

$$s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$$

une suite de nombres réels, telle que

$$1^\circ. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0$$

2° *la suite*

$$\frac{1}{s_1}, \frac{1}{s_2}, \dots, \frac{1}{s_n}, \dots$$

ait un exposant de convergence égal à ϱ .

Sous ces hypothèses, l'ordre de la singularité essentielle de la fonction représentée par (19) est égal à ϱ .

Considérons la fonction méromorphe

$$g(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{r_\nu}{\frac{1}{z} - s_\nu}.$$

Nous allons en calculer l'ordre en nous appuyant sur les définitions de M. Nevanlinna³⁵). Il est manifestement suffisant de connaître la valeur moyenne

$$m(r, \infty) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |g(re^{i\varphi})| d\varphi.$$

Pour $\varphi \neq 0$ et $\varphi \neq \pi$, on a

$$|g(re^{i\varphi})| \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|r_\nu|}{\left| \frac{e^{-i\varphi}}{r} - s_\nu \right|} \leq \frac{1}{b(r, \varphi)} \sum_{\nu=1}^{\infty} |r_\nu|,$$

où l'on a posé

$$b(r, \varphi) = \underline{\text{borne}} \left| \frac{e^{-i\varphi}}{r} - s_\nu \right|.$$

³⁵) Voir les pages 12 et 30 du traité cité de R. Nevanlinna.

De la réalité des s , on tire

$$b(r, \varphi) \geq \frac{|\sin \varphi|}{r}.$$

On a donc, pour $|g(re^{i\varphi})|$, une estimation du type

$$|g(re^{i\varphi})| \leq \frac{Ar}{|\sin \varphi|}.$$

Pour $r \rightarrow \infty$, il vient

$$m(r, \infty) \leq \log r + O(1).$$

Cette inégalité prouve que, dans la fonction caractéristique

$$T(r) = m(r, \infty) + N(r, \infty),$$

le terme $N(r, \infty)$, qui ne dépend que de la position des pôles de $g(z)$, est toujours prépondérant. c.q.f.d.

35. Limitation inférieure de certains déterminants de Vandermonde. Considérons

$$(5,27) \quad \left| V\left(\frac{1}{1^\varrho}, \frac{1}{2^\varrho}, \dots, \frac{1}{n^\varrho}\right) \right| = \frac{1}{(n!)^\varrho} \prod_{1 \leq j < k \leq n} \left(k^{\frac{1}{\varrho}} - j^{\frac{1}{\varrho}}\right).$$

Supposons d'abord $0 < \frac{1}{\varrho} < 1$; on a alors

$$\varrho \left(k^{\frac{1}{\varrho}} - j^{\frac{1}{\varrho}}\right) = \int_j^k x^{\frac{1}{\varrho}-1} dx \geq k^{\frac{1}{\varrho}-1} (k-j),$$

ou encore

$$(5,28) \quad k^{\frac{1}{\varrho}} - j^{\frac{1}{\varrho}} \geq \frac{1}{\varrho} \cdot k^{\frac{1}{\varrho}} \cdot \frac{k-j}{k}.$$

En combinant (5,27) et (5,28), il vient

$$\left| V\left(\frac{1}{1^\varrho}, \frac{1}{2^\varrho}, \dots, \frac{1}{n^\varrho}\right) \right| \geq \frac{1}{(n!)^\varrho} \frac{1}{\varrho^{\frac{n(n-1)}{2}}} \prod_{1 \leq j < k \leq n} k^{\frac{1}{\varrho}} \left(\frac{k-j}{k}\right).$$

Le second membre de cette inégalité est égal à

$$\frac{1}{\varrho^{\frac{n(n-1)}{2}}} \frac{[1^1 2^2 3^3 \dots n^n]^{\frac{1}{\varrho}}}{(n!)^\varrho} \frac{(n!)^{n+1}}{[1^1 2^2 3^3 \dots n^n]^2}.$$

En tenant compte des inégalités

$$n^n e^{-n} < n! < n^n$$

et

$$1 \log 1 + 2 \log 2 + \dots + n \log n > \frac{n^2 \log n}{2} - \frac{n^2}{4},$$

il vient, après quelques calculs,

$$(5,29) \quad \left| V \left(\frac{1}{1^{\ell}}, \frac{1}{2^{\ell}}, \dots, \frac{1}{n^{\ell}} \right) \right| \geq e^{O(n^2)} e^{-\frac{n^2 \log n}{2\ell}}.$$

Le cas $\frac{1}{\ell} \geq 1$ est un peu plus simple à traiter; il suffit de remplacer (5,28) par

$$(5,30) \quad k^{\frac{1}{\ell}} - j^{\frac{1}{\ell}} \geq (k-j)^{\frac{1}{\ell}}.$$

Le reste du calcul est analogue à celui que nous venons d'esquisser. On obtiendra à nouveau l'inégalité (5,29).

Il est maintenant aisé de démontrer le

Lemme 13. *Soit E_n , l'ensemble formé par les ns points*

$$(5,31) \quad 2j + 1 \frac{1}{\ell_j}, \quad 2j + 2 \frac{1}{\ell_j}, \quad 2j + 3 \frac{1}{\ell_j}, \dots, \quad 2j + n \frac{1}{\ell_j};$$

$\ell_j > 0; \quad (j=1, 2, \dots, s).$

Posons

$$(5,32) \quad \bar{V}_n = \max_{s_1, s_2, \dots, s_n \text{ sur } E_n} |V(s_1, s_2, \dots, s_n)|.$$

Sous ces hypothèses, on a, pour $n \rightarrow \infty$,

$$(5,33) \quad \bar{V}_n^2 \geq e^{O(n^2)} e^{-\frac{n^2 \log n}{\ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_s}}.$$

Soient n_1, n_2, \dots, n_s , s nombres entiers, positifs, tels que

$$(5,34) \quad n_1 + n_2 + \dots + n_s = n.$$

De (5,31) et (5,32), on tire

$$\bar{V}_n \geq \prod_{j=1}^s \left| V \left(\frac{1}{1^{\ell_j}}, \frac{1}{2^{\ell_j}}, \dots, \frac{1}{n_j^{\ell_j}} \right) \right|,$$

et de (5,29),

$$(5,35) \quad \bar{V}_n \geq e^{O(n^2)} e^{-\left[\frac{n_1^2 \log n_1}{2\ell_1} + \frac{n_2^2 \log n_2}{2\ell_2} + \dots + \frac{n_s^2 \log n_s}{2\ell_s} \right]}.$$

On ne peut en général satisfaire, en nombres entiers positifs, à la fois à (5,34) et

$$(5,36) \quad \frac{n_1 \log n_1}{\ell_1} = \frac{n_2 \log n_2}{\ell_2} = \dots = \frac{n_s \log n_s}{\ell_s}.$$

Toutefois, pour n très grand, on peut satisfaire „à peu près” ces dernières relations. Voici ce que nous entendons par là:

Quel que soit n , suffisamment grand, il est possible de trouver un système de nombres n_j entiers, positifs, tels que l'égalité (5,34) soit satisfaite, et telle que l'on ait:

$$(5,37) \quad \frac{n_j \log n_j}{\varrho_j} - \frac{n_1 \log n_1}{\varrho_1} = O(\log n) \quad (j=2, 3, \dots, s).$$

De (5,34) on tire

$$n_1 \log n_1 + n_2 \log n_2 + \dots + n_s \log n_s < n \log n.$$

En combinant cette inégalité avec (5,37), il vient

$$\frac{n_1 \log n_1}{\varrho_1} (\varrho_1 + \varrho_2 + \dots + \varrho_s) < n \log n + O(\log n),$$

puis, en multipliant les deux membres par $n(\varrho_1 + \varrho_2 + \dots + \varrho_s)^{-1}$,

$$(n_1 + n_2 + \dots + n_s) \frac{n_1 \log n_1}{\varrho_1} < \frac{n^2 \log n}{\varrho_1 + \varrho_2 + \dots + \varrho_s} + O(n \log n).$$

En appliquant à nouveau (5,37)

$$\frac{n_1^2 \log n_1}{\varrho_1} + \frac{n_2^2 \log n_2}{\varrho_2} + \dots + \frac{n_s^2 \log n_s}{\varrho_s} < \frac{n^2 \log n}{\varrho_1 + \varrho_2 + \dots + \varrho_s} + O(n \log n).$$

Le résultat annoncé est obtenu en combinant cette dernière inégalité avec (5,35).

36. Exemples relatifs au Théorème III. Nous allons maintenant démontrer la relation (24).

Il est aisé de voir que, dans cette démonstration, on peut, sans nuire à la généralité, se restreindre au cas où tous les ϱ_j sont différents de zéro.

Représentons la fonction (23) sous la forme (19), c'est-à-dire sous forme d'une somme unique de fractions du type $\frac{r_\nu}{z - s_\nu}$. Les déterminants récurrents du développement (1) de cette fonction, sont donnés par la formule (5,2); faisons $k = 0$ et considérons le ou les termes du second membre de (5,2), contenant le facteur \bar{V}_n^2 [voir la définition (5,32)]. Tous les r_ν étant positifs, on a

$$A_0^{(n)} > \frac{1}{2n^2} \bar{V}_n^2.$$

En tenant compte de (5,33), on voit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [A_0^{(n)}]^{n^2 \log n} \geq e^{-\frac{1}{\varrho_1 + \varrho_2 + \dots + \varrho_s}}.$$

En vertu du Lemme 12, nous pouvons appliquer le Théorème III et obtenir

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} [A_0^{(n)}]^{n^2 \log n} \leq e^{-\frac{1}{\varrho_1 + \varrho_2 + \dots + \varrho_s}}.$$

Les deux dernières relations écrites sont équivalentes à (24).

La démonstration de (25) n'offre aucune difficulté; elle est en tous points semblable à celle, donnée pour le cas $\theta = 0$, du Théorème VII.

(Reçu le 18 janvier 1939.)
