COMPOSITIO MATHEMATICA

RENÉ GARNIER

Sur le problème de Riemann-Hilbert

Compositio Mathematica, tome 8 (1951), p. 185-204

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1951__8__185_0>

Sur le problème de Riemann — Hilbert

par

René Garnier

Paris.

Introduction

1. Dans une Note posthume [1]) Riemann s'était proposé de construire une équation différentielle linéaire admettant un groupe de monodromie donné. Pour résoudre ce problème D. Hilbert traita [2]) le problème préliminaire suivant, que nous appellerons *problème de Riemann — Hilbert*:

Etant données, dans le plan complexe (z) une courbe fermée sans point double, C, séparant le plan en deux régions, l'une R^+ intérieure à C, l'autre R^- extérieure à C, et une matrice carrée d'ordre n, $A(z)$, définie en tout point z de C, construire dans R^+ et R^- respectivement deux matrices analytiques $\Phi(z)$ et $\Psi(z)$ d'ordre n et telles que l'on ait $\Phi = A\Psi$ le long de C.

Hilbert supposait *la courbe C analytique, et les éléments $a_{jk}(z)$ de $A(z)$ pourvus, le long de C, de dérivées secondes continues*; il se limitait d'ailleurs au cas de $n = 2$, tant pour le problème préliminaire que pour le problème primitif de Riemann; sa méthode reposait sur l'introduction d'une fonction de Green et la théorie des équations de Fredholm.

Peu après [3]), J. Plemelj reprenait les deux problèmes par une méthode beaucoup plus simple, fondée sur les propriétés qu'il avait établies pour l'intégrale de Cauchy [4]) (et sur la théorie des équations de Fredholm); il l'exposa [5]) dans le cas de n quelconque, en supposant seulement C *pourvue d'une tangente, et les $a_{jk}(z)$ dérivables une fois le long de C* [6]).

---

[1]) Gesammelte mathematische Werke, (Nachlass), B. G. Teubner, Leipzig 1876, p. 357.

[2]) Nachr. der K. Gesells. der W. zu Göttingen, math.-phys. Klasse, 1905. p. 322. et p. 330; reproduit dans les Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, B. G. Teubner, Leipzig et Berlin, 1912, p. 94 et p. 102.

[3]) Anzeig. der K. Akad. der W., Wien, Math.-Naturw. Klasse, 43, 1906, p. 237.

[4]) Monatsh. für Math. und Phys., 19. 1908, p. 205.

[5]) *loc. cit.* (4), p. 211. Ultérieurement (Bull. Amer. Math. Soc., 18, 1911, p. 64; Math. Ann., 74, 1913, p. 122), G. D. Birkhoff a publié une méthode qui n'en diffère pas essentiellement.

[6]) En fait, la méthode de Plemelj suppose, par exemple pour $n = 2$, que des fonctions de z, telles que $[a_{12}(z)a_{21}(\zeta) - a_{12}(\zeta)a_{21}(z)] : z - \zeta$ sont intégrables sur C(ζ, point quelconque de C); cf. *loc. cit.* (4), p. 215.

Ultérieurement, G. D. Birkhoff [7]) a résolu le problème préliminaire par une méthode directe des plus remarquables; cette méthode, d'un caractère élémentaire, procède par approximations successives, à partir des propriétés classiques de l'intégrale de Cauchy, mais en imposant à C et à $A(z)$ les restrictions suivantes: *C doit être analytique et doit pouvoir être subdivisée en m arcs à l'intérieur de chacun desquels les $a_{jk}(z)$ coïncident avec des fonctions holomorphes; de plus, aux points de subdivision z_h, les $a_{jk}(z)$ doivent être bien définies et posséder sur C une infinité de dérivées successives.* Ces restrictions n'ont aucune influence sur les applications que G. D. Birkhoff a déduites de la solution du problème préliminaire: solution du problème primitif de Riemann et de son extension aux équations irrégulières; solution des „problèmes de Riemann" pour les équations linéaires aux différences finies et aux q- différences; d'ailleurs, selon Birkhoff il ne faisait guère de doute que ces restrictions n'avaient rien d'essentiel pour la validité de sa méthode [8]).

2. Le travail actuel [9]) a précisément pout but d'étendre la méthode de Birkhoff au cas *où, C restant analytique et sans singularité, les $a_{jk}(z)$ satisfont à une condition de Lipschitz* [10]). Afin de réaliser cette extension il suffit de démontrer pour cette nouvelle catégorie d'éléments $a_{jk}(z)$ le théorème suivant, sur lequel repose la convergence des approximations successives de Birkhoff:

Soit $\tau(z)$ une fonction, holomorphe sur C, et telle que sur C $|\tau(z)| = 1$; soient encore p un entier $\geqq 0$ et $g(z)$ une fonction holomorphe à l'intérieur de C, continue et lipschitzienne sur C; la fonction

$$F_{jk}(X) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\tau^p(z)a_{jk}(z)g(z)}{z - X}\, dz,$$

holomorphe à l'extérieur de C, est telle que

$$\max. |F_{jk}(X)| \leqq \eta . \max. |g(z)|, \tag{1}$$

(les maxima étant atteints sur C), et η étant un nombre > 0 indépendant de $g(z)$ et arbitrairement petit pour $p \geqq p_0$ assez

---

[7]) Proceed. of the Amer. Acad. of Arts and Sc., 49, 1913, p. 521.

[8]) *loc. cit.* (7), p. 533.

[9]) Un résumé en a été publié aux C. R. Ac. Sc. Paris, t. 221, 10 sept. 1945, p. 276. Cette Note établissait ce même résultat dans des conditions moins générales: les a_{jk} y étaient assujettis à avoir des dérivées lipschitziennes.

[10]) La méthode s'étend au cas où les $a_{jk}(z)$ seraient höldériens. Nous nous sommes borné au cas lipschitzien pour simplifier l'écriture.

grand [11]). (Ici, et dans tout ce travail, il s'agit d'intégrales au sens de Riemann).

Le présent Mémoire établit donc ce théorème dans les conditions imposées plus haut à C et à $A(z)$; le résultat ainsi obtenu comporte, en outre, les conséquences suivantes. Dans les conditions où s'était placé G. D. Birkhoff, la fonction analytique avec laquelle $a_{jk}(z)$ coïncide le long de l'arc $z_h z_{h+1}$ de C est holomorphe à l'intérieur d'un fuseau, d'extrémités z_h, z_{h+1}, contenant cet arc; la réunion de ces fuseaux constitue un domaine annulaire ω, qui est intérieur à la région $\Omega : \varrho \leqq | \tau(z) | \leqq \varrho^{-1}$ (où ϱ est assez voisin de 1 pour que $\tau(z)$ soit holomorphe dans Ω), et dont les frontières sont deux courbes D_1, D_2, l'une D_1 intérieure, l'autre D_2 extérieure à C. Birkhoff observe que dans les aires annulaires $\Omega \pm \omega$ limitées l'une par D_1 et la frontière intérieure C_1 de Ω, l'autre par D_2 et la frontière extérieure C_2 de Ω, on peut définir, par leurs composantes réelles et imaginaires des fonctions lipschitziennes $a^*_{jk}(z)$ qui se raccordent avec les $a_{jk}(z)$ sur D_1 et D_2 [12]).

Or, appliquée aux conditions de Birkhoff, la méthode actuelle ne fait plus intervenir les points singuliers z_h, ni les courbes D_1 D_2; elle n'exige plus la construction des $a^*_{jk}(z)$; le calcul de p_0 ne nécessite plus l'étude de $\int_{D_1} | \tau |^p ds$, étude pratiquement compliquée par la présence des z_h; ce calcul peut s'effectuer simplement à partir des données.

3. La méthode actuelle utilise de diverses manières l'approximation trigonométrique de $A(z)$. Nous traitons d'abord directement le cas d'une courbe analytique quelconque C (nos 4, 5). Le cas où C est une circonférence et où, de plus, $A(z)$ admet une dérivée lipschitzienne, se laisse étudier par deux méthodes plus précises: l'une applique des théorèmes sur l'approximation par les suites de Fourier dus à M. C. de la Vallée Poussin; elle donne pour η une expression de la forme $Kp^{-1} \log p$ (K, indépendant de p) (Nos 6 à 8); l'autre (Nos 9 à 11), fondée sur l'approximation par les sommes de Fejér conduit à une expression remarquable (20) de la limite [13]) de

[11]) *loc. cit.* (7), p. 525. Il existe d'ailleurs un second théorème, d'énoncé analogue, mais avec échange des mots „intérieur" et extérieur (*loc. cit.* (7), p. 526). Bien entendu, ce second théorème peut être établi aussi par la méthode actuelle.

[12]) *loc. cit.* (7), p. 523.

[13]) L'existence de la limite a été établie par Plemelj lorsque $f(x)$ est lipschitzienne (loc. cit. (4), p. 208); nous l'établissons d'ailleurs directement au no 7, dans cette même hypothèse.

$$F(X) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z^p f(z)}{z - X}\,dz$$

lorsque X, extérieur à C, tend vers un point x de C le long d'un chemin non tangent à C (p entier $\geqq 0$; $f(z)$ fonction définie sur C et *à dérivée lipschitzienne*); pour $p = 0$ la formule montre aussitôt que si $f(z)$ est dérivable sur C, il en est de même de la limite de $F(X)$, ce qui généralise un résultat de J. Plemelj (no. 12). Cette démonstration fait intervenir la différence seconde de $f(z)$; au No. 14 on trouvera deux démonstrations, dues à M. Choquet et à M. Pauc, d'un théorème très général concernant cette différence.

I. *C* est une courbe fermée analytique quelconque.

4. Nous désignerons simplement l'élément $a_{jk}(z)$ de la matrice $A(z)$ par $a(z)$; soit s l'arc de C ($0 \leqq s \leqq l$; l, longueur de C); on pourra poser $a(z) = f(s)$, la fonction $f(s)$ étant prolongée hors de $(0, l)$ par la convention $f(s + l) = f(s)$. Faisons maintenant $s = \frac{l}{2\pi}\theta$; $f(s)$ deviendra une fonction $b(\theta)$, de période 2π, et l'on aura

$$a(z) = b(\theta).$$

Si la fonction $a(z)$ est bornée et lipschitzienne sur C, il en est de même de $b(\theta)$, et réciproquement; car, soient z' et z'' deux points quelconques de C, θ' et θ'' deux déterminations de θ correspondant à ces points et telles que $|\theta' - \theta''| < \pi$; le rapport

$$|\theta' - \theta''| : |z' - z''|$$

est inférieur à un nombre positif μ, indépendant de z' et z''. Sinon, il existerait une suite (z_n', z_n'') sur laquelle le rapport ne serait pas borné, ce qui est absurde, C étant régulière et sans point double; d'ailleurs, le rapport inverse reste $< l : 2\pi$. La fonction $b(\theta)$ satisfait donc, quels que soient θ', θ'' à une inégalité

$$\left| \frac{b(\theta'') - b(\theta')}{\theta'' - \theta'} \right| < A \tag{2}$$

Considérons alors la $n^{\text{ième}}$ somme de Fejér, $b_n(\theta)$, de $b(\theta)$, et soit ε un nombre > 0 arbitrairement petit; nous allons établir le

Lemme. On peut choisir un entier $N(\varepsilon)$ assez grand pour que l'inégalité $n > N$ entraîne

$$(3) \qquad \left| \frac{[b(\theta'') - b_n(\theta'')] - [b(\theta') - b_n(\theta')]}{\theta'' - \theta'} \right| < A\varepsilon \text{ ou } A,$$

selon que $|z' - z''| > \varepsilon$ ou $\leqq \varepsilon$ (z', z'', points de C correspondant à θ', θ'' avec $|\theta' - \theta''| < \pi$)

D'après une formule connue [14]) on a

$$\frac{b(\theta'') - b_n(\theta'') - b(\theta') + b_n(\theta')}{\theta'' - \theta'} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{B}(t) dt,$$

avec

$$\mathfrak{B}(t) = \frac{b(\theta'') - b\left(\theta'' + \frac{2t}{n}\right) - b(\theta') + b\left(\theta' + \frac{2t}{n}\right)}{\theta'' - \theta'} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2.$$

Choisissons T tel que

$$T > \frac{6}{\pi\varepsilon};$$

il viendra

$$(4) \qquad \left| \frac{1}{\pi} \int_{T}^{+\infty} \mathfrak{B}(t) dt \right| <$$

$$< \frac{1}{\pi} \int_{T}^{+\infty} \left(\left| \frac{b(\theta'') - b(\theta')}{\theta'' - \theta'} \right| + \left| \frac{b\left(\theta'' + \frac{2t}{n}\right) - b\left(\theta' + \frac{2t}{n}\right)}{\theta'' - \theta'} \right| \right) \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt$$

$$< \frac{2A}{\pi} \int_{T}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} < \frac{A\varepsilon}{3},$$

et, de même,

$$(4') \qquad \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-T} \mathfrak{B}(t) dt \right| < \frac{A\varepsilon}{3}.$$

Choisissons ensuite un entier N tel que pour $n > N$ on ait

$$|b(\theta_2) - b(\theta_1)| < \frac{\pi A \varepsilon^2}{3l},$$

quels que soient θ_1 et θ_2 satisfaisant à

$$|\theta_2 - \theta_1| < \frac{T}{2n}.$$

---

[14]) C. de LA VALLÉE POUSSIN, Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle. Paris, Gauthier-Villars, 1919, p. 81.

Il viendra, pour $n > N$ et pour $|z' - z''| > \varepsilon$, donc pour $|\theta'' - \theta'| > 2\pi\varepsilon\, l^{-1}$:

$$(5)\quad \left|\frac{1}{\pi}\int_{-T}^{+T}\mathfrak{B}(t)dt\right| <$$

$$< \frac{l}{2\pi^2\varepsilon}\int_{-T}^{+T}\left(\left|b(\theta'')-b\left(\theta''+\frac{t}{2n}\right)\right|+\left|b(\theta')-b\left(\theta'+\frac{t}{n}\right)\right|\right)\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt$$

$$< \frac{A\varepsilon}{3\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt = \frac{A\varepsilon}{3}.$$

Le rapprochement de (4), (4'), (5) établit (3) pour $|z'-z''| > \varepsilon$. D'ailleurs, pour $|z'-z''| \leqq \varepsilon$,

$$\frac{1}{\pi}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\mathfrak{B}(t)dt\right| < \frac{2A}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt = 2A,$$

et notre lemme se trouve démontré dans tous les cas.

5. Considérons alors l'expression

$$F(x) = \lim_{X\to x}\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\tau^p(z)\, a(z)\, g(z)}{z - X}dz$$

où $\tau(z)$, $g(z)$ sont définis comme au no. 2 et où X est un point extérieur à C qui tend vers le point x de C le long d'un chemin non tangent à C en x: ainsi, on peut construire deux secteurs angulaires opposés, $\mathfrak{A}$, dont le sommet commun est x, dont les côtés font avec la tangente à C en x deux angles égaux à $2\alpha > 0$, et à l'extérieur desquels se trouve X pour $|X - x|$ assez petit. L'existence de la limite est d'ailleurs assurée quand $a(z)\, g(z)$ est lipschitzien le long de C [15]). Si l'on pose $a_n(z) = b_n(\theta)$, l'existence de

$$F_n(x) = \lim_{X\to x}\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\tau^p(z)[a_n(z) - a_n(x) + a(x)]\, g(z)}{z - X}dz$$

est donc assurée aussi pour tout n, et l'on peut encore introduire

$$(6)\quad F(x) - F_n(x) =$$

$$= \lim_{X\to x}\frac{1}{2\pi i}\int_C \tau^p(z)\frac{a(z) - a_n(z) - a(x) + a_n(x)}{z - x}\,\frac{z - x}{z - X}\, g(z)\, dz.$$

---

[15]) L'existence et la continuité lipschitzienne de la fonction limite ont été établies par J. Plemelj (loc. cit. (4), p. 209), dans l'hypothèse où X tend vers x suivant un chemin normal à C en x; mais la limite existe encore (et reste la même) si X tend vers x le long d'un chemin quelconque (non tangent à C); Cf. Hurwitz-Courant, Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen, 3te Auflage, Berlin, Springer, 1929, p. 330—335. Emile Picard, Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles, avec des applications à la Physique mathématique; Paris, Gauthier-Villars, 1927, p. 68.

Or construisons un couple de secteurs angulaires $\mathfrak{A}'$, de même définition que $\mathfrak{A}$, à cela près que 2α sera remplacé par α; $\mathfrak{A}'$ sera donc intérieur à $\mathfrak{A}$. Prenons encore de part et d'autre de x sur C deux points x' et x'', à l'intérieur de $\mathfrak{A}'$ et tels que sur l'arc $x'xx''$, ou γ', on ait $|z-x| < \varepsilon$ (ε, arbitrairement petit > 0) et que la longueur de cet arc soit $< 4\varepsilon$; soit enfin γ'' l'arc complémentaire de γ' par rapport à C. Sur γ' on a:

$$\left|\frac{z-x}{z-X}\right| = \frac{\sin \hat{X}}{\sin \hat{x}} < \frac{1}{\sin \alpha},$$

et l'on peut choisir X assez voisin de x pour que sur γ'' on ait

$$\frac{z-x}{z-X} < 2.$$

Or, d'après le lemme (no. 4) et μ étant défini comme plus haut, il existe un entier $N(\varepsilon)$ tel que pour $n > N$

$$\left|\frac{a(z)-a_n(z)-a(x)+a_n(x)}{z-x}\right|$$

soit respectivement inférieur à $A\mu$ ou à $A\varepsilon\mu$, selon que z est sur γ' ou sur γ''. Ainsi, le second membre de (6) est en module inférieur à

$$\frac{1}{2\pi}\left(\frac{A\mu}{\sin\alpha}G\,.\,4\varepsilon + 2A\varepsilon\mu G l\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{\sin\alpha} + l\right)\mu A G \varepsilon,$$

G désignant le maximum de $|g(z)|$ sur C; et l'on pourra choisir ε assez petit pour que le second membre soit $< \frac{\eta}{2}G$, η étant le nombre figurant dans (1).

D'autre part, $\tau(z)$, $a_n(z)$ et $g(z)$ étant holomorphes dans l'aire comprise entre C et C_1 (No 2), on a

$$|F_n(x)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{\tau^p(z)[a_n(z)-a_n(x)+a(x)]\,g(z)}{z-X}dz\right|$$
$$< \frac{3Bl_1}{2\pi d}G\varrho^p,$$

en désignant par B une borne supérieure de $|a(z)|$ et de $|a_n(z)|$ sur C, par l_1 la longueur de C_1 et par d la distance (C, C_1); et l'on pourra choisir p assez grand pour que le dernier membre soit $< \frac{\eta}{2}G$.

En définitive, on pourra donc choisir p assez grand pour vérifier l'inégalité (1) de Birkhoff.

II. *C* est une circonférence; emploi des sommes de Fourier.

6. Comme il a été dit au No 3, nous supposerons maintenant que le contour analytique C est une circonférence et nous appliquerons les théorèmes III et V de C. de la Vallée Poussin sur l'approximation par les sommes de Fourier [16]). Ces théorèmes ont pour but de limiter le reste de la série de Fourier d'une fonction dérivable $f(x)$; nous allons montrer d'abord que *les limitations fournies par ces théorèmes restent valables pour le reste de la série conjuguée.* Surmontons d'un trait toutes les notations qui se rapportent à la conjuguée de la série de Fourier de $f(x)$. Nous pourrons énoncer d'abord le

Théorème $\overline{III}$. Si $f(x)$, de période 2π, admet une dérivée d'ordre r, intégrable et de module $< M_r$, on a pour le reste $\overline{R_n}$ de la série de Fourier conjuguée de celle de $f(x)$:

$$|\overline{R}_n(x)| < (B_1 \log n + C_1)\frac{M_r}{n^r},$$

B_1 et C_1 étant des constantes numériques indépendantes de $f(x)$.

En effet, soit σ_k la somme de Fourier d'ordre k de $f^{(r)}(x)$; suivant que r est pair ($= 2q$) ou impair ($= 2q + 1$), on a respectivement:

$$\overline{R}_n = (-1)^q \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\overline{\sigma}_k - \overline{\sigma}_{k-1}}{k^r} \text{ ou } \overline{R}_n = (-1)^q \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\sigma_k - \sigma_{k-1}}{k^r}$$

On retombe donc, avec interversion de parités, sur les deux cas envisagés par C. de la Vallée Poussin [17]) pour l'évaluation de R_n.

Nous n'utiliserons ce théorème que pour $r = 1$ et $r = 2$.

Théorème $\overline{V}$. Si $f(x)$, de période 2π, admet une dérivée première [18]) dont le module de continuité est $\omega_1(\delta)$, on a

$$|\overline{R}_n| < |B_2 \log n + C_2| \frac{\omega_1\left(\frac{\pi}{n}\right)}{n},$$

B_2 et C_2 étant des constantes numériques indépendantes de $f(x)$.

En effet, d'après le théorème $\overline{\text{III}}$, la série conjuguée de la série de Fourier de $f(x)$ est convergente; soit $\overline{f}(x)$ sa somme; avec les

---

[16]) *loc. cit.* (14), p. 23 et 27.

[17]) *loc. cit.* (14), p. 23 et 24.

[18]) Le théorème s'étend au cas d'une dérivée d'ordre quelconque.

notations de C. de la Vallée Poussin [19]), on a $\bar{f} = \overline{f - F} + \bar{F}$. Or d'après le théorème $\overline{\text{III}}$ (pour $r = 1$) le reste de $\overline{f - F}$ est en module $< (B_1 \log n + C_1) \dfrac{2\omega_1(\delta)}{n}$. On verrait de même (théorème $\overline{\text{III}}$ pour $r = 2$) que le reste de $\bar{F}$ est inférieur en module à

$$(B_1 \log n + C_1) \frac{1}{n^2} \frac{\omega_1(\delta)}{\delta},$$

et la démonstration s'achève exactement comme pour le théorème V de C. de la Vallée Poussin.

7. Cela étant, nous allons évaluer l'expression

$$I_p(x) = \lim_{X \to x} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z^p a(z)}{z - X} dz$$

où p est un entier $\geqq 0$, où $a(z)$ est définie sur $C(|z| = 1)$ et lipschitzienne, et où X tend vers x comme au no. 5. Posons sur $C : z = e^{i\theta}$, $a(z) = b(\theta)$; $R[b(\theta)]$ et $R[ib(\theta)]$ sont deux fonctions périodiques, continues, à variation bornée, donc développables en séries de Fourier uniformément convergentes pour tout θ. Il en est de même de $b(\theta)$ et l'on peut écrire $b(\theta) = \sum\limits_0^\infty s_\nu$, avec

$$s_\nu = a_\nu \cos \nu\theta + b_\nu \sin \nu\theta, \tag{7}$$

$$\begin{aligned} I_p(x) &= \lim_{X \to x} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z^p \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} s_\nu}{z - X} dz \\ &= \lim_{X \to x} \frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_C \frac{z^p[a_\nu(z^\nu + z^{-\nu}) - ib_\nu(z^\nu - z^{-\nu})]}{2(z - X)} dz \\ &= \lim_{X \to x} \left[- \sum_{\nu=p+1}^{\infty} \frac{a_\nu + ib_\nu}{2} X^{p-\nu} \right] \end{aligned}$$

Or pour $X = x$ cette dernière série est convergente et a pour somme $-\dfrac{x^p}{2} [R_p(x) + i\bar{R}_p(x)]$, R_p et $\bar{R}_p$ désignant les restes de la série de Fourier de $b(\theta)$ et de sa conjuguée; d'après le théorème d'Abel (applicable, puisque le chemin décrit par X n'est pas tangent à C), on a donc [20])

[19]) *loc. cit.* (14), p. 28.

[20]) Voir la note (15) page 6.

(8) $$I_p(x) = -\frac{x^p}{2}\,[R_p(x) + i\overline{R}_p(x)];$$

ainsi, la limite est continue (et lipschitzienne) sur C.

8. Considérons maintenant l'intégrale

$$F(X) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z^p a(z)\, g(z)}{z - X}\, dz;$$

nous supposerons que 1°) la *fonction* $a(z)$, définie sur C, non seulement est lipschitzienne, mais *possède sur C une dérivée lipschitzienne*; 2°) *la fonction*

(9) $$g(z) = \sum_0^\infty H_n z^n$$

est holomorphe à l'intérieur de C, continue et lipschitzienne sur C [21]); le long de C (9) est la série de Fourier d'une fonction continue à variation bornée, donc converge uniformément; on sait d'ailleurs que

(10) $$|\,H_n\,| \leqq M_1,$$

M_1. étant le maximum de $|\,g(z)\,|$ pour $|\,z\,| \leqq 1$. Or, en vertu de la convergence uniforme de (9) sur C, on a, (X tendant vers x comme plus haut, et $F(x)$ désignant la limite de $F(X)$):

$$F(x) = \lim_{X\to x}\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z^p a(z) \sum\limits_{n=0}^\infty H_n z^n}{z - X}\, dz$$

$$= \lim_{X\to x}\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^\infty H_n \int_C \frac{z^{p+n} a(z)}{z - X}\, dz,$$

soit, d'après (8):

(11) $$F(x) = -\frac{x^p}{2}\sum_{n=0}^\infty H_n\,[R_{p+n}(x) + i\overline{R}_{p+n}(x)].$$

Pour justifier la seconde interversion des limites, il suffit de montrer que, X tendant vers x, l'expression

---

[21]) Donc aussi $a(z)g(z)$ et, par suite, la limite $F(x)$ définie plus bas. Cette propriété est importante pour l'application aux approximations successives de G. D. Birkhoff: elle montre, par récurrence, que toutes les fonctions P_m, Q_m, [loc. cit. (7), p. 527] sont lipschitziennes sur C; l'hypothèse qu'on vient de faire sur $g(z)$ sera donc toujours verifiée dans ces approximations.

$$J_n = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=n}^{\infty} H_\nu \int_C \frac{z^{p+\nu} a(z)}{z - X} dz$$

reste arbitrairement petite en module pour n assez grand. Or $\varrho_n(z)$ désignant le reste de la série (9), uniformément convergente sur C, on a

$$J_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z^p a(z)\, \varrho_n(z)}{z - X} dz$$

$$= \frac{x^p a(x)}{2\pi i} \int_C \frac{\varrho_n(z) dz}{z - X} + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z^p\, a(z) - x^p a(x)}{z - x} \; \frac{z - x}{z - X} \; \varrho_n(z)\, dz.$$

Mais la première intégrale du dernier membre est nulle. Pour évaluer la seconde, on écrira

$$\frac{z^p a(z) - x^p a(x)}{z - x} = \frac{z^p - x^p}{z - x} a(z) + x^p \frac{a(z) - a(x)}{z - x},$$

et l'on décomposera C, comme au no. 5, en deux arcs γ' et γ''; sur ces arcs, on évaluera $| z - x | : | z - X |$ comme au no. 5, èt, en remarquant que $a(z)$ est bornée et lipschitzienne, et que $| \varrho_n(z) |$ est uniformément petit sur C pour n assez grand, on en déduira sans peine la propriété annoncée.

Or, d'après le théorème V de C de la Vallée Poussin et d'après son conjugué, on a

$$(12) \quad | R_{p+n}(x) | \text{ et } | \overline{R}_{p+n}(x) | < M_2 \, \frac{B_3 \log (p + n) + C_3}{(p + n)^2},$$

M_2 étant la borne supérieure de $| b'(\theta'') - b'(\theta') | : | \theta'' - \theta' |$, et B_3, C_3 étant des constantes numériques. Il vient alors, d'après (11), (10) et (12) (et pour $p > 0$)

$$| F(x) | < M_1 M_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_3 \log (p + n) + C_3}{(p + n)^2} < M_1 M_2 \frac{B_4 \log p + C_4}{p},$$

B_4 et C_4 étant de nouvelles constantes numériques, et ceci établit l'inégalité (1) de Birkhoff avec $\eta = K \dfrac{\log p}{p}$ [K, indépendant de p et de $g(x)$].

III. *C* est une circonférence; emploi des sommes de Fejér.

9. Les notations étant les mêmes qu'au no. 7, mais *la dérivée* $a'(z)$ *étant supposée lipschitzienne* comme au no. 8, nous désig-

nerons la n^{ieme} somme de Fejér de $a(z) = b(\theta)$ par $a_n(z) = b_n(\theta)$, soit

$$a_n(z) = s_0(z) + \left(1 - \frac{1}{n}\right) s_1(z) + \ldots + \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) s_{n-1}(z),$$

la notation $s(z)$ signifiant que la somme (7) a été calculée pour tel que $z = e^{i\theta}$. Posons encore

$$I_{p,n}(X) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z^p a_n(z)}{z - X}\, dz,$$

et

$$I_{p,n}(x) = \lim_{X \to x} I_{p,n}(X),$$

X tendant toujours vers x comme au no. 5; soit enfin

$$\bar{s}_\nu = -a_\nu \sin \nu\theta + b_\nu \cos \nu\theta,$$

$\bar{s}_\nu(x)$ désignant la somme précédente, calculée en θ tel que $e^{i\theta} = x$; il viendra, par un calcul analogue à celui du no. 7:

$$I_{p,n}(x) = -\frac{x^p}{2}\left\{\left(1 - \frac{p+1}{n}\right)[s_{p+1}(x) + i\bar{s}_{p+1}(x)] + \ldots \right.$$
$$\left. + \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)[s_{n-1}(x) + i\bar{s}_{n-1}(x)]\right\}.$$

Faisant encore

$$s_0(x) + \ldots + s_\nu(x) = S_\nu,\ \bar{s}_0(x) + \ldots + \bar{S}_\nu(x) = \bar{S}_\nu$$

on trouvera

$$I_{p,n}(x) = -\frac{x^p}{2} A,$$

avec

$$A = -\left(1 - \frac{p+1}{n}\right)(S_p + i\bar{S}_p) + \frac{1}{n}(S_{p+1} + i\bar{S}_{p+1} + \ldots + S_{n-1} + i\bar{S}_{n-1}).$$

Mais, pour $\nu > 0$

$$a_\nu + ib_\nu = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} b(u) e^{\nu i u}\, du,$$

d'où, *θ se rapportant désormais au point x*:

$$s_\nu(x) + i\bar{s}_\nu(x) = (a_\nu + ib_\nu)\, e^{-\nu i\theta} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} b(\theta + t)\, e^{\nu i t}\, dt,$$

et pour $\nu = 0$ on divisera le dernier membre par 2. Ainsi:

$$S_\nu + i\overline{S}_\nu = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} b(\theta + t)\,\frac{e^{(\nu+\frac{1}{2})it} - \cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\,dt \qquad (\nu \geqq o),$$

puis

$$S_{p+1} + i\overline{S}_{p+1} + \ldots + S_{n-1} + i\overline{S}_{n-1} =$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} b(\theta + t)\left[\frac{e^{(p+1)it} - e^{nit}}{2\sin^2\frac{t}{2}} + i(n - p - 1)\cot\frac{t}{2}\right]dt,$$

et

$$A = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi} b(\theta + t)\left[i(n - p - 1)\frac{e^{(p+\frac{1}{2})it} - \cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} + \right.$$
$$\left. + \frac{e^{(p+1)it} - e^{nit}}{2\sin^2\frac{t}{2}} + i(n - p - 1)\cot\frac{t}{2}\right]dt,$$

soit encore

$$A = \frac{1}{4n\pi}\int_0^{2\pi} b(\theta + t)\left[(n-p)e^{(p+1)it} - (n-p-1)e^{pit} - e^{nit}\right]\frac{dt}{\sin^2\frac{t}{2}}$$

et, en utilisant la transformation [22]) de C. de la Vallée Poussin:

$$(13)\quad A = \frac{1}{n\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} b(\theta + t)[n-p)e^{(p+1)it} - (n-p-1)e^{pit} - e^{nit}]\,\frac{dt}{t^2}.$$

10. Afin d'obtenir la valeur de $I_p(x)$ (no. 7), nous calculerons d'abord $\lim\limits_{n\to\infty} I_{p,n}(x)$, et pour cela nous allons transformer l'expression de A. Soit d'abord $p > 0$, et posons

$$h(t) = \frac{1}{n\pi}(p + 1)(n - p)\,b\left(\theta + \frac{t}{p+1}\right),$$
$$k(t) = -\frac{1}{n\pi}\,p(n - p - 1)\,b\left(\theta + \frac{t}{p}\right),$$
$$l(t) = -\frac{1}{\pi}\,b\left(\theta + \frac{t}{n}\right);$$

on peut écrire

$$(14)\qquad n\pi A = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{+\infty}\right),$$

---

[22]) *loc. cit.* (14), p. 31.

l'intégrand étant le même que dans (13); remplacant successivement t par $t: p+1$, $t:p$ et $t:n$ dans les trois intégrales dont la somme constitue d'après (13) chacune des deux intégrales (14), nous aurons

$$A = \lim_{\varepsilon \to 0} [A_1(\varepsilon) + A_2(\varepsilon)],$$

avec

$$A_1(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{-n\varepsilon} [h(t) + k(t) + l(t)] \frac{e^{it}}{t^2}\, dt + \int_{n\varepsilon}^{+\infty},$$

$$A_2(\varepsilon) = \int_{-n\varepsilon}^{-(p+1)\varepsilon} h(t) \frac{e^{it}}{t^2}\, dt + \int_{(p+1)\varepsilon}^{n\varepsilon}$$

$$+ \int_{-n\varepsilon}^{-p\varepsilon} k(t) \frac{e^{it}}{t^2}\, dt + \int_{p\varepsilon}^{n\varepsilon}$$

(ici et plus loin chaque intégrand non écrit est identique au précédent). Or, $b(\theta)$ vérifiant par hypothèse une relation

$$(15) \qquad | b'(\theta_2) - b'(\theta_1) | < M_2 | \theta_2 - \theta_1 |,$$

on trouve en intégrant $\int_0^t b'(\theta + u)\, du$:

$$(16) \qquad b(\theta + t) = b(\theta) + t b'(\theta) + \frac{\lambda M_2}{2} t^2$$

($|\lambda| < 1$), et cette formule, jointe à l'identité

$$(p+1)(n-p) \int_{(p+1)\varepsilon}^{n\varepsilon} \frac{dt}{t^2} - p(n-p-1) \int_{p\varepsilon}^{n\varepsilon} \frac{dt}{t^2} = 0,$$

montre que $\lim_{\varepsilon \to 0} A_2(\varepsilon) = 0$. On en déduit, pour $p > 0$

$$(17)_p \quad I_{p,n}(x) = -\frac{x^p}{2n\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[(p+1)(n-p)\, b\left(\theta + \frac{t}{p+1}\right) - \right.$$

$$\left. - p(n-p-1)\, b\left(\theta + \frac{t}{p}\right) - n\, b\left(\theta + \frac{t}{n}\right) \right] \frac{e^{it}}{t^2} dt,$$

et, à l'aide de (16), on pourra *vérifier* que le second membre a bien un sens. D'autre part, pour $p = 0$ on trouve par un calcul analogue $A = \lim_{\varepsilon \to 0} A(\varepsilon)$, avec

$$A(\varepsilon) = A_3(\varepsilon) + A_4(\varepsilon),$$

$$A_3(\varepsilon)=\frac{1}{n\pi}\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\left[b(\theta+t)(ne^{it}-n+1)-nb\left(\theta+\frac{t}{n}\right)e^{it}\right]\frac{dt}{t^2}+\frac{1}{n\pi}\int_{\varepsilon}^{+\infty},$$

$$A_4(\varepsilon)=\frac{1}{\pi}\int_{-n\varepsilon}^{-\varepsilon}b\left(\theta+\frac{t}{n}\right)e^{it}\frac{dt}{t^2}+\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{n\varepsilon}.$$

Or, dans le voisinage de $t=0$ la partie principale de l'intégrand relatif à $A_3(\varepsilon)$ est $(1-n)t^{-2}b(\theta)$ [d'après (16); — on a négligé les termes en t^{-1}, car leurs contributions se détruisent dans la somme des deux intégrales qui constitue $A_3(\varepsilon)$]. Ceci nous conduit à écrire

$$A(\varepsilon)=\frac{1}{n\pi}\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\Big[b(\theta+t)(ne^{it}-n+1)+(n-1)\,b(\theta)-$$
$$-nb\left(\theta+\frac{t}{n}\right)e^{it}\Big]\frac{dt}{t^2}+\frac{1}{n\pi}\int_{\varepsilon}^{+\infty}+A_4(\varepsilon)+\frac{2(1-n)}{n\pi\varepsilon}\,b(\theta).$$

On vérifie aisément que la somme des deux derniers termes tend vers 0 avec ε, et l'on trouve ainsi

$$(17)_0\quad I_{n,0}(x)=-\frac{1}{2n\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big[b(\theta+t)(ne^{it}-n+1)+$$
$$+(n-1)b(\theta)-nb\left(\theta+\frac{t}{n}\right)e^{it}\Big]\frac{dt}{t^2}.$$

Les intégrales $(17)_p$ et $(17)_0$ étant uniformément convergentes, quel que soit n, on peut écrire

$$(18)\quad\left\{\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}I_{p,n}(x)&=-\frac{x^p}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big[(p+1)b\left(\theta+\frac{t}{p+1}\right)+\\&\qquad-pb\left(\theta+\frac{t}{p}\right)-b(\theta)\Big]\frac{e^{it}}{t^2}\,dt\quad(p>0),\\\lim_{n\to\infty}I_{0,n}(x)&=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[b(\theta+t)-b(\theta)]\frac{e^{it}-1}{t^2}\,dt.\end{aligned}\right.$$

11. Or il est facile de voir que, pour $p\geqq 0$, et X tendant toujours vers x comme au no. 5:

$$(19)\qquad\lim_{n\to\infty}\lim_{X\to x}I_{p,n}(X)=\lim_{X\to x}\lim_{n\to\infty}I_{p,n}(X)$$

La valeur du premier membre est donnée par (18), et le second n'est autre que $I_p(x)$, puisque $a_n(z)$ converge uniformément vers

$a(z)$ le long de C. Or pour établir (19) il suffit de montrer que, X tendant vers x,

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_C z^p \frac{a(z) - a_n(z)}{z - X} dz \right|$$

reste arbitrairement petit pour n assez grand, ou encore qu'il en est de même de

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z^p[a(z) - a_n(z) - a(x) + a_n(x)]}{z - X} dz;$$

mais c'est précisément l'un des résultats démontrés au no. 5. On a donc en définitive:

$$(20) \quad \begin{cases} I_p(x) = -\dfrac{x^p}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left[(p+1)\, b\left(\theta + \frac{t}{p+1}\right) - pb\left(\theta + \frac{t}{p}\right) - \right. \\ \qquad\qquad \left. - b(\theta)\right] \dfrac{e^{it}}{t^2} dt, \quad (p > 0), \\ I_0(x) = -\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} [b(\theta + t) - b(\theta)] \frac{e^{it} - 1}{t^2} dt. \end{cases}$$

En utilisant la transformation inverse de celle qui a été rappelée plus haut [23]) on pourrait remplacer ces intégrales par d'autres, prises entre 0 et 2π.

12. Nous allons évaluer les intégrales (20). Supposons d'abord $p > 0$ et posons

$$\mathfrak{F}(t) = (p + 1)\, b\left(\theta + \frac{t}{p+1}\right) - pb\left(\theta + \frac{t}{p}\right) - b(\theta);$$

nous subdiviserons $(-\infty, +\infty)$ en intervalles d'étendue $2p(p + 1)\pi$, et pour

$$2kp(p + 1)\pi \leqq t < 2(k + 1)p(p + 1)\pi$$

nous poserons

$$t = 2p(p + 1)\pi(v + k),$$

v variant de 0 à 1. D'après (16) il existe M_1 tel que

$$(21) \qquad | b(\theta + h) - b(\theta) | < M_1 | h |,$$

[23]) Voir la note (14) page 5.

et l'on trouvera pour $k \geqq 0$: $|\mathfrak{F}(t)| < 4pM_1\pi v$, d'où, pour $k \geqq 1$,

$$\left|\int_{2kp(p+1)\pi}^{2(k+1)p(p+1)\pi} \mathfrak{F}(t)\frac{e^{it}}{t^2}\,dt\right| < \frac{2M_1}{p+1}\int_0^1 \frac{vdv}{(v+k)^2} < \frac{M_1}{p+1}\cdot\frac{1}{k^2};$$

pour $k \leqq -1$, on obtiendrait une limitation analogue. Pour $k = 0$, le même changement de variable donnera

$$\left|\int_1^{2p(p+1)\pi} \mathfrak{F}(t)\frac{e^{it}}{t^2}\,dt\right| < \frac{2M_1}{p+1}\int_{\frac{1}{2p(p+1)\pi}}^1 \frac{dv}{v} = \frac{2M_1}{p+1}\log\left[2p(p+1)\pi\right],$$

et l'on procédera de même pour l'intervalle $[-2p(p+1)\pi, -1]$. On a enfin, d'après (16) et avec $|\lambda_1|$, $|\lambda_2| < 1$:

$$\left|\int_{-1}^{+1} \mathfrak{F}(t)\frac{e^{it}}{t^2}\,dt\right| < \frac{M_2}{2}\int_{-1}^{+1}\left(\frac{|\lambda_1|}{p+1} + \frac{|\lambda_2|}{p}\right)dt < \frac{2M_2}{p},$$

d'où finalement:

$$|I_p(x)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{F}(t)\frac{e^{it}}{t^2}\,dt\right| < \frac{2M_1}{p+1}\left\{\frac{\pi^2}{6} + 2\log[p(p+1)\pi]\right\} + \frac{2M_2}{p},$$

expression qui, pour p assez grand est $< 9\,M_1p^{-1}\log p$: pour $g(z) \equiv 1$ la méthode des nos 6—8 aurait conduit à une limitation du type précédent.

En ce qui concerne $(20)_2$ on subdivise $(-\infty, +\infty)$ par les points $t = 2k\pi$, et pour $2k\pi \leqq t < 2(k+1)\pi$ (sauf pour $|t| < 2\pi$) on posera $t = 2\pi(k+v)$; on obtiendra ainsi, d'après (21)

$$|I_0(x)| < \frac{M_1}{\pi}\sum_1^\infty \frac{1}{k^2} + \frac{M_1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|e^{it}-1|}{t}\,dt = DM_1,$$

D étant une certaine constante numérique $\left(< 2 + \frac{\pi}{6} < 3\right)$.

On notera que, lorsque C est une circonférence, les limitations obtenues pour $I_0(x)$ et $I_p(x)$ sont indépendantes du module maximum de $a(x)$; il devait bien en être ainsi, *a priori*, car l'addition d'une constante quelconque à $a(z)$ change ce module, mais ne modifie pas $I_p(X)$ $(p \geqq 0)$, ni, par conséquent, $I_p(x)$.

IV. Remarques complémentaires.

13. La formule $(20)_2$ montre que si $b(\theta)$ — ou $a(z)$ — possède une dérivée lipschitzienne, $I_0(x)$ admet une dérivée continue, et ceci complète un résultat de J. Plemelj [24]).

[24]) Voir la note (15), page 6.

En effet, posons

$$J(\theta) = I_0(e^{i\theta}),$$
$$\Delta_2 b = b(\theta + t + h) - b(\theta + t) - b(\theta + h) + b(\theta),$$

il viendra, avec $\varepsilon > 0$:

$$\frac{J(\theta+h) - J(\theta)}{h} = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\Delta_2 b}{h} \frac{e^{it}-1}{t^2}\, dt - \frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{+\infty} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{\Delta_2 b}{ht}\frac{e^{it}-1}{t}\, dt. \tag{22}$$

Or, d'après (15)

$$|\Delta_2 b| = \left| \int_0^h [b'(\theta + t + u) - b'(\theta + u)] du \right| < M_2 |th|; \tag{23}$$

on peut donc choisir ε assez petit pour que la dernière intégrale de (22) soit, en module, arbitrairement petite; cela fait, on pourra prendre $|h|$ assez petit pour que les deux autres intégrales de (22), qui sont uniformément convergentes, aient une somme arbitrairement voisine de

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{-\varepsilon} [b'(\theta + t) - b'(\theta)] \frac{e^{it}-1}{t^2}\, dt - \frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{+\infty};$$

on en déduit aussitôt:

$$J'(\theta) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} [b'(\theta + t) - b'(\theta)] \frac{e^{it}-1}{t^2}\, dt.$$

En subdivisant cette intégrale comme dans (22), et en procédant comme tout à l'heure, on établira la continuité de $J'(\theta)$. Mais $J'(\theta) = iI'_0(x)\, e^{i\theta}$; on peut donc écrire:

$$I'_0(x) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} [b'(\theta + t) - b'(\theta)] \frac{e^{i(t-\theta)} - e^{-i\theta}}{t^2}\, dt.$$

Enfin, en appliquant $(20)_2$ à $b_1(\theta) = e^{\nu i\theta} b(\theta)$, on verrait que $I_\nu(x)$ possède aussi une dérivée continue, qu'on peut obtenir d'ailleurs à partir de $(20)_1$.

14. D'après J. Plemelj [25]) on a, avec les notations du No. 7,

$$I_0(x) = -\tfrac{1}{2}\, a(x) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\overline{C}} \frac{a(z)}{z - x}\, dz. \tag{24}$$

[25]) *loc. cit.* (4), p. 207.

l'intégrale surlignée étant considérée comme une valeur principale au sens de Cauchy. Il est aisé de montrer que cette formule équivaut à (8), pour $p = 0$. On a, en effet,

$$\frac{1}{2\pi i}\overline{\int_C}\frac{a(z)}{z-x}dz = \frac{1}{2\pi i}\overline{\int_C}\frac{a(z)-a(x)}{z-x}dz + \frac{a(x)}{2\pi i}\overline{\int_C}\frac{dz}{z-x};$$

mais la première intégrale de second membre est une intégrale au sens habituel, et la seconde est égale à πi. Le second membre de (24) est donc égal à

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{a(z)-a(x)}{z-x}dz,$$

ou, en vertu de la convergence uniforme de Σs_ν (no. 7) sur C, à

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_1^\infty\int_C\frac{a_n(z^n+z^{-n}-x^n-x^{-n})-ib_n(z^n-z^{-n}-x^n+x^{-n})}{2(z-x)}dz.$$

Le calcul du résidu pour $x = 0$ est immédiat, et l'on retrouve bien

$$I_0(x) = -\tfrac{1}{2}\sum_1^\infty (a_n + ib_n)\,x^{-n},$$

c'est à dire l'expression (8) pour $p = 0$. On vérifierait de même (8) pour p quelconque.

15. Il résulte de (23) que si $b'(\theta)$ est lipschitzienne, $|t^{-1}h^{-1}\Delta_2 b|$ est borné. Mais *on peut établir la réciproque*, comme me l'ont communiqué, en même temps (juillet 1945), et indépendamment l'un de l'autre, M. G. Choquet et M. Pauc. Voici la démonstration de Choquet.

Remarquons que la condition

$$\left|\frac{f(x+h+k)-f(x+h)-f(x+k)+f(x)}{hk}\right| \leqq M$$

peut s'écrire

$$\left|\frac{f(y+h)-f(y)}{h}-\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| \leqq M\,|\,y-x\,| \tag{25}$$

Ceci entraîne que, pour tout h, $\varphi_h(x) = \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ est une fonction continue à pentes bornées par M. Les $\varphi_h(x)$ forment donc une famille également continue. Soit $\varphi(x)$ une fonction limite pour h tendant vers 0 d'une sous-famille des $\varphi_h(x)$; on a: soit $\varphi(x)$

continue, soit $\varphi(x) = +\infty$, soit $\varphi(x) = -\infty$. Mais ces deux dernières hypothèses ne sont pas réalisées, car, par exemple, une fonction continue ne peut avoir en tout point un nombre dérivé à droite égal à $+\infty$. L'intégrale $\int \varphi(x)dx$ est égale à $f(x)$, à une constante près; donc $f(x)$ a bien une dérivée [26]) continue, $\varphi(x)$. Et $\varphi(x)$, qui est limite uniforme de fonctions à pentes $\leqq M$ est elle même à pente $\leqq M$.

La démonstration de Pauc part aussi de (25) et procède ainsi: Soit $x_1 = x + h_1, \ldots, x_n = x + h_n, \ldots$, une suite convergeant vers x et donnant naissance au nombre dérivé (fini ou infini) $d_f(x)$, c'est à dire telle que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}$$

existe et est égale à $d_f(x)$. Comme conséquence de (25) nous pouvons affirmer que le quotient

$$\frac{f(y+h_n)-f(y)}{h_n}$$

convergera vers $+\infty$ (respect. $-\infty$) si $d_f(x) = +\infty$ (respect. $-\infty$), ou bien qu'il admettra des limites finies distantes au plus de $M\,|\,y-x\,|$ de $d_f(x)$ si ce dernier nombre est fini; si donc, pour une seule valeur de x il existe un nombre dérivé égal à $+\infty$ (respect. $-\infty$), il en est de même *partout*. Cette éventualité étant à exclure, nous déduirons de (25) que *l'ensemble $\Delta(x)$ des nombres dérivés de $f(x)$ en un point quelconque x de l'intervalle est borné.*

En outre, la considération des suites associées $x + h_1, \ldots, x + h_n, \ldots$ et $y + h_1, \ldots, y + h_n, \ldots$ nous montre qu'à tout élément de $\Delta(x)$ se laisse associer *au moins* un élément de $\Delta(y)$ distant de lui au plus de $M\,|\,y-x\,|$. Les valeurs x et y jouant un rôle symétrique, nous en déduisons que la distance de $\Delta(x)$ à $\Delta(y)$ au sens de Hausdorff est $M\,|\,y-x\,|$ *$\Delta(x)$ est une fonction lipschitzienne,* donc continue, de x et il en est de même du dérivé supérieur, égal à la borne supérieure de $\Delta(x)$, et du dérivé inférieur. f est une fonction à dérivés extrêmes lipschitziens, donc une fonction continue admettant partout une dérivée $f'(x)$ finie lipschitzienne.

(Reçu le 14 Janvier 1950).

---

[26]) Cf. J. Dieudonné, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. (3), 61, 1944, p. 232.