Compositio Mathematica

Alexander Ostrowski

Ueber das Nichtverschwinden einer Klasse von Determinanten und die Lokalisierung der charakteristischen Wurzeln von Matrizen

Compositio Mathematica, tome 9 (1951), p. 209-226

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1951__9__209_0>

Ueber das Nichtverschwinden einer Klasse von Determinanten und die Lokalisierung der charakteristischen Wurzeln von Matrizen

von

Alexander Ostrowski,

Basel

Einleitung.

1. Es sei $D = |(a_{\mu\nu})|$ eine Determinante n-ter Ordnung mit reellen oder komplexen Elementen, wobei alle $a_{\nu\nu} \neq 0$ sein sollen. Wir verstehen im Folgenden unter $\sum\limits_{\nu}'$ die Summe $\sum\limits_{\substack{\nu=1 \\ \nu\neq\mu}}^{n}$.

Man setze

$$\alpha_{\mu\nu} = |a_{\mu\nu}| \qquad (\mu, \nu = 1, \ldots, n), \tag{1}$$

$$Z_\mu = \sum_{\nu}' \alpha_{\mu\nu}, \; S_\mu = \sum_{\nu}' \alpha_{\nu\mu} \qquad (\mu = 1, \ldots, n). \tag{2}$$

Für jedes α mit $0 \leqq \alpha \leqq 1$ setzen wir

$$M_\mu^{(\alpha)} = Z_\mu^\alpha S_\mu^{1-\alpha} \qquad (\mu = 1, \ldots, n). \tag{3}$$

Man verdankt Hadamard [1]) den Satz, daß $D \neq 0$ ist, wenn

$$\alpha_{\nu\nu} > Z_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{4}$$

ist. Offenbar ist damit äquivalent der Satz, daß für das Nichtverschwinden von D die Bedingung

$$\alpha_{\nu\nu} > S_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{4'}$$

hinreichend ist.

2. Im Folgenden soll nun bewiesen werden:

[1]) J. Hadamard, „Leçons sur la propagation des ondes", Paris, 1903, pp. 13—14. Man vergleiche die Abhandlung von Olga Taussky—Todd, "A recurring theorem on determinants", Amer. Math. Mon., Vol. LVI, No. 10, 1949, pp. 672— 676, in der auch eine sehr vollständige Literaturzusammenstellung zu finden ist.

Satz I: *D verschwindet nicht, wenn für ein α mit* $0 \leqq \alpha \leqq 1$

(5) $$\alpha_{\mu\mu} > M_{\mu}^{(\alpha)} = Z_{\mu}^{\alpha} S_{\mu}^{1-\alpha} \qquad (\mu = 1, \ldots, n)$$

ist.

Man kann im Satz I den Ausdruck $M_{\mu}^{(\alpha)} = Z_{\mu}^{\alpha} S_{\mu}^{1-\alpha}$ ersetzen durch

(6) $$N_{\mu}^{(\alpha)} = \alpha Z_{\mu} + (1-\alpha) S_{\mu},$$

wie sofort aus der Ungleichung

(7) $$Z_{\mu}^{\alpha} S_{\mu}^{1-\alpha} \leqq \alpha Z_{\mu} + (1-\alpha) S_{\mu} \text{ [2]}$$

folgt. Es ist dies natürlich eine abgeschwächte, aber numerisch leichter anzuwendende Formulierung des Satzes. Übrigens läßt sich, wie man sehen wird, auch in den weiteren Sätzen dieser Arbeit $M_{\mu}^{(\alpha)}$ oft durch $N_{\mu}^{(\alpha)}$ ersetzen.

3. Der Satz I läßt sich noch etwas verschärfen:

Satz II: *Die Determinante D verschwindet nicht, wenn für ein α mit* $0 \leqq \alpha \leqq 1$ *und für alle Paare* **verschiedener** *Indizes ν, μ*

(8) $$\alpha_{\nu\nu}\alpha_{\mu\mu} > M_{\nu}^{(\alpha)} M_{\mu}^{(\alpha)} \qquad (\nu \neq \mu)$$

gilt.

Diesen Satz für $\alpha = 1$ (und damit auch für $\alpha = 0$) haben wir 1937 [3]) bewiesen.

4. Eine unmittelbare Folgerung aus I ist der

Satz III: *Für jedes α,* $0 \leqq \alpha \leqq 1$, *liegt jede Fundamentalwurzel der Matrix von D innerhalb oder auf der Peripherie eines der n Kreise*

(9) $$|\lambda - a_{\mu\mu}| \leqq Z_{\mu}^{\alpha} S_{\mu}^{1-\alpha} \qquad (\mu = 1, \ldots, n).$$

In der Tat, wenn ein λ außerhalb aller n Kreise (9) liegt, treffen für die Determinante der Matrix $D - \lambda E$ (E die Einheitsmatrix) die Voraussetzungen des Satzes I zu.

---

[2]) Sie ergibt sich sofort, wenn man $x = \dfrac{Z_{\mu}}{S_{\mu}}$ in der bekannten Ungleichung

$$x^{\alpha} - 1 \leqq \alpha(x-1) \qquad (0 \leqq \alpha \leqq 1,\ x \geqq 0)$$

setzt.

[3]) A. Ostrowski, „Über die Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale", Comm. Math. Helv., Bd. 10, 1937, pp. 69—96. Vgl. insbesondere p. 77 und p. 96. Wir benutzen diese Gelegenheit, um einige sinnstörende Druckfehler zu berichtigen, die sich in diese Abhandlung eingeschlichen haben: p. 70, 9. Z. v. o., lies $|h_{\mu\mu}|$ statt $h_{\mu\mu}$; p. 73, Formel (13), lies $|h_{\mu\mu}|$ statt $h_{\mu\mu}$ sowie $\sum\limits_{\substack{\nu=1 \\ \nu\neq\mu}}^{n}$ anstatt $\sum\limits_{\substack{\mu=1 \\ \mu\neq\nu}}^{n}$; p. 73, 4. Z. v. u. lies 1881 statt 1899; p. 76, in der Formel (18) ist das Produktzeichen rechts wegzulassen; p. 86, in der Formel (11,1) ist links y_{μ} durch $m_{\mu\mu}y_{\mu}$, und rechts 1 durch M zu ersetzen; p. 96, 7. Z. v. u. lies $\dfrac{s_1}{s_2}$ statt $\dfrac{s_2}{s_1}$.

Die Spezialfälle des Satzes III mit $\alpha = 0$ und mit $\alpha = 1$ sind von Gerschgorin 1931 [4]) entdeckt und seitdem wiederholt wiedergefunden worden.

5. Insbesondere folgt aus III:

Satz IV: *Für jedes* α, $0 \leqq \alpha \leqq 1$, *ist der absolute Betrag jeder Fundamentalwurzel von* D *höchstens gleich*

$$\operatorname*{Max}_{\mu} (\alpha_{\mu\mu} + Z_{\mu}^{\alpha} S_{\mu}^{1-\alpha}). \tag{10}$$

Diese Schranke ist, wie aus der Hölder'schen Ungleichung sofort folgt, höchstens gleich

$$\operatorname*{Max}_{\mu} (\alpha_{\mu\mu} + Z_{\mu})^{\alpha} (\alpha_{\mu\mu} + S_{\mu})^{1-\alpha}, \tag{11}$$

und diese Schranke wiederum ist, wie aus der zu (7) analogen Ungleichung folgt, höchstens gleich

$$\operatorname*{Max}_{\mu} (\alpha_{\mu\mu} + \alpha Z_{\mu} + (1 - \alpha) S_{\mu}). \tag{12}$$

Die Schranke (12) für $\alpha = \frac{1}{2}$ ist von Parker 1937 [5]) aufgestellt worden, und damit der erste Satz in diesem Ideenkreis gefunden, in dem eine Kombination der Zeilen — und Kolonnensummen benutzt wurde. Parker hat daselbst auch die Schranke (11) für $\alpha = \frac{1}{2}$ vermutungsweise angegeben. Der Beweis für diese Vermutung ist 1945 von E. W. Barankin [6]) gegeben worden.

6. Ebenso wie aus dem Satz I der Satz III über Kreisgebiete für die charakteristischen Wurzeln von D folgt, ergibt sich aus dem Satz II der

Satz V: *Für jedes* α, $0 \leqq \alpha \leqq 1$, *liegt jede charakteristische Wurzel von* D *innerhalb oder auf dem Rand eines der* $\dfrac{n(n-1)}{2}$ *Lemniskatengebiete*

$$| \lambda - a_{\nu\nu} | \; | \lambda - a_{\mu\mu} | \leqq (Z_{\nu} Z_{\mu})^{\alpha} (S_{\nu} S_{\mu})^{1-\alpha} \qquad (\nu \neq \mu). \tag{13}$$

Für $\alpha = 0$ und $\alpha = 1$ ist dieser Satz von Hrn. A. Brauer [7]) aufgestellt worden.

---

[4]) S. Gerschgorin, „Über die Abgrenzung der Eigenwerte einer Matrix", Bull. de l'Acad. des Sciences de l'URSS, 7-ième série, classe des sciences math. et nat., 1931, pp. 749—754.

[5]) W. V. Parker, "The characteristic roots of a matrix", Duke Math. Jour. 3, 1937, pp. 484—487.

[6]) E. W. Barankin, "Bounds for the characteristic roots of a matrix", Bull. Amer. Soc., 51, 1945, pp. 767—770.

[7]) A. Brauer, "Limits for the characteristic roots of a matrix, II", Duke Math. Jour. 14, 1947, pp. 21—26.

7. Für gewisse Fragen ist es von Interesse, die Fälle zu charakterisieren, in denen die Determinante D verschwindet, wenn die Ungleichungen (5) abgeschwächt werden zu

$$(5') \qquad \alpha_{\mu\mu} \geqq Z_\mu^\alpha S_\mu^{1-\alpha}, \qquad (\mu = 1, \ldots, n).$$

Wie schon im Falle $\alpha = 1$ oder $\alpha = 0$ [8]), hängt auch für $0 < \alpha < 1$ die Frage mit der Zerlegung von D in irreduzible und total irreduzible Komponenten zusammen. (Vgl. für die Definition dieser Begriffe Nr. 11). Wir beweisen den

SATZ VI: *Verschwindet unter den Annahmen* (5′) *für ein* α, $0<\alpha<1$, *die Determinante* D *und ist* D *total irreduzibel, so gilt in sämtlichen Relationen* (5′) *das Gleichheitszeichen und* D *ist auch irreduzibel schlechthin.*

Etwas mehr kann gesagt werden über den Grenzfall bei Benutzung der Ungleichungen

$$(14) \quad \alpha_{\mu\mu} \geqq \alpha Z_\mu + (1-\alpha) S_\mu, \; 0 < \alpha < 1 \quad (\mu = 1, \ldots, n).$$

SATZ VII: *Verschwindet die als total irreduzibel vorausgesetzte Determinante* D *und gilt* (14) *für ein* α, $0 < \alpha < 1$, *so gilt in sämtlichen Relationen* (14) *das Gleichheitszeichen, für jedes* μ *ist* $Z_\mu = S_\mu$, D *ist schlechthin irreduzibel und läßt sich nach Multiplikation der Zeilen und Kolonnen mit geeigneten Faktoren vom absoluten Betrag* 1 *in eine Determinante überführen, bei der sämtliche Zeilensummen und sämtliche Kolonnensummen verschwinden.*

8. Den Beweis des Satzes I erbringen wir in der Nr. 9. Im Anschluß daran wird in den Nrn. 11—18 der Grenzfall der Ungleichungen (5′) bzw. (14) behandelt und die Sätze VI und VII bewiesen. Dieser letzte Abschnitt kann ohne Schaden für das Verständnis des Folgenden überschlagen werden.

Den Satz II beweisen wir in der Nr. 19 und gehen im Anschluß daran in der Nr. 20 auf die Trennung der Fundamentalwurzeln durch die Kreise (9) ein. Da diese Frage von praktischer Bedeutung ist, erläutern wir dabei die Verhältnisse in den Nrn. 21—22 an zwei Beispielen.

Diese Ergebnisse lassen sich in vielen Fällen verschärfen durch Benutzung der Lemniskatengebiete (13). Wir zeigen in der Nr. 23 wie ein solches Lemniskatengebiet durch ein bzw. zwei Kreise überdeckt werden kann. Wenn auch auf diese Weise anstatt n Kreisen $\dfrac{n(n-1)}{2}$ Kreise zu benutzen sind, so liefert

---

[8]) Vgl. die in der Fußnote 1) zitierte Arbeit von O. TAUSSKY—TODD.

diese Abgrenzung dennoch oft recht scharfe Ergebnisse, wie wir in den Nrn. 24—25 an Beispielen zeigen. Dabei ersetzen wir immer wieder die Größen $M_\mu^{(\alpha)}$ durch die durch (6) definierten Größen $N_\mu^{(\alpha)}$, mit denen praktisch leichter zu arbeiten ist.

Wie bei derartigen Überlegungen der Wert von α zu wählen ist, läßt sich wohl im Allgemeinen nur unter Beachtung der vorliegenden numerischen Verhältnisse entscheiden. Immerhin ist bei den Schranken (11) und (12) für die absoluten Beträge sämtlicher Fundamentalwurzeln eine systematische Diskussion möglich, die wir in den Nrn. 26—29 durch eine geometrische Überlegung durchführen, bei der die Konstruktion gewisser konvexer Hüllpolygone eine Rolle spielt.

§ 1. Bedingungen für das Nichtverschwinden einer Determinante.

9. Beim *Beweis von Satz I* dürfen wir $0 < \alpha < 1$ annehmen, da die Fälle $\alpha = 0$ und 1 mit dem Hadamard'schen Satz erledigt sind und übrigens aus dem für $0 < \alpha < 1$ gültigen Resultat auf verschiedene Arten durch Grenzübergang gewonnen werden können.

Ferner dürfen wir annehmen, daß keine der n Summen Z_μ verschwindet, da sonst mit D auch einer der *Hauptminoren* von D verschwinden muß, für den (5) erst recht gilt und man daher n durch $n - 1$ ersetzen könnte.

Es sei $D = 0$. Dann gibt es n nicht sämtlich verschwindende Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ mit

$$\sum_\nu a_{\mu\nu} x_\nu = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, n), \tag{15}$$

so daß, wenn

$$|x_\nu| = \xi_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

gesetzt wird,

$$\alpha_{\mu\mu}\xi_\mu \leqq \sum_\nu{}' \alpha_{\mu\nu}\xi_\nu \qquad (\mu = 1, \ldots, n) \tag{16}$$

gilt, und wegen (5) ferner

$$Z_\mu^\alpha S_\mu^{1-\alpha}\xi_\mu \leqq \sum_\nu{}' \alpha_{\mu\nu}^\alpha(\alpha_{\mu\nu}^{1-\alpha}\xi_\nu), \tag{17}$$

wo wenigstens für ein μ das Zeichen $<$ gilt, wenn nämlich $\xi_\mu > 0$ ist. Dann folgt, wenn die Hölder'sche Ungleichung mit $p = \dfrac{1}{\alpha}$, $q = \dfrac{1}{1 - \alpha}$ angewandt wird,

$$Z_\mu^\alpha S_\mu^{1-\alpha}\xi_\mu \leqq \left(\sum_\nu{}'\alpha_{\mu\nu}^{\alpha p}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_\nu{}'\alpha_{\mu\nu}^{(1-\alpha)q}\xi_\nu^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_\nu{}'\alpha_{\mu\nu}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_\nu{}'\alpha_{\mu\nu}\xi_\nu^q\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{18}$$

oder, da der erste Faktor rechts Z_μ^α ist,

$$S_\mu^{1-\alpha}\xi_\mu \leqq (\sum_\nu{}' \alpha_{\mu\nu}\xi_\nu^q)^{1-\alpha},$$

$$S_\mu \xi_\mu^q \leqq \sum_\nu{}' \alpha_{\mu\nu}\xi_\nu^q \qquad (\mu = 1, \ldots, n). \tag{19}$$

Summiert man aber hier über μ, so folgt wegen (2), da für wenigstens ein μ das Kleinerzeichen gilt,

$$\sum_\mu S_\mu \xi_\mu^q < \sum_{\mu \neq \nu} \alpha_{\mu\nu} \xi_\nu^q = \sum_{\mu \neq \nu} \alpha_{\nu\mu} \xi_\mu^q = \sum_\mu S_\mu \xi_\mu^q. \tag{20}$$

Mit diesem Widerspruch ist der Satz bewiesen.

10. *Beispiele:* Man betrachte die Determinante

$$\begin{vmatrix} 15 & 20 & 1 \\ 2 & 15 & 4 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix},$$

für die die Ausdrücke rechts in (6) mit $\alpha = \frac{1}{2}$ bzw.

$$12{,}5;\ 14{,}5;\ 5$$

sind, woraus das Nichtverschwinden dieser Determinante folgt. Im Falle der Determinante

$$\begin{vmatrix} 8 & 17 & 1 \\ 1 & 20 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

werden die Ausdrücke (3) für $\alpha = \frac{1}{2}$ bzw. zu 6; 6; 2, womit auch hier das Nichtverschwinden bewiesen ist.

11. Wir wollen nunmehr überlegen, wann $D \neq 0$ bleibt, falls in den Ungleichungen (5) das Gleichheitszeichen zugelassen wird, wenn sie also durch (5') ersetzt werden.

Es sei zuerst daran erinnert, daß eine Determinante *reduzibel* (oder *zerfallend* oder *zerlegbar*) genannt wird, wenn sie nach gleichnamiger Permutation der Zeilen und Kolonnen (einer „*kogredienten*" Umordnung) die folgende Gestalt annimmt:

$$\begin{vmatrix} P & O \\ U & Q \end{vmatrix}, \tag{21}$$

wo P und Q quadratische Matrizen sind und O aus lauter Nullen besteht. Sonst heißt sie *irreduzibel.*

Läßt sich eine kogrediente Umordnung so ausführen, daß in der obigen Gestalt sowohl O als auch U aus lauter Nullen bestehen, so heißt D *vollständig* (oder *total*) *reduzibel* (*zerfallend, zerlegbar*). Die P und Q entsprechenden Determinanten nennen wir dann die *Totalkomponenten* von D. Ist D nicht total reduzibel, so heißt D *total irreduzibel*.

12. Es sei nun D total irreduzibel, es mögen für D die Relationen (5′) gelten und es sei $D = 0$. Geht man dann die Überlegungen der Nummer 9 durch, so folgt insbesondere, daß in den Relationen (16) und (17) durchweg das Gleichheitszeichen gelten muß. Da aber bei der Herleitung von (17) für ein μ die entsprechende Relation (5′) für dasselbe μ benutzt wurde, folgt, daß in (5′) für dieses μ das Gleichheitszeichen gilt, *sofern* $\xi_\mu > 0$ *ist.* Wenn also alle $\xi_\mu > 0$ sind, so gilt in (5′) durchweg das Gleichheitszeichen.

Verschwinden einige der ξ_μ, so kann nach kogredienter Umordnung der Zeilen und Kolonnen angenommen werden, daß

$$\xi_1 \geqq \ldots \geqq \xi_m > \xi_{m+1} = \ldots = \xi_n = 0. \tag{22}$$

Dann lauten die ersten m Gleichungen (15):

$$\sum_{\nu=1}^{m} a_{\mu\nu} x_\nu = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, m), \tag{23}$$

und da hier alle x_μ von 0 verschieden sind, verschwindet der Hauptminor

$$|(a_{\mu\nu})| \qquad (\mu, \nu = 1, \ldots, m) \tag{24}$$

von D.

13. Es sei nun k die kleinste natürliche Zahl, für die es einen verschwindenden Hauptminor von D der Ordnung k gibt. Nach einer weiteren kogredienten Umordnung können wir annehmen, daß dies der Hauptminor

$$|(a_{\mu\nu})| \qquad (\mu, \nu = 1, \ldots, k) \tag{25}$$

ist. Daher hat das zugehörige lineare Gleichungssystem

$$\sum_{\nu=1}^{k} a_{\mu\nu} x_\nu = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, k) \tag{26}$$

eine nichttriviale Lösung, und es gilt andererseits offenbar, wenn die den Größen Z_μ, S_μ bei der Determinante (25) entsprechenden Ausdrücke mit Z'_μ, S'_μ bezeichnet werden,

$$x_{\mu\mu} \geqq Z_\mu^\alpha S_\mu^{1-\alpha} \geqq Z_\mu'^\alpha S_\mu'^{1-\alpha} \qquad (\mu = 1, \ldots, k), \tag{27}$$

so daß die Determinante (25) die analogen Eigenschaften besitzt wie die Ausgangsdeterminante D.

14. Wäre eines der x_ν in (26) Null, so hätte nach der Schlußweise der Nr. 12 die Determinante (25) einen verschwindenden Hauptminor der Ordnung $< k$, entgegen der Annahme über k. Daher sind sämtliche x_ν in (26) $\neq 0$. Dann folgt aber weiter, daß alle $Z'_\mu > 0$ sind, da die μ-te Zeile von (25) neben $a_{\mu\mu}$ noch wenigstens ein weiteres nichtverschwindendes Element besitzt. Ebenso folgt, daß auch alle $S'_\mu > 0$ sind, da sonst die transponierte Determinante zu (25), und daher auch (25), einen verschwindenden Hauptminor der Ordnung $< k$ hätte.

Nunmehr ist aber unsere obige Überlegung auf die Determinante (25) anwendbar, so daß demnach

$$\alpha_{\mu\mu} = Z'^{\alpha}_{\mu} S'^{1-\alpha}_{\mu} \qquad (\mu = 1, \ldots, k) \tag{28}$$

wäre, und daher wegen (27)

$$Z^{\alpha}_{\mu} S^{1-\alpha}_{\mu} = Z'^{\alpha}_{\mu} S'^{1-\alpha}_{\mu} \qquad (\mu = 1, \ldots, k). \tag{29}$$

Da aber $Z'_\mu \leqq Z_\mu$, $S'_\mu \leqq S_\mu$ für jedes μ ist und weder Z'_μ noch S'_μ verschwindet, folgt aus (29)

$$Z_\mu = Z'_\mu,\ S_\mu = S'_\mu \qquad (\mu = 1, \ldots, k), \tag{30}$$

so daß in den ersten k Zeilen von D alle Elemente $a_{\mu\nu}$ mit $\nu > k$ und in den ersten k Kolonnen von D alle Elemente $a_{\mu\nu}$ mit $\mu > k$ verschwinden. Dann wäre aber (25) eine Totalkomponente von D, entgegen der Annahme.

Zugleich beweist unsere Überlegung, daß D keinen verschwindenden Hauptminor besitzen kann, und daher insbesondere auch schlechthin irreduzibel ist. Damit ist der Satz VI vollständig bewiesen.

15. Bevor wir den Satz VII beweisen, möge an zwei Sätze aus der in der Fußnote [3]) zitierten Arbeit erinnert werden, die auch zum Verständnis des ganzen Zusammenhanges nützlich sein dürften.

Wir bezeichnen eine Determinante $D = |(a_{\mu\nu})|$ als eine *M-Determinante*, wenn ihre Elemente $a_{\nu\nu} \geqq 0$, sämtliche Elemente außerhalb der Hauptdiagonalen $\leqq 0$, und sowohl D als auch sämtliche Hauptminoren von $D \geqq 0$ sind. Ist eine solche Determinante *positiv*, so heißt sie *eigentlich*, verschwindet sie, so heißt sie *uneigentlich*.

Wir betrachten ferner die Determinanten $D = |(a_{\mu\nu})|$ mit beliebigen reellen oder komplexen Elementen und mit der Eigenschaft, daß, wenn man ihre Elemente durch ihre absoluten Beträge ersetzt und sodann jedes Element außerhalb der Hauptdiagonalen mit -1 multipliziert, eine M-Determinante entsteht. Eine solche Determinante D nennen wir eine *H-Determinante*, und zwar *eigentlich*, wenn ihr Wert von 0 verschieden ist, und *uneigentlich*, wenn ihr Wert verschwindet. Die zu einer H-Determinante D nach der obigen Vorschrift gebildete M-Determinante bezeichnen wir als die D „*begleitende*" *M-Determinante.*

16. Dann lauten die in Frage kommenden Sätze:

A. *Ist H eine irreduzible uneigentliche H-Determinante, so läßt sie sich durch Multiplikation der Zeilen und Kolonnen mit Größen von absoluten Betrag 1 in eine uneigentliche M-Determinante überführen* (l.c., p. 75).

B. *Notwendig und hinreichend, damit eine Determinante $D = |(a_{\mu\nu})|$ durch Multiplikation der Zeilen und Kolonnen mit von Null verschiedenen Größen in eine solche Determinante übergeht, für die die Relationen* (4) *erfüllt sind, ist, daß D eine H-Determinante ist, für die die begleitende M-Determinante ebenso wie sämtliche Hauptminoren dieser M-Determinante positiv sind* (l.c., p. 74).

17. Wir behaupten nun: *Wenn für eine Determinante D die Relationen* (5) *gelten, ist sie eine eigentliche H-Determinante, für die die Voraussetzungen des obigen Satzes B zutreffen.*

Um dies zu beweisen, betrachte man für ein t mit $0 \leqq t \leqq 1$ die Determinante

$$(31)\qquad \Delta(t) = \begin{vmatrix} |a_{11}| & -t\,|a_{12}| & \dots & -t\,|a_{1n}| \\ -t\,|a_{21}| & |a_{22}| & \dots & -t\,|a_{2n}| \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -t\,|a_{n1}| & -t\,|a_{n2}| & \dots & |a_{nn}| \end{vmatrix},$$

die aus D entsteht, indem in ihr alle Elemente durch ihre absoluten Beträge ersetzt und sodann sämtliche Elemente außerhalb der Hauptdiagonalen mit $-t$ multipliziert werden. Da sowohl für $\Delta(t)$ als auch für alle Hauptminoren von $\Delta(t)$ die (5) entsprechenden Relationen erfüllt sind, sind alle Hauptminoren von $\Delta(t)$ ebenso wie $\Delta(t)$ selbst $\neq 0$ und sicher nicht negativ, da sie für $t = 0$ in die Produkte der positiven Diagonalelemente übergehen. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Aus der obigen Überlegung folgt insbesondere, daß *wenn in einer unter den Voraussetzungen eines der Sätze* I *oder* II *von* 0 *verschiedenen Determinante D sämtliche Elemente $a_{\mu\nu}$ reell sind, sie das Vorzeichen des Produktes $a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$ hat.*

18. Um nunmehr den *Satz* VII *zu beweisen,* beachte man, daß aus den Ungleichungen (14) wegen (7) auch die Ungleichungen

(5′) folgen. Verschwindet also D, so muß nach Satz VI in allen Relationen (5′) das Gleichheitszeichen gelten und daher erst recht in allen Relationen (14). Daher gilt auch in sämtlichen Ungleichungen (7) das Gleichheitszeichen und es folgt

$$\alpha_{\mu\mu} = Z_\mu = S_\mu \qquad (\mu = 1, \ldots, n). \tag{32}$$

Andererseits lassen sich nach dem Satz A der Nr. 16 die Zeilen und Kolonnen von D derart mit Größen vom absoluten Betrag 1 multiplizieren, daß sie zu einer uneigentlichen M-Determinante wird. Für eine solche müssen aber wegen (32) alle Zeilen — und Kolonnensummen verschwinden. Damit ist Satz VII bewiesen.

19. Für den *Beweis des Satzes* II formulieren wir diesen Satz etwas anders. *Es sei, nachdem* α, $0 \leqq \alpha \leqq 1$, *fest gewählt wurde,*

$$s_\mu = \frac{Z_\mu^\alpha S_\mu^{1-\alpha}}{\alpha_{\mu\mu}}, \tag{33}$$

und es seien die s_μ *der Größe nach geordnet:*

$$s_{k_1} \geqq s_{k_2} \geqq \ldots \geqq s_{k_n}. \tag{34}$$

Dann genügt es für das Nichtverschwinden der Determinante D, *wenn*

$$s_{k_1} s_{k_2} < 1 \tag{35}$$

ist.

Beweis: Ist s_{k_2}, und damit alle folgenden s_{k_ν}, gleich 0, so reduziert sich D auf $a_{11}a_{22} \ldots a_{nn} \neq 0$. Sonst ist aber auf jeden Fall $s_{k_2} < 1$. Man setze dann

$$q = \sqrt{s_{k_1}/s_{k_2}} \tag{36}$$

und multipliziere sowohl die k_1-te Zeile als auch die k_1-te Kolonne von D mit q. Dabei multipliziert sich das k_1 entsprechende Diagonalelement mit q^2, das zugehörige s_{k_1} mit $\frac{1}{q}$ während alle übrigen s_{k_μ} sich höchstens mit q multiplizieren und die entsprechenden Diagonalelemente sich gar nicht ändern.

Bezeichnet man die den Größen s_ν in der so entstehenden Determinante entsprechenden Größen mit s'_ν, so gilt daher

$$s'_{k_1} = \frac{s_{k_1}}{q} = \sqrt{s_{k_1} s_{k_2}} < 1; \tag{37}$$

ferner für $\nu > 1$

$$s'_{k_\nu} \leqq q s_{k_\nu} \leqq q s_{k_2} = \sqrt{s_{k_1} s_{k_2}} < 1 \quad (\nu = 2, 3, \ldots, n), \tag{38}$$

so daß auf die neue Determinante der Satz I anwendbar wird.

§ 2. Kreissysteme zur Trennung der Fundamentalwurzeln.

20. Nach Satz III verteilen sich die Wurzeln der zu unserer Determinante $D = |(a_{\mu\nu})|$ gehörenden *Fundamentalgleichung*

$$(39)\quad F(\lambda) \equiv |\lambda E - D| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

auf die n Kreise

$$(40)\qquad (K_\mu^\alpha)\quad |\lambda - a_{\mu\mu}| \leqq M_\mu^{(\alpha)} \qquad (\mu = 1, \dots, n).$$

Man kann noch etwas genauer folgendes sagen: *Zerfällt die Vereinigungsmenge*

$$(41)\qquad K^{(\alpha)} = \sum_{\mu=1}^{n} K_\mu^{(\alpha)}$$

in k getrennte Kontinua $K_1^{(\alpha)*}, \dots, K_k^{(\alpha)*}$, so ist die genaue Anzahl der in einem dieser Kontinua liegenden Fundamentalwurzeln von D gleich der Anzahl der in ihm liegenden Diagonalelemente $a_{\mu\mu}$ von D. Man sieht dies sofort ein, indem man die außerhalb der Hauptdiagonalen liegenden Elemente von D mit einem Faktor t, $0 \leqq t \leqq 1$, multipliziert und t stetig von 0 bis 1 wachsen läßt. Es kann nämlich dabei keine Fundamentalwurzel der betreffenden Determinante das Äußere der $K_\mu^{(\alpha)*}$ überqueren.

Analoge Bemerkungen hat bereits Gerschgorin 1931 [4]) über die Kreise $K_\mu^{(0)}$ und $K_\mu^{(1)}$ gemacht. Gerschgorin bemerkte ferner, daß man im Allgemeinen noch kleinere Gebiete für die Fundamentalwurzeln bekommt, indem man den Durchschnitt der beiden Mengen $K^{(0)}$, $K^{(1)}$ bildet. Bildet man allgemeiner den Durchschnitt der Mengen $K^{(\alpha)}$ für verschiedene Werte von α, so werden die in Frage kommenden Gebiete für die Fundamentalwurzeln von D noch weiter eingeengt.

Praktisch wird man als Radien zuerst die durch (6) definierten Größen $N_\mu^{(\alpha)}$ benutzen und erst hinterher, nach Maßgabe der vorliegenden Verhältnisse, zur Betrachtung der Größen mit den Radien $M_\mu^{(\alpha)}$ übergehen.

21. Betrachten wir z.B. die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 10 & 2 \\ 3 & 2 & 30 \end{pmatrix},$$

so haben die Gerschgorin'schen Kreise $K_\mu^{(1)}$ die Radien 4; 6; 5;

die Kreise $K_\mu^{(0)}$ die Radien 7; 3; 5 und endlich die $N_\mu^{(1/2)}$ entsprechenden Kreise die Radien 5,5; 4,5; 5. In jedem Fall liegt der Kreis um 30 mit dem Radius 5 getrennt von allen anderen Kreisen des betreffenden Systems und enthält daher genau eine charakteristische Wurzel. Dagegen überschneiden sich die Kreise $K_1^{(1)}$,

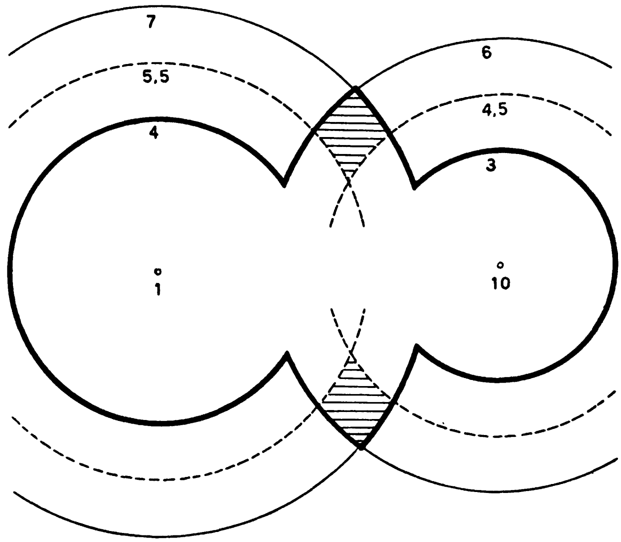

Fig. 1.

$K_2^{(1)}$ und ebenso $K_1^{(0)}$, $K_2^{(0)}$. In der Figur 1 sind die Ränder von $K_1^{(1)} + K_2^{(1)}$ und von $K_1^{(0)} + K_2^{(0)}$ bei größeren Kreisen nur zum Teil ausgezogen, während der Rand des Durchschnitts dieser Bereiche stark ausgezogen wurde.

Durch Hinzukommen der (nur zum Teil, und zwar gestrichelt gezeichneten) Kreise mit den Radien $N_1^{(1/2)}$ und $N_2^{(1/2)}$ werden aus diesem Durchschnitt zwei weitere Stücke weggeschnitten, die in der Figur schraffiert sind. Die Radien der gezeichneten Kreislinien sind jeweils in der Nähe dieser Kreislinien angegeben.

Man kann übrigens die Trennung der Wurzeln dennoch erzwingen, indem man in der obigen Matrix die zweite Zeile durch 2 dividiert und die zweite Kolonne mit 2 multipliziert, wobei, wie man sofort überblickt, die Fundamentalgleichung sich im Endresultat nicht ändert [9]). Bei der so entstehenden Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 10 & 1 \\ 3 & 4 & 30 \end{pmatrix}$$

[9]) Auf diesen Kunstgriff weist GERSCHGORIN in der oben zitierten Arbeit hin.

sind die Zeilensummen 5; 3; 7 und die erste Wurzel liegt im Kreise um 1 mit dem Radius 5, während die zweite im Kreise um 10 mit dem Radius 3 bleibt. Dies steht im Einklang mit den Werten der Fundamentalwurzeln der obigen Matrix:

$$30{,}5522;\ 10{,}0708;\ 0{,}3770.$$

Die Schranken erscheinen hier relativ weit; man beachte indessen, daß auf die obigen Kreise sich ja die Wurzeln aller Matrizen verteilen, die aus der obigen Matrix durch Multiplikation ihrer Elemente mit beliebigen Konstanten vom absoluten Betrag 1 entstehen.

22. Im Falle der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 5 & 11 & 2 \\ 2 & 4 & 22 \end{pmatrix}$$

mit den Fundamentalwurzeln $-0{,}4464$; $10{,}5803$; $22{,}8661$ sind die Radien der Gerschgorin'schen Kreise $K_\mu^{(1)}$ und $K_\mu^{(0)}$ bzw. 2; 7; 6 und 7; 5; 3. Durch die Kreise $K_\mu^{(1)}$ wird ein Kreisbereich um 0 mit dem Radius 2 abgegrenzt, in dem genau eine Wurzel liegt. Ebenso liefern die Kreise $K_\mu^{(0)}$ einen Kreis um 22 mit dem Radius 3, in dem genau eine Wurzel liegt. Für die mittlere Wurzel ergibt sich als Durchschnitt der Kreissysteme $K_1^{(1)} + K_2^{(1)}$ und $K_1^{(0)} + K_1^{(0)}$

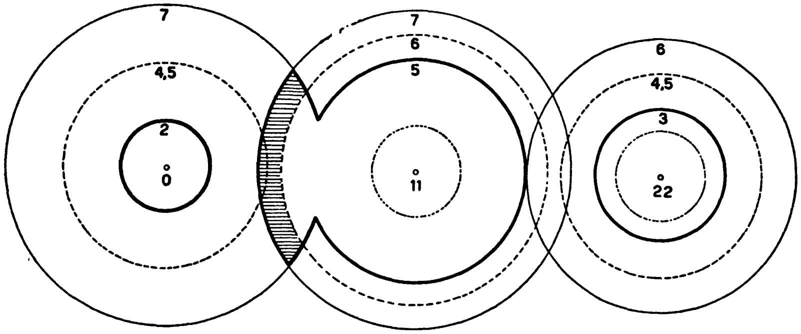

Fig. 2.

der in Fig. 2 vom stark ausgezogenen Rand begrenzte Bereich. Durch Hinzunahme der Kreise mit den Radien $N_\mu^{(1/2)}$ wird dieser Bereich für die mittlere Wurzel um das in der Fig. 2 schraffierte Stück verkleinert.

Andererseits bewirken die 3 Kreise mit den Radien $N_\mu^{(1/2)}$ (die in der Figur gestrichelt gezeichnet sind), mit einem Schlag eine vollständige Trennung der 3 Wurzeln, allerdings mit Kreisen, aus denen einzelne Stücke nach Benutzung der Kreissysteme $K_\mu^{(1)}$ und $K_\mu^{(0)}$ noch weggelassen werden können. Zugleich ergibt sich die Realität der drei Wurzeln.

Man kann bei den obigen Betrachtungen natürlich die Kreise $K_\mu^{(1)}$ und $K_\mu^{(0)}$ durch die Kreise mit den Radien $M_\nu^{(\alpha)}$ $(0 < \alpha < 1)$ ersetzen und bekommt auf diese Weise weitere Kreissysteme.

23. Die Betrachtung der Lemniskatenbereiche (13) liefert schärfere Abgrenzungen für die Fundamentalwurzeln, doch dürfte sich diese Methode für die Überschlagsüberlegungen kaum eignen. Man kann aber mit Hilfe solcher Lemniskatenbereiche gewisse *Kreisbereiche* für die Fundamentalwurzeln von D herleiten. Zu diesem Zweck betrachten wir den allgemeinsten Lemniskatenbereich:

(42) $$|z-a_1|\,|z-a_2| \leqq P, \quad P > 0,$$

und setzen insbesondere

(43) $$\frac{|a_1-a_2|}{2} = \delta.$$

Der Bereich (42) liegt in der Vereinigungsmenge der beiden Kreisscheiben $|z-a_1| \leqq \sqrt{P}$, $|z-a_2| \leqq \sqrt{P}$. Für

(44) $$P < \delta^2$$

zerfällt er in 2 getrennt liegende Ovale, die für $P = \delta^2$ sich gerade berühren, während (42) für $P > \delta^2$ einen zusammenhängenden, von einer doppelpunktfreien Kurve begrenzten Bereich darstellt[10]). Alle Punkte z dieser Randkurve erhält man aus der quadratischen Gleichung

(45) $$z_2 - (a_1+a_2)z + a_1a_2 + \varepsilon P = 0,$$

in der ε alle Größen vom absoluten Betrag 1 durchläuft. Setzen wir hier

(46) $$z - a_1 = \sqrt{\varepsilon P}\,\omega, \quad r = \frac{\delta}{\sqrt{P}},$$

so ergibt sich für ω die Gleichung

$$\omega^2 + \frac{a_1-a_2}{\sqrt{\varepsilon P}}\omega + 1 = 0,$$

(47) $$\omega^2 + 2e^{i\vartheta} r\omega + 1 = 0 \qquad (0 \leqq \vartheta < 2\pi).$$

---

[10]) Diese Kurve ist für $P \geqq 2\delta^2$ ein Oval, während sie für P-Werte aus dem Intervall $\left(\frac{|a_1-a_2|^2}{4}, \frac{|a_1-a_2|^2}{2}\right)$ 4 Wendepunkte besitzt. Vgl. z.B. Fano—Terracini, Lezioni di Geometria, 2. Aufl. 1948, p. 139.

Ist die Bedingung (44) erfüllt, so erhält man für $|z - a_1|$ auf dem Oval um a_1 Schranken, indem man obere und untere Schranken für die absolut kleinere Wurzel ω_1 von (47) benutzt:

$$\sqrt{r^2+1} - r \leqq |\omega_1| \leqq r - \sqrt{r^2-1}\ ^{11)}. \tag{48}$$

So ergibt sich wegen (46):

$$\sqrt{\delta^2+P} - \delta \leqq |z - a_1| \leqq \delta - \sqrt{\delta^2-P}, \tag{49}$$

so daß unter der Annahme (44) das Oval um a_1 zwischen den Kreisen um a_1 liegt, deren Radien bzw. $\delta - \sqrt{\delta^2 - P}$, $\sqrt{\delta^2+P} - \delta$ sind. Die Differenz dieser beiden Radien ist unter der Annahme (44) kleiner als $\dfrac{(2-\sqrt{2})P^2}{\delta^3}$.

24. Wenden wir dies auf die Lemniskatenbereiche (13) an so erhalten wir um jeden der Punkte $a_{\nu\nu}$ $n-1$ Kreise

$$|\lambda - a_{\nu\nu}| \leqq \sqrt{M_\nu^{(\alpha)} M_\mu^{(\alpha)}} \quad \left(\frac{|a_{\mu\mu} - a_{\nu\nu}|}{2} \leqq \sqrt{M_\mu^{(\alpha)} M_\nu^{(\alpha)}}\right), \tag{50}$$

bzw.

$$|\lambda - a_{\nu\nu}| \leqq \sqrt{\frac{|a_{\mu\mu} - a_{\nu\nu}|^2}{4} + M_\nu^{(\alpha)} M_\mu^{(\alpha)}} - \frac{|a_{\mu\mu} - a_{\nu\nu}|}{2} \tag{51}$$

$$\left(\frac{|a_{\mu\mu} - a_{\nu\nu}|}{2} > \sqrt{M_\mu^{(\alpha)} M_\nu^{(\alpha)}}\right),$$

wobei für jedes $\mu \neq \nu$ derjenige der Kreise (50), (51) zu nehmen ist, für den die Bedingung rechts in Klammern erfüllt ist. Ähnliche Formeln gelten, wenn die Größen $M_\nu^{(\alpha)}$ durch die Größen $N_\nu^{(\alpha)}$ ersetzt werden.

Man wird dann für jedes ν den größten unter den $n-1$ ihm auf diese Weise zugeordneten Kreisen nehmen, und das System der n auf diese Weise entstehenden Kreise liefert im Allgemeinen weitere Trennungsmöglichkeiten für die Fundamentalwurzeln von D.

25. Wenden wir die obige Überlegung auf die in der Nr. 22 betrachtete Matrix an, zu der

$$N_1^{(1/2)} = 4{,}5;\ N_2^{(1/2)} = 6;\ N_3^{(1/2)} = 4{,}5$$

gehören, so ist hier in jedem Falle der (51) entsprechende Kreis zu nehmen, und es ergeben sich für die Kreise um a_{11} die Radien

$$\sqrt{5{,}5^2 + 27} - 5{,}5 < 2{,}067;\ \sqrt{11^2 + 20{,}25} - 11 < 0{,}885.$$

---

[11]) Vgl. A. Ostrowski, „Recherches sur la méthode de Graeffe", Acta. Math., tome 72, 1940, p. 147.

Für a_{22} haben beide Kreise denselben Radius $< 2{,}067$, während für a_{33} sich die gleichen Radien ergeben wie für a_{11}. Wir sehen daher, daß in jedem Falle sich die 3 Fundamentalwurzeln von D auf die Kreise um 0; 11; 22 mit dem Radius 2,067 verteilen, wodurch eine Wurzelabgrenzung herauskommt, die ganz wesentlich schärfer ist als die in der Fig. 2 gegebene. Natürlich darf für die kleinste Wurzel der Kreisradius durch 2 ersetzt werden [12]).

Unter Benutzung der Lemniskaten (13) für $\alpha = 1$ ergeben sich die Kreise um 0; 11; 22 bzw. mit den Radien

$$1{,}153;\ 6{,}481;\ 6{,}481,$$

wobei also nur die erste Wurzel getrennt ist, aber dafür sich innerhalb einer Kreisscheibe mit dem Radius 1,153 bewegt, der kleiner ist als 2,067.

Mit Hilfe der Lemniskaten (13) für $\alpha = 0$ ergeben sich analog die Radien

$$5{,}917;\ 5{,}917;\ 1{,}227.$$

Hier ist nur die dritte Wurzel getrennt, und man erhält für sie wiederum eine kleinere Kreisscheibe mit dem Radius 1,227.

§ 3. Geometrische Diskussion der günstigsten Wahl von α.

26. Wir betrachten nunmehr das folgende Problem: *Es seien n Punkte*

$$P_\mu(x_\mu, y_\mu) \qquad (\mu = 1, \ldots, n) \tag{52}$$

in der Ebene gegeben. Für jedes α mit $0 \leqq \alpha \leqq 1$ setze man

$$M(\alpha) = \operatorname*{Max}_{\mu} (\alpha x_\mu + (1 - \alpha) y_\mu), \quad 0 \leqq \alpha \leqq 1. \tag{53}$$

Welchen Wert hat dann

$$m = \operatorname*{Min}_{0 \leqq \alpha \leqq 1} M(\alpha)? \tag{54}$$

Wird hier $x_\mu = \alpha_{\mu\mu} + Z_\mu$, $y_\mu = \alpha_{\mu\mu} + S_\mu$ gesetzt, so ergibt sich mit m die beste aus (12) erhältliche Schranke. In diesem besonderen Falle folgt übrigens aus

$$\sum_{\mu=1}^{n} (\alpha_{\mu\mu} + Z_\mu) = \sum_{\mu=1}^{n} (\alpha_{\mu\mu} + S_\mu), \tag{55}$$

daß der Schwerpunkt der Punkte (52) auf der Geraden $y = x$ liegt.

---

[12]) In der Fig. 2 sind die beiden Kreise um 11 und 22 mit dem Radius 2,067 punktiert angedeutet.

Setzt man aber $x_\mu = \lg(\alpha_{\mu\mu} + Z_\mu)$, $y_\mu = \lg(\alpha_{\mu\mu} + S_\mu)$, so liefert m den Logarithmus der besten aus (11) erhältlichen Schranke.

27. Man betrachte nun das kleinste konvexe Polygon P, das alle Punkte (52) enthält und dessen sämtliche Ecken in den Punkten (52) liegen. Für jedes α, $0 \leqq \alpha \leqq 1$, definiere man den Winkel φ, $0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$, durch

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1-\alpha}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} - 1. \tag{56}$$

Dann gehört zur Richtung φ, die einem α entspricht, eine Stützgerade L_φ von P, die senkrecht auf der φ entsprechenden Richtung steht. L_φ enthält entweder eine oder zwei Ecken von P. Im letzteren Fall enthält L_φ auch die entsprechende Seite von P, und dann ist $M(\alpha)$ der Wert von $\alpha x + (1-\alpha)y$ in den auf L_φ liegenden Ecken.

Wir werden jede Ecke von P, die au eine der Stützgeraden L_φ liegt, als eine *ausgezeichnete Ecke* von P bezeichnen.

Zu jeder ausgezeichneten Ecke P_μ von P gehört ein Teilintervall des Intervalls $< 0, \frac{\pi}{2} >$ derart, daß für jedes φ aus diesem Teilintervall P_μ auf L_φ liegt.

28. Wenn nun für eine ausgezeichnete Ecke P_μ von P etwa $y_\mu > x_\mu$ ist, so wird $\alpha x_\mu + (1-\alpha)y_\mu$ dann am kleinsten sein, wenn wir α möglichst groß, d.h. φ möglichst klein wählen. Andererseits, wenn $y_\mu < x_\mu$ ist, wird der Ausdruck $\alpha x_\mu + (1-\alpha)y_\mu$ seinen kleinsten Wert erreichen, wenn φ möglichst groß angenommen wird. Hieraus folgt aber:

1) Gilt für alle ausgezeichneten Eckpunkte $y_\mu > x_\mu$, so ist

$$m = M(1) = \operatorname*{Max}_\mu x_\mu. \tag{57}$$

2) Gilt in allen ausgezeichneten Eckpunkten von P $y_\mu < x_\mu$, so gilt

$$m = M(0) = \operatorname*{Max}_\mu y_\mu. \tag{58}$$

3) Gibt es einen ausgezeichneten Eckpunkt P_μ von P mit $y_\mu = x_\mu$, so gilt

$$m = x_\mu = y_\mu. \tag{59}$$

4) Verbindet eine Seite von P zwei ausgezeichnete Eckpunkte P_μ und P_ν derart, daß $y_\mu > x_\mu$, $y_\nu < x_\nu$ ist, so wird $\operatorname*{Min}_\alpha M(\alpha)$

erreicht für den Wert von α, der der Normalenrichtung zu dieser Seite von P entspricht; es gilt dann

$$m = \frac{x_\nu y_\mu - y_\nu x_\mu}{y_\mu - x_\mu + x_\nu - y_\nu}. \tag{60}$$

29. *Beispiel:* Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

hat als maximale Fundamentalwurzel

$$6{,}81507\ldots$$

Im Falle der Schranke (12) wenden wir (60) für

$$x_\mu = 5, \ y_\mu = 9, \ x_\nu = 9, \ y_\nu = 6$$

an, und es ergibt sich aus (60) als Schranke

$$7{,}28571\ldots.$$

Wendet man dagegen (60) auf den (Dezimal-)Logarithmus von (11) an, so ergibt sich für

$$x_\mu = \operatorname{Log} 5 = 0{,}69897; \quad y_\mu = \operatorname{Log} 9 = 0{,}95424$$
$$x_\nu = \operatorname{Log} 9 = 0{,}95424; \quad y_\nu = \operatorname{Log} 6 = 0{,}77815$$

die Schranke

$$m = 7{,}0801,$$

die recht nah an der genauen Schranke ist.

Es sei vergleichsweise angeführt, daß die Parker'sche Schranke, d.h. (12) für $\alpha = \frac{1}{2}$, den Wert 7,5 und die Barankin'sche Schranke, also (11) für $\alpha = \frac{1}{2}$, den Wert 7,34847 besitzt.

(Oblatum 8-2-1951)