COMPOSITIO MATHEMATICA

M. PINL

Geschlossene Minimalflächen

Compositio Mathematica, tome 12 (1954-1956), p. 178-184

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1954-1956__12__178_0>

© Foundation Compositio Mathematica, 1954-1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (http://http://www.compositio.nl/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

Geschlossene Minimalflächen

von

M. Pinl

Dacca (Pakistan)

Eine V_m in einer V_n ist nach R. Lipschitz dann und nur dann eine Minimalmannigfaltigkeit, wenn ihr mittlerer Krümmungsvektor $\mathfrak{h}$ in jedem ihrer Punkte verschwindet [1]). Dabei bezeichnen V_m bzw. V_n m- bzw. n-dimensionale reelle Mannigfaltigkeiten mit Riemannscher Übertragung und positiv-definiten Fundamentaltensoren. Die Eigenschaft, Minimalmannigfaltigkeit zu sein, ist also sehr wesentlich eine Eigenschaft der Einbettung einer V_m in eine (geeignete) V_n. Dies zeigt in noch auffallenderer Weise der folgende Satz [2]): es sei eine reelle V_m in einer V_n gegeben. Ist $n > m + 1$, so gibt es für jeden Wert $q \leqq n - m - 1$ unendlich viele die V_m enthaltende V_{m+q}, in bezug auf welche die gegebene V_m eine Minimalmannigfaltigkeit ist. Dieses Ergebnis ermöglicht eine gewisse Umkehrung des ursprünglichen Problems, da jetzt V_m gegeben und V_{m+q} gesucht ist und das Variationsproblem durch ein Einbettungsproblem ersetzt wird. Gehen wir dabei insbesondere von einer *geschlossenen* V_m in V_n aus, so kann nach dem erwähnten Satz durch diese V_m eine V_{m+q} mit $q \leqq n - m - 1$ hindurchgelegt werden, in welcher die V_m eine *geschlossene* Minimalmannigfaltigkeit darstellt. Wir bestätigen dies im Folgenden an dem Beispiel einer V_2 im euklidischen vierdimensionalen Raum R_4. Als V_2 wählen wir das bekannte torusähnliche Modell der euklidischen Ebene [3]):

$$(1) \qquad x_1 = \cos u, \; x_2 = \sin u, \; x_3 = \cos v, \; x_4 = \sin v.$$

Wir nennen sie im Folgenden die Modellfläche.

---

[1]) vgl. R. Lipschitz, Ausdehnung der Theorie der Minimalflächen, Journal für reine und angewandte Mathematik 78 (1874), 1—45.

[2]) vgl. J. A. Schouten und D. J. Struik, Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie II, § 11, S. 94; Groningen 1938.

[3]) vgl. D. Hilbert und S. Cohn-Vossen, Anschauliche Geometrie, § 51, S. 302, Berlin Springer 1932.

§ 1. Einbettung der Modellfläche.

Nach (1) erscheint die Modellfläche als zweidimensionale Fläche im vierdimensionalen euklidischen Raum der kartesischen Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4. Da $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 2$, liegt die Modellfläche auf der dreidimensionalen Hyperkugel:

$$(2)\qquad \begin{aligned} x_1 &= \sqrt{2}\cos v_1, \quad x_2 = \sqrt{2}\sin v_1 \cos v_2, \\ x_3 &= \sqrt{2}\sin v_1 \sin v_2 \cos v_3, \quad x_4 = \sqrt{2}\sin v_1 \sin v_2 \sin v_3. \end{aligned}$$

Damit wäre bereits eine Einbettung der Modellfläche in einer V_3 des R_4 gefunden:

$$\sqrt{2}\cos v_1 = \cos u, \quad \sqrt{2}\sin v_1 \cos v_2 = \sin u,$$
$$\sqrt{2}\sin v_1 \sin v_2 \cos v_3 = \cos v, \quad \sqrt{2}\sin v_1 \sin v_2 \sin v_3 = \sin v.$$

Zur Vereinfachung der kommenden Rechnungen, jedoch auch aus geometrischen Gründen, wollen wir jetzt die Modellfläche (1) auf isotrope Parameter u_1, u_2 transformieren

$$u = u_1 + u_2, \quad v = i(u_1 - u_2), \quad \frac{\partial(u, v)}{\partial(u_1, u_2)} = -2i \neq 0, \quad (i = \sqrt{-1}).$$

Bezeichnen wir dann den Ortsvektor in R_4 mit $\mathfrak{x}$ und seine Ableitungen nach den Flächenparametern u_1, u_2 durch angehängte Indizes, so entsteht aus (1):

$$\begin{aligned}
\mathfrak{x} &= \{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{\cos(u_1 + u_2), \ \sin(u_1 + u_2), \\
&\qquad \cos i(u_1 - u_2), \ \sin i(u_1 - u_2)\}; \ \mathfrak{x}^2 = 2; \\
\mathfrak{x}_1 &= \{-\sin(u_1 + u_2), \cos(u_1 + u_2), -i \sin i(u_1 - u_2), \\
&\qquad i \cos i(u_1 - u_2)\}, \ \mathfrak{x}_1^2 = 0; \\
&\qquad \mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2 = 2; \\
\mathfrak{x}_2 &= \{-\sin(u_1 + u_2), \cos(u_1 + u_2), i \sin i(u_1 - u_2), \\
&\qquad - i \cos i(u_1 - u_2)\}, \ \mathfrak{x}_2^2 = 0; \\
\mathfrak{x}_{12} &= \{-\cos(u_1 + u_2), -\sin(u_1 + u_2), -\cos i(u_1 - u_2), \\
&\qquad -\sin i(u_1 - u_2)\} = -\mathfrak{x}.
\end{aligned}$$

Die gemischte Ableitung $\mathfrak{x}_{12}$ hat demnach in diesen Parametern die gleiche Richtung wie der Ortsvektor $\mathfrak{x}$ der Modellfläche selbst. Ihre euklidische Metrik hat die Komponenten

$$g_{11} = \mathfrak{x}_1^2 = 0, \ g_{12} = \mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2 = 2, \ g_{22} = \mathfrak{x}_2^2 = 0, \ g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = -4.$$

Die zugehörigen kontravarianten Komponenten sind:

$$(3) \qquad g^{11} = g^{22} = 0, \; g^{12} = \tfrac{1}{2}$$

und die Christoffelsymbole $\left\{ {1 \atop 12} \right\}$ und $\left\{ {2 \atop 12} \right\}$ verschwinden. Für den Krümmungsaffinor $\mathfrak{h}_{\alpha\beta}$ der V_2 in R_4 erhalten wir [4])

$$(4) \qquad \mathfrak{h}_{\alpha\beta} = \mathfrak{x}_{\alpha\beta} - \left\{ {\varrho \atop \alpha\beta} \right\} \mathfrak{x}_\varrho, \quad \alpha, \beta, \varrho = 1, 2.$$

Dabei ist über doppelt auftretende Indizes zu summieren. Für den mittleren Krümmungsvektor $\mathfrak{h}$ erhalten wir nach (3) und (4)

$$\mathfrak{h} = g^{\alpha\beta} \mathfrak{h}_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{h}_{12} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{x}_{12} = -\tfrac{1}{2}\mathfrak{x} \neq 0.$$

Der mittlere Krümmungsvektor $\mathfrak{h}$ ist also ebenfalls proportional zum Ortsvektor der Fläche und verschwindet nicht. Die Modellfläche ist demnach keine Minimal-V_2 des R_4. Sie soll es jedoch in Bezug auf eine geeignet gewählte V_3 des R_4 sein. Um diese zu bestimmen, benutzen wir den Satz [5]): ist eine V_{n_2} in einer V_{n_1} eingebettet und diese in einer V_n, so ist der mittlere Krümmungsvektor der V_{n_2} in Bezug auf die V_{n_1} die V_{n_1}-Komponente des mittleren Krümmungsvektors in Bezug auf die V_n. Sei also in unserm Falle ($n_2 = 2$, $n_1 = 3$, $V_n = R_4$) die V_3 in R_4 durch die Gleichungen

$$x_1 = x_1(v_1, v_2, v_3), \; x_2 = x_2(v_1, v_2, v_3), \; x_3 = x_3(v_1, v_2, v_3),$$
$$x_4 = x_4(v_1, v_2, v_3)$$

gegeben. Der mittlere Krümmungsvektor der V_2 in Bezug auf die V_3 ist die V_3-Komponente ihres mittleren Krümmungsvektors $\mathfrak{h} = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$ in Bezug auf R_4. Er verschwindet dann und nur dann, wenn $\mathfrak{h}$ auf jeder Fortschreitungsrichtung $d\mathfrak{x} = \{dx_1, dx_2, dx_3, dx_4\}$ in V_3 senkrecht steht. Damit bekommen wir die notwendige Bedingung

$$\mathfrak{h}\, d\mathfrak{x} = h_1 dx_1 + h_2 dx_2 + h_3 dx_3 + h_4 dx_4 = 0$$

oder

$$\mathfrak{x}\, d\mathfrak{x} = x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3 + x_4 dx_4 = 0, \text{ d.h. } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \text{const.},$$

da $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{x}$ in unserm Falle proportional sind. Wir kommen also notwendig auf Hyperkugeln und wählen mit Rücksicht auf (2) den Radius $\sqrt{2}$. Die Einbettungsgleichungen lauten jetzt:

---

[4]) vgl. [2]) I, S. 97; II, S. 81.

[5]) vgl. [2]), S. 92.

(5) $$\boxed{v_1 = \arc\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(u_1+u_2)\right), \quad v_2 = \arc\sin\left[1+\sin^2(u_1+u_2)\right]^{-\frac{1}{2}}, \quad v_3 = i(u_1 - u_2)}$$ [6])

§ 2. Berechnung der mittleren Krümmung Ω.

Wir bezeichnen die symmetrischen Komponenten des zweiten Fundamentaltensors der V_2 in V_3 mit Ω_{ij}. Dann ist die mittlere Krümmung Ω der V_2 in V_3 durch

(6) $$\Omega = g^{ij}\Omega_{ij} = \tfrac{1}{2}(\Omega_{12} + \Omega_{21}) = \Omega_{12}, \quad i, j = 1, 2$$

gegeben. Sind ξ^β ($\beta = 1, 2, 3$) die Komponenten des Normalvektors der V_2 in V_3 so gilt [7])

(7) $$\Omega_{12} = (a_{\alpha\beta} v^\alpha_{,12} + [\mu\,\nu, \beta]_a v^\mu_{,1} v^\nu_{,2})\,\xi^\beta.$$

Dabei bedeuten $a_{\alpha\beta}$ die Komponenten des metrischen Fundamentaltensors der $V_3(2)$:

(8) $$a_{11} = 2, \quad a_{22} = 2\sin^2 v_1, \quad a_{33} = 2\sin^2 v_1 \sin^2 v_2, \quad a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$$

und $[\mu\gamma, \beta]_a$ die zugehörigen Christoffelklammern erster Art:

(9) $$\begin{aligned}
&[11, 1] = [12, 1] = [13, 1] = 0, \quad [22, 1] = -2\sin v_1 \cos v_1,\\
&\qquad [23, 1] = 0, \quad [33, 1] = -2\sin v_1 \cos v_1 \sin^2 v_2,\\
&[11, 2] = 0, \ [12, 2] = -[22, 1], \ [13, 2] = [22, 2] = [23, 2] = 0,\\
&\qquad [33, 2] = -2\sin^2 v_1 \sin v_2 \cos v_2,\\
&[11, 3] = [12, 3] = 0, \ (13, 3] = -[33, 1], \ [22, 3] = 0,\\
&\qquad [23, 3] = -[33, 2], \ [33, 3] = 0.
\end{aligned}$$

Die v_1, v_2, v_3 sind offensichtlich orthogonale Hyperkugelkoordinaten, so daß zwischen kontravarianten und kovarianten Komponenten der Vektoren auf V_3 nicht zu unterschieden werden braucht. Die Indizes 1 und 2 in (7) beziehen sich auf die kovarianten ersten bzw. zweiten Ableitungen der v^α mit Bezug auf die Metrik der V_2. Diese ist jedoch euklidisch, da die V_2 Modell-

[6]) die Matrix $\left\|\begin{matrix} \frac{\partial v_1}{\partial u_1} & \frac{\partial v_2}{\partial u_1} & \frac{\partial v_3}{\partial u_1} \\ \frac{\partial v_1}{\partial u_2} & \frac{\partial v_2}{\partial u_2} & \frac{\partial v_3}{\partial u_2} \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} \frac{\partial v_1}{\partial u_1} & \frac{\partial v_2}{\partial u_1} & \frac{\partial v_3}{\partial u_1} \\ \frac{\partial v_1}{\partial u_1} & \frac{\partial v_2}{\partial u_1} & \frac{\partial v_3}{\partial u_2} \end{matrix}\right\|$ hat den Rang 2.

[7]) vgl. L. Pf. Eisenhart, Riemannian Geometry, IV 50, S. 168; Princeton 1949.

fläche der euklidischen Ebene ist. Die kovarianten Ableitungen fallen also mit den gewöhnlichen zusammen:

$$v^{\alpha}{}_{,12} = \frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial u_1 \partial u_2}, \quad v^{\alpha}{}_{,1} = \frac{\partial v_\alpha}{\partial u_1}, \quad v^{\alpha}{}_{,2} = \frac{\partial v_\alpha}{\partial u_2}.$$

Damit ergibt sich zur Berechnung des Faktors von ξ^β aus (7), (8), (9) und (5):

$$\beta = 1; \; a_{\alpha 1} \frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial u_1 \partial u_2} + [\mu\nu, 1] \frac{\partial v_\mu}{\partial u_1} \frac{\partial v_\nu}{\partial u_2} =$$

$$= \frac{2 \cos (u_1 + u_2)}{[1 + \sin^2 (u_1 + u_2)]^{\frac{1}{2}}} - \frac{\cos^3 (u_1 + u_2)}{[1 + \sin^2 (u_1 + u_2)]^{\frac{3}{2}}} -$$

$$- \frac{\cos (u_1 + u_2)}{[1 + \sin^2 (u_1 + u_2)]^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

$$\beta = 2; \; a_{\alpha 2} \frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial u_1 \partial u_2} + [\mu\nu, 2] \frac{\partial v_\mu}{\partial u_1} \frac{\partial v_\nu}{\partial u_2} =$$

$$= \frac{\sin (u_1 + u_2)[2 + \cos^2 (u_1 + u_2)]}{1 + \sin^2 (u_1 + u_2)} + [12, 2] \left(\frac{\partial v_1}{\partial u_1} \frac{\partial v_2}{\partial u_2} + \frac{\partial v_2}{\partial u_1} \frac{\partial v_1}{\partial u_2} \right) +$$

$$+ [33, 2] \frac{\partial v_3}{\partial u_1} \frac{\partial v_3}{\partial u_2} = \frac{\sin (u_1 + u_2)[2 + \cos^2 (u_1 + u_2)]}{1 + \sin^2 (u_1 + u_2)} -$$

$$- \frac{2 \cos^2 (u_1 + u_2) \sin (u_1 + u_2)}{1 + \sin^2 (u_1 + u_2)} - \sin (u_1 + u_2) = 0,$$

$$\beta = 3; \; a_{\alpha 3} \frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial u_1 \partial u_2} + [\mu\nu, 3] \frac{\partial v_\mu}{\partial u_1} \frac{\partial v_\nu}{\partial u_2} =$$

$$= 0 + i[13, 3] \left(\frac{\partial v_1}{\partial u_2} - \frac{\partial v_1}{\partial u_1} \right) + [23, 3] \left(\frac{\partial v_3}{\partial u_2} + \frac{\partial v_3}{\partial u_1} \right) \frac{\partial v_2}{\partial u_1} = 0.$$

Nach (7) und (6) verschwinden mithin Ω_{12} und Ω auf der Modellfläche. Damit ist gezeigt: *die reelle Fläche*

$$v_1 = \arc \cos \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos u \right), \; v_2 = \arc \sin \, [1 + \sin^2 u]^{-\frac{1}{2}}, \; v_3 = v$$

auf der Hyperkugel (2) *des euklidischen vierdimensionalen Raumes ist hinsichtlich ihrer nichteuklidischen Einbettung ein Beispiel einer geschlossenen reellen Minimalfläche, deren Gaußsche Krümmung verschwindet.* Nach E. Bompiani [8]) kann jede Minimalfläche eines

[8]) vgl. E. Bompiani, Surfaces de translation et surfaces minima dans les espaces courbes. Comptes Rendus, 169 (1919), 840—843.

Riemannschen Raumes als Schiebfläche ihrer isotropen Kurven aufgefasst werden, wenn diese der Parallelverschiebung von Levi-Civita im Sinne der Metrik des Einbettungsraumes unterworfen werden. Der analytische Ausdruck dieser Tatsache ergibt sich in unserm Falle unmittelbar aus den Relationen:

$$a_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial u_1 \partial u_2} + [\mu\nu, \beta]_a \frac{\partial v_\mu}{\partial u_1}\frac{\partial v_\nu}{\partial u_2} = 0, \quad \beta = 1, 2, 3,$$

deren Gültigkeit wir eben bewiesen haben. Durch Überschieben mit $a^{\lambda\beta}$ folgt

$$\frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial u_1 \partial u_2} + \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}_a \frac{\partial v_\mu}{\partial u_1}\frac{\partial v_\nu}{\partial u_2} = 0, \quad \lambda = 1, 2, 3$$

und die Tangenten der Parameterkurven $u_1 = \mathrm{const}$ und $u_2 = \mathrm{const}$ sind isotrop, denn es gilt:

$$a_{\alpha\beta}\frac{\partial v_\alpha}{\partial u_1}\frac{\partial v_\beta}{\partial u_1} = 2\left(\frac{\partial v_1}{\partial u_1}\right)^2 + 2\sin^2 v_1 \left(\frac{\partial v_2}{\partial u_1}\right)^2 + 2\sin^2 v_1 \sin^2 v_2 \left(\frac{\partial v_3}{\partial u_1}\right)^2 =$$
$$= 2\frac{\sin^2(u_1+u_2)}{1+\sin^2(u_1+u_2)} + [1+\sin^2(u_1+u_2)]\frac{\cos^2(u_1+u_2)}{[1+\sin^2(u_1+u_2)]^2} - 1 = 0,$$

da auf der Modellfläche wegen $x_3^2 + x_4^2 = \cos^2 v + \sin^2 v$ nach (2) und (1) stets $2\sin^2 v_1 \sin^2 v_2 = 1$ gilt. Nach (5) erhalten wir:

$$(10) \qquad \frac{\partial v_1}{\partial u_1} = \frac{\partial v_1}{\partial u_2}, \quad \frac{\partial v_2}{\partial u_1} = \frac{\partial v_2}{\partial u_2}, \quad \frac{\partial v_3}{\partial u_1} = -\frac{\partial v_3}{\partial u_2}$$

und daher auch $a_{\alpha\beta}\dfrac{\partial v_\alpha}{\partial u_2}\dfrac{\partial v_\beta}{\partial u_2} = 0$. Aber auch die dritte der Einbettungsdifferentialgleichungen

$$a_{\alpha\beta}\frac{\partial v_\alpha}{\partial u_1}\frac{\partial v_\beta}{\partial u_2} = g_{12} = 2$$

ist nach (8), (10) und (5) erfüllt. Damit ist gezeigt: *die isotropen Kurven der Modellfläche sind Imprimitivitätssysteme* [9]) *gegenüber der Gruppe der nicht-euklidischen Translationen im sphärischen dreidimensionalen Raum aber nicht solche gegenüber der Gruppe der euklidischen Translationen im euklidischen vierdimensionalen Raum.*

Diese hier zuletzt erwähnte Eigenschaft ist kein durch das

---

[9]) vgl. S. Lie, Arch. for Math. III, Part 2, 166—176, Kristiania 1878; gesammelte Abhandlungen I, 331—339, Leipzig 1934.

spezielle Beispiel bedingter Zufall, vielmehr gilt allgemein: *es gibt keine sphärischen oder hypersphärischen Minimalflächen im euklidischen R_n $(n \geqq 3)$ mit nichtverschwindender Diskriminante der ersten Fundamentalform.*

Den Nachweis führen wir indirekt. Die Fläche sei durch

$$\mathfrak{x} = \{x_1(u_1, u_2), x_2(u_1, u_2), \ldots, x_n(u_1, u_2)\}$$

gegeben und liege auf der Hyperkugel

$$\mathfrak{x}^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \equiv \text{const} \quad \{u_1, u_2\}. \tag{11}$$

Die Parameter u_1, u_2 seien isotrope Parameter und die Diskriminante der ersten Fundamentalform der Fläche $\mathfrak{x}$ sei

$$\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{x}_2^2 - (\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2)^2 = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = -g_{12}^2 \neq 0, \ (g_{11} = g_{22} = 0). \tag{12}$$

Aus (11) entsteht durch Differentiation nach u_1 und u_2

$$\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1 = 0, \ \mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}\mathfrak{x}_{12} = g_{12} + \mathfrak{x}\mathfrak{x}_{12} = 0. \tag{13}$$

Wäre $\mathfrak{x}(u_1, u_2)$ Minimalfläche des R_n, so würde nach S. Lie

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{y}(u_1) + \mathfrak{z}(u_2), \ \mathfrak{x}_{12} = 0$$

bestehen, dann aber nach (12) und (13)

$$g_{11} = g_{12} = g_{22} = 0$$

und die Diskriminante verschwände doch.

(Oblatum 17-3-54).