Composititio Mathematica

Robert Remak

Über algebraische Zahlkörper mit schwachem Einheitsdefekt

Compositio Mathematica, tome 12 (1954-1956), p. 35-80

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1954-1956__12__35_0>

Über algebraische Zahlkörper mit schwachem Einheitsdefekt

von

Robert Remak † *).

Einleitung.

In einer Arbeit „Ueber Größenbeziehungen zwischen Diskriminante und Regulator eines algebraischen Zahlkörpers" [1]) (ZDR) habe ich die Abschätzung bewiesen

$$(1) \qquad \log |D| \leqq n \log n + \frac{|R|}{R_{\min}} \log 2 \,.\, \frac{2n(n-1)}{k+1}\, g^{\frac{k-1}{2}}.$$

Hierin ist D die Körperdiskriminante, n der Grad des algebraischen Zahlkörpers $\mathfrak{K}$ und R der Regulator des Körpers [2]). $R_{\min}$ ist die von D unabhängige beste untere Schranke für $|R|$ aus meiner früheren Arbeit [3]) RU. Wenn $n = r + 2s$ ist, wo r die Anzahl der reellen Konjugierten, s die Anzahl der Paare konjugiert komplexen Konjugierter einer erzeugenden Zahl des Körpers bedeutet, so ist $k = r + s - 1$ die Anzahl der unabhängigen Einheiten in $\mathfrak{K}$ [4]), ferner

---

*) Diese Arbeit wurde von welland ROBERT REMAK bei den Acta Arithmetica eingereicht und von der Redaktion angenommen Ende 1938 oder Beginn 1939. Nach dem Kriege müßte man feststellen, daß das Schreibmaschinenmanuskript in Warschau verloren gegangen war. Der Autor hatte aber in Amsterdam ein in Gabelsbergerscher Kurzschrift gestelltes Manuskript hinterlassen, mit Anweisungen für die Publikation im Fall seines Todes. Dieses Manuskript wurde im Auftrag des „Mathematisch Centrum, Amsterdam" von Frau VAN DER WAERDEN in gewöhnliche Schrift übersetzt.

ROBERT REMAK kam in den dreißiger Jahren als Emigrant nach Amsterdam und wurde 1942 von der deutschen Besatzung nach Annaberg abtransportiert. Es muß angenommen werden, daß sein Leben vor dem Kriegsende (in Auschwitz?) ein Ende fand.

[1]) REMAK, Compositio Mathematica, 10 (1952), p. 245—285.

[2]) siehe E. HECKE, Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen, Leipzig 1923, S. 131.

[3]) R. REMAK, Ueber die Abschätzung des absoluten Betrages des Regulators eines algebraischen Zahlkörpers nach unten, J. f. Math. 167 (Hensel-Festband) 1931, S. 360—378, zitiert RU.

[4]) siehe l.c. Anm. [2]) S. 128.

$$(2)\qquad g = \frac{k + 5 + \sqrt{k^2 + 2k + 17}}{2}.$$

Hierbei mußten die Körper mit Einheitsdefekt ausgenommen werden, das sind diejenigen algebraischen Zahlkörper $\mathfrak{K}$, die nicht mehr unabhängige Einheiten besitzen als ein echter Unterkörper $\hat{\mathfrak{K}}$. Es ergab sich leicht, daß hierzu notwendig und hinreichend ist, daß $\mathfrak{K}$ total imaginär, $\hat{\mathfrak{K}}$ total reell und der Relativgrad 2 ist.

Ich werde in der gegenwärtigen Arbeit zwischen *starkem* und *schwachem* Einheitsdefekt unterscheiden. Der Einheitsdefekt heißt stark, wenn alle Einheiten und Einheitswurzeln von $\mathfrak{K}$ auch in $\hat{\mathfrak{K}}$ liegen. Ein Einheitsdefekt, der nicht stark ist, heißt schwach. Bei schwachem Einheitsdefekt enthält also $\mathfrak{K}$ mindestens eine Einheit oder Einheitswurzel, die nicht in $\hat{\mathfrak{K}}$ vorkommt.

In § 1 dieser Arbeit will ich zeigen, daß sich die Abschätzung (1) für Körper mit schwachem Einheitsdefekt für $n \geqq 6$ retten läßt, während für $n = 4$ und schwachem Einheitsdefekt, also für $k = 1$, für sich die Formel ZDR § 9 (137) retten läßt, so daß es also genügt, die Zahlkörper mit starkem Einheitsdefekt zu behandeln, d.h. die Zahlkörper $\mathfrak{K}$, deren sämtliche Einheiten in $\hat{\mathfrak{K}}$ liegen.

Beim Beweis wird benutzt, daß der Index zwischen den Einheitsgruppen in $\mathfrak{K}$ und $\hat{\mathfrak{K}}$, von den Einheitswurzeln abgesehen, nur 1 oder 2 sein kann. Der Nachweis hierfür wird in § 2 geführt. Der Leser, der nur das unbedingt Notwendige finden will, um die in § 1 gegebene Abschätzung vollständig zu begründen, braucht nur die §§ 1—2 zu lesen.

Da die Frage nach den Zahlkörpern von schwachem Einheitsdefekt an sich von Interesse ist, werde ich sie in den folgenden Paragraphen eingehend behandeln und vor allem zeigen, daß über einem festen total reellen Körper $\hat{\mathfrak{K}}$ nur endlich viele verschiedene Oberkörper $\mathfrak{K}$ vom relativen Grad 2 von schwachem Einheitsdefekt möglich sind. Die Einheiten in $\mathfrak{K}$ sind entweder Einheitswurzeln oder von der Form $\pi'\varepsilon'$, worin π' und ε' nicht für sich in $\mathfrak{K}$ vorkommen; es ist

$$\pi'^2 = \hat{\pi}$$

eine total positive Einheit in $\hat{\mathfrak{K}}$, die kein Quadrat in $\hat{\mathfrak{K}}$ ist;

$$\varepsilon'^2 = \varepsilon$$

ist eine in $\mathfrak{K}$ vorkommende Einheitswurzel.

Der Leser, der die vorangehende Arbeit ZDR nicht kennt, kann § 1 überschlagen, mit § 2 zu lesen beginnen und findet eine völlig elementare Arbeit über die Eigenschaften der algebraischen Zahlkörper von schwachem Einheitsdefekt (ohne Geometrie der Zahlen und ohne Idealtheorie). Die Betrachtungen werden sich in zahlreiche Schlüsse gliedern von denen jeder einzelne so einfach ist, daß ich sie nicht gerne als Hilfssatz, sondern als Bemerkung bezeichnen möchte.

§ 1.

Es sei ein total reeller algebraischer Zahlkörper $\hat{\mathfrak{K}}$ vom Grade $\hat{n}$ enthalten in einem total imaginären Zahlkörper $\mathfrak{K}$ vom Grade $n = 2\hat{n}$. Dann besitzt nach ZDR § 1 der Körper $\mathfrak{K}$ einen Einheitsdefekt. Der Einheitsdefekt soll ein schwacher sein, d.h. es sollen in $\mathfrak{K}$ Einheiten oder Einheitswurzeln ϑ existieren, die nicht in $\hat{\mathfrak{K}}$ liegen. Man adjungiere ϑ zu $\hat{\mathfrak{K}}$. Da der Relativgrad 2 eine Primzahl ist, kann es keinen Zwischenkörper geben. Es ist also

$$\mathfrak{K} = \hat{\mathfrak{K}}(\vartheta).$$

Es sei

$$\hat{\omega}_1^{(1)},\ \hat{\omega}_1^{(2)}, \ldots,\ \hat{\omega}_1^{(\hat{n})}$$

eine Basis der ganzen Zahlen von $\hat{\mathfrak{K}}$. Dann ist für die Körperdiskriminante $\hat{D}$ von $\hat{\mathfrak{K}}$

$$\operatorname{abs} \sqrt{|\hat{D}|} = \operatorname{abs} \begin{vmatrix} \hat{\omega}_1^{(1)} & \hat{\omega}_1^{(2)} & \ldots & \hat{\omega}_1^{(\hat{n})} \\ \hat{\omega}_2^{(1)} & \hat{\omega}_2^{(2)} & \ldots & \hat{\omega}_2^{(\hat{n})} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hat{\omega}_{\hat{n}}^{(1)} & \omega_{\hat{n}}^{(2)} & \ldots & \omega_{\hat{n}}^{(\hat{n})} \end{vmatrix}$$

Hierin durchläuft $\hat{\omega}_\nu^{(\varrho)}$ bei festem ϱ die algebraisch Konjugierten von $\hat{\omega}_1^{(\varrho)}$,

$$\vartheta_1 \hat{\omega}_1^{(1)},\ \vartheta_1 \hat{\omega}_1^{(2)}, \ldots,\ \vartheta_1 \hat{\omega}_1^{(\hat{n})},\ \hat{\omega}_1^{(1)}.\ \hat{\omega}_1^{(2)}, \ldots,\ \hat{\omega}_1^{(\hat{n})}$$

ist eine Basis aller oder gewissen ganzen Zahlen in $\mathfrak{K}$. Die Determinante der Übergangssubstitution gegenüber der vollständigen Basis der ganzen Zahlen in $\mathfrak{K}$ ist eine ganze rationale Zahl. Es ist also

$$
(3)\left\{
\begin{aligned}
\operatorname{abs}\sqrt{|D|} &\leqq \operatorname{abs}
\begin{vmatrix}
\vartheta_1\hat\omega_1^{(1)}, & \vartheta_1\hat\omega_1^{(2)} & \dots & \vartheta_1\hat\omega_1^{(\hat n)}, & \hat\omega_1^{(1)}, & \hat\omega_1^{(2)} & \dots & \hat\omega_1^{(\hat n)} \\
\vartheta_2\hat\omega_2^{(1)}, & \vartheta_2\hat\omega_2^{(2)} & \dots & \vartheta_2\hat\omega_2^{(\hat n)}, & \hat\omega_2^{(1)}, & \hat\omega_2^{(2)} & \dots & \hat\omega_2^{(\hat n)} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\vartheta_{\hat n}\hat\omega_{\hat n}^{(1)}, & \vartheta_{\hat n}\hat\omega_{\hat n}^{(2)} & \dots & \vartheta_{\hat n}\hat\omega_{\hat n}^{(\hat n)}, & \hat\omega_{\hat n}^{(1)}, & \hat\omega_{\hat n}^{(2)} & \dots & \hat\omega_{\hat n}^{(\hat n)} \\
\bar\vartheta_1\hat\omega_1^{(1)}, & \bar\vartheta_1\hat\omega_1^{(2)} & \dots & \bar\vartheta_1\hat\omega_1^{(\hat n)}, & \hat\omega_1^{(1)}, & \hat\omega_1^{(2)} & \dots & \hat\omega_1^{(\hat n)} \\
\bar\vartheta_2\hat\omega_2^{(1)}, & \bar\vartheta_2\hat\omega_2^{(2)} & \dots & \bar\vartheta_2\hat\omega_2^{(\hat n)}, & \hat\omega_2^{(1)}, & \hat\omega_2^{(2)} & \dots & \hat\omega_2^{(\hat n)} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\bar\vartheta_{\hat n}\hat\omega_{\hat n}^{(1)}, & \bar\vartheta_{\hat n}\hat\omega_{\hat n}^{(2)} & \dots & \bar\vartheta_{\hat n}\hat\omega_{\hat n}^{(\hat n)}, & \hat\omega_{\hat n}^{(1)}, & \hat\omega_{\hat n}^{(2)} & \dots & \hat\omega_{\hat n}^{(\hat n)}
\end{vmatrix} \\
&= \operatorname{abs}
\begin{vmatrix}
(\vartheta_1-\bar\vartheta_1)\hat\omega_1^{(1)}, & (\vartheta_1-\bar\vartheta_1)\hat\omega_1^{(2)} & \dots & (\vartheta_1-\bar\vartheta_1)\hat\omega_1^{(\hat n)}, & 0, & 0 & \dots & 0 \\
(\vartheta_2-\bar\vartheta_2)\hat\omega_2^{(1)}, & (\vartheta_2-\bar\vartheta_2)\hat\omega_2^{(2)} & \dots & (\vartheta_2-\bar\vartheta_2)\hat\omega_2^{(\hat n)}, & 0, & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
(\vartheta_{\hat n}-\bar\vartheta_{\hat n})\hat\omega_{\hat n}^{(1)}, & (\vartheta_{\hat n}-\bar\vartheta_{\hat n})\hat\omega_{\hat n}^{(2)} & \dots & (\vartheta_{\hat n}-\bar\vartheta_{\hat n})\hat\omega_{\hat n}^{(\hat n)}, & 0, & 0 & \dots & 0 \\
\bar\vartheta_1\hat\omega_1^{(1)}, & \bar\vartheta_1\hat\omega_1^{(2)} & \dots & \bar\vartheta_1\hat\omega_1^{(\hat n)}, & \hat\omega_1^{(1)}, & \hat\omega_1^{(2)} & \dots & \hat\omega_1^{(\hat n)} \\
\bar\vartheta_2\hat\omega_2^{(1)}, & \bar\vartheta_2\hat\omega_2^{(2)} & \dots & \bar\vartheta_2\hat\omega_2^{(\hat n)}, & \hat\omega_2^{(1)}, & \hat\omega_2^{(2)} & \dots & \hat\omega_2^{(\hat n)} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\bar\vartheta_{\hat n}\hat\omega_{\hat n}^{(1)}, & \bar\vartheta_{\hat n}\hat\omega_{\hat n}^{(2)} & \dots & \bar\vartheta_{\hat n}\hat\omega_{\hat n}^{(\hat n)}, & \hat\omega_{\hat n}^{(1)}, & \hat\omega_{\hat n}^{(2)} & \dots & \hat\omega_{\hat n}^{(\hat n)}
\end{vmatrix} \\
&= |\vartheta_1-\bar\vartheta_1| \,.\, |\vartheta_2-\bar\vartheta_2| \dots |\vartheta_{\hat n}-\bar\vartheta_{\hat n}| \,.\, (\operatorname{abs}\sqrt{|\hat D|})^2 \\
&\leqq 2\,|\vartheta_1| \,.\, 2\,|\vartheta_2| \dots 2\,|\vartheta_{\hat n}| \,.\, \sqrt{|\hat D|}^2 = 2^{\hat n}\sqrt{|\hat D|}^2.
\end{aligned}\right.
$$

Bei der Aufstellung der ersten Determinante in (3) geht man folgendermaßen vor. Es sei z_1 eine erzeugende Zahl von $\mathfrak{K}$. Die $2\hat n$ Konjugierten von z_1 seien so angeordnet, daß die ersten $\hat n$ keine zwei konjugiert komplexe Zahlen enthalten und daß

$$z_{\hat n+\nu} = \bar z_\nu \text{ für } 1 \leqq \nu \leqq \hat n.$$

Hierin bedeute $\bar a$ die zu a konjugiert komplexe Zahl. Man erhält für $1 \leqq \mu \leqq 2\hat n = n$ die μ-te Zeile aus der ersten, indem man z_1 durch z_μ ersetzt. Hierbei ergibt sich für die reellen Zahlen

$$\hat\omega_{\hat n+\nu}^{(\varrho)} = \hat\omega_\nu^{(\varrho)}$$

Die zweite Determinante in (3) entsteht aus der ersten durch Subtraktion der $(\hat n+\nu)$-ten Zeile von der ν-ten Zeile; ferner ist in (3) benutzt, daß

$$\left\{\begin{aligned} |\vartheta_1|\,|\vartheta_2| \dots |\vartheta_{\hat n}| &= \operatorname{abs}\sqrt{\vartheta_1\bar\vartheta_1\vartheta_2\bar\vartheta_2\dots\vartheta_{\hat n}\bar\vartheta_{\hat n}} = \\ &= \operatorname{abs}\sqrt{\text{Norm }\vartheta_1} = 1.\end{aligned}\right.$$

Man erhält also aus (3)

$$(4) \qquad |D| \leqq 2^{2\hat{n}} |\hat{D}|^2.$$

(4) kann zur Abschätzung von $\log |D|$ benutzt werden. Es sei $k \geqq 2$, also

$$(5) \qquad \hat{n} \geqq 3, \; n \geqq 6.$$

Die Fälle $\hat{n} = 1$ und $\hat{n} = 2$ sollen später nachgeholt werden. Für $\hat{\mathfrak{K}}$ gilt die Abschätzung (1). Es ist also

$$(6) \quad \log |D| \leqq 2\hat{n} \log 2 + 2 \log |\hat{D}| \leqq$$
$$\leqq 2\hat{n} \log 2 + 2\hat{n} \log \hat{n} + \frac{2|\hat{R}|}{\hat{R}_{\min_Q}} \log 2 \, . \, \frac{2\hat{n}(\hat{n}-1)}{\hat{k}+1} \, . \, \hat{g}^{\frac{\hat{k}-1}{2}} .$$

In (6) ist $\hat{R}_{\min_Q}$ geschrieben, weil nach **RU** für total reelle Körper die günstigste untere Schranke durch das Quadratverfahren gewonnen wird.

Die auf $\hat{\mathfrak{K}}$ bezüglichen Zahlen müssen in die entsprechenden auf $\mathfrak{K}$ bezüglichen umgerechnet werden. Es ist

$$n = 2\hat{n}$$

oder

$$(7) \qquad \hat{n} = \tfrac{1}{2} n.$$

$\hat{\mathfrak{K}}$ ist total imaginär, also

$$(8) \qquad r = 0, \quad s = \frac{n}{2} = \hat{n}$$

$\mathfrak{K}$ ist total reell, also

$$(9) \qquad \hat{r} = \hat{n} = \frac{n}{2}, \quad \hat{s} = 0$$

mithin

$$k = 0 + \frac{n}{2} - 1 = \frac{n}{2} - 1$$

$$(10) \qquad \hat{k} = \frac{n}{2} + 0 - 1 = \frac{n}{2} - 1$$

also die Bedingung des Einheitsdefektes

$$(11) \qquad k = \hat{k}$$

mithin wegen Formel (2) auch

$$(11a) \qquad g = \hat{g}.$$

Es ist nach ZDR (8)

$$|\hat{R}| = \frac{1}{2^k} \operatorname{abs} |h_{\lambda\mu}| \cdot |R|. \tag{12}$$

Der Beweis dafür, daß die ganzzahlige Übergangsdeterminante

$$\operatorname{abs} |h_{\lambda\mu}| \leqq 2 \tag{13}$$

ist, soll in § 2 nachgeholt werden. Es ist nach ZDR (33)

$$\frac{n}{\sqrt{k+1}} \log 2 = A$$

ebenso

$$\frac{\hat{n}}{\sqrt{\hat{k}+1}} \log 2 = \hat{A} \tag{13a}$$

also mit Rücksicht auf (7) und (11)

$$\hat{A} = \frac{A}{2}. \tag{14}$$

Es soll $R_{\min}$ nicht mit $\hat{R}_{\min_Q}$, sondern mit $\hat{R}_{\min}$ verglichen werden. Es ist nach ZDR (83) mit Rücksicht auf (8)

$$R_{\min} = \frac{B_{2k+1}}{\sqrt{k+1}} \cdot w \cdot A^k \cdot \frac{(\operatorname{Min}(4\pi, A))^{\hat{n}}}{(4\pi)^{\hat{n}}} \tag{15}$$

$$\hat{R}_{\min} = \frac{B_{2\hat{k}+1}}{\sqrt{\hat{k}+1}} \cdot \hat{w} \cdot \hat{A}^{\hat{k}} \cdot \frac{(\operatorname{Min}(2\pi, \hat{A}))^{\hat{n}}}{(2\pi)^{\hat{n}}}. \tag{16}$$

Wegen (14) ist

$$2 \cdot \operatorname{Min}(2\pi, \hat{A}) = \operatorname{Min}(4\pi, A). \tag{17}$$

$\hat{\mathfrak{K}}$ ist total reell, enthält also nur die Einheitswurzeln $+1$ und -1; also ist $\hat{w} = 2$. Man erhält also aus (15) und (16) mit Rücksicht auf (11), (14), (17)

$$\hat{R}_{\min} = R_{\min} \cdot \frac{2}{w \cdot 2^k}. \tag{18}$$

Jetzt setzt man (7), (11), (11a), (12), (13), (18) in (6) ein:

$$\log |D| \leqq n \log n + \frac{\frac{4}{2^k} |R|}{R_{\min} \frac{2}{w \cdot 2^k}} \cdot \frac{\hat{R}_{\min}}{\hat{R}_{\min_Q}} \cdot \log 2 \cdot \frac{n\left(\frac{n}{2} - 1\right)}{k+1} \cdot g^{\frac{k-1}{2}} \tag{19}$$

$$= n \log n + \frac{|R|}{R_{\min}} \log 2 \cdot \frac{2n(n-1)}{k+1} \cdot g^{\frac{k-1}{2}} \cdot f$$

worin

$$(20) \qquad f = \frac{w}{2} \frac{\mathfrak{R}_{\min}}{\mathfrak{R}_{\min_Q}} \cdot \frac{n-2}{n-1}.$$

Der Körper der w-ten Einheitswurzeln ist wegen der Irreduzibilität der Kreisteilungsgleichung [5]) vom Grad $\varphi(w)$ und in $\mathfrak{K}$ enthalten, also ist n durch $\varphi(w)$ teilbar.

Es sei

$$w = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m},$$

worin $p_1, p_2, \dots, p_m$ untereinander verschiedene Primzahlen und die Exponenten $\alpha_\mu \geqq 1$ sind. Dann ist

$$\varphi(w) = (p_1 - 1)p_1^{\alpha_1-1}(p_2 - 1)p_2^{\alpha_2-1} \dots (p_m - 1)p_m^{\alpha_m-1}.$$

Es ist für $x \geqq 2$

$$x^2 \geqq 2x > x + 1$$

also ist für $p_\mu \geqq 3$

$$(p_\mu - 1)^2 > p_\mu$$

mithin für $p_\mu \geqq 3$

$$(21) \qquad ((p_\mu - 1)p_\mu^{\alpha_\mu-1})^2 > p_\mu \cdot p_\mu^{2(\alpha_\mu-1)} \geqq p_\mu p_\mu^{\alpha_\mu-1} = p_\mu^{\alpha_\mu}.$$

Für $p_1 = 2$ erhält man

$$(22) \qquad 2((p_1 - 1)p_1^{\alpha_1-1})^2 = 2 \,.\, 2^{2(\alpha_1-1)} \geqq 2 \,.\, 2^{\alpha_1-1} = 2^{\alpha_1}.$$

Unter Benützung von (21) und (22) ergibt sich

$$2n^2 \geqq 2(\varphi(w))^2 \geqq w$$

also die rohe, aber hier ausreichende Abschätzung für w

$$w \leqq 2n^2.$$

Dies ergibt, in (20) eingesetzt,

$$(23) \qquad f \leqq n^2 \frac{\mathfrak{R}_{\min}}{\mathfrak{R}_{\min_Q}}.$$

Es ist nach ZDR (83) und (83Q)

$$\mathfrak{R}_{\min} = \frac{B_{2\hat{k}+1}}{\sqrt{\hat{k}+1}} \,.\, \hat{w} \,.\, \hat{A}^{\hat{k}} \,.\, \frac{(\mathrm{Min}\,(2\pi, \hat{A}))^{\hat{n}}}{(2\pi)^{\hat{n}}}$$

$$\mathfrak{R}_{\min_Q} = \frac{B_{\hat{n}-1}}{\sqrt{\hat{k}+1}} \,.\, \hat{w} \,.\, \frac{\hat{A}^{\hat{k}}}{2^{\hat{k}}}.$$

---

[5]) Siehe z.B. die Arbeiten, sämtliche in der Math. Z., 26 (1927) S. 442—444 von Späth, 29 (1929) S. 426 von Landau, S. 463 von I. Schur.

Mit Rücksicht auf (10) und (7) erhält man aus (23)

$$f \leqq n^2 \frac{B_{2\hat{n}-1}}{B_{\hat{n}-1}} \cdot 2^{\hat{n}-1} \cdot M. \tag{24}$$

Hierin ist zur Abkürzung

$$M = \left(\operatorname{Min}\left(1; \frac{\hat{A}}{2\pi}\right)\right)^{\hat{n}} \tag{24a}$$

gesetzt. Es ist

$$M \leqq 1. \tag{24b}$$

In (24) ist nach ZDR (76) einzusetzen

$$B_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(2 + \frac{n}{2}\right)}$$

also

$$f \leqq \frac{n^2 \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{2\hat{n}-1}{2}}}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{\hat{n}-1}{2}}} \cdot \frac{\Gamma\left(2 + \frac{\hat{n}-1}{2}\right)}{\Gamma\left(2 + \frac{2\hat{n}-1}{2}\right)} \cdot 2^{\hat{n}-1} \cdot M = \tag{25}$$

$$= 2\hat{n}^2 (2\pi)^{\frac{\hat{n}}{2}} \cdot \frac{\Gamma\left(2 + \frac{\hat{n}-1}{2}\right)}{\Gamma\left(2 + \frac{2\hat{n}-1}{2}\right)} \cdot M.$$

Hierin setzt man nach (24a), (13a), (10)

$$M \leqq \left(\frac{\hat{A}}{2\pi}\right)^{\hat{n}} = \left(\frac{\sqrt{\hat{n}} \log 2}{2\pi}\right)^{\hat{n}}$$

und erhält

$$f \leqq 2\hat{n}^2 \cdot (2\pi)^{\frac{\hat{n}}{2}} \cdot \frac{\Gamma\left(2 + \frac{\hat{n}-1}{2}\right)}{\Gamma\left(2 + \frac{2\hat{n}-1}{2}\right)} \cdot \left(\frac{\sqrt{\hat{n}} \log 2}{2\pi}\right)^{\hat{n}} \tag{26}$$

$$= \frac{2(\log 2)^{\hat{n}}}{(2\pi)^{\frac{\hat{n}}{2}}} \cdot \hat{n}^{\frac{\hat{n}}{2}+2} \cdot \frac{\Gamma\left(2 + \frac{\hat{n}-1}{2}\right)}{\Gamma\left(2 + \frac{2\hat{n}-1}{2}\right)} = F_{\hat{n}}$$

worin $F_{\hat{n}}$ zur Abkürzung eingeführt ist. Man benutzt die Rekursionsformel der Γ-Funktionen

$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$$

und bildet

$$(27) \quad \frac{F_{\hat{n}}}{F_{\hat{n}-2}} = \frac{(\log 2)^2}{2\pi} \cdot \frac{\hat{n}^{\frac{\hat{n}}{2}+2}}{(\hat{n}-2)^{\frac{\hat{n}-2}{2}+2}} \cdot \frac{1+\frac{\hat{n}-1}{2}}{\left(1+\frac{2\hat{n}-1}{2}\right)\frac{2\hat{n}-1}{2}} =$$

$$= \frac{(\log 2)^2}{4\pi} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{2}{\hat{n}}\right)^{\frac{\hat{n}}{2}}} \cdot \frac{\hat{n}^2(\hat{n}+1)}{(\hat{n}-2)(\hat{n}+\frac{1}{2})(\hat{n}-\frac{1}{2})} =$$

$$= \frac{(\log 2)^2}{4\pi} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{2}{\hat{n}}\right)^{\frac{\hat{n}}{2}}} \cdot \frac{1+\frac{1}{\hat{n}}}{\left(1-\frac{2}{\hat{n}}\right)\left(1-\frac{1}{4\hat{n}^2}\right)} =$$

$$= B_1 \,.\, B_2 \,.\, B_3$$

$$(28) \qquad \log B_2 = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\hat{n}}\right)^{\lambda-1} \cdot \frac{1}{\lambda}$$

ist konvergent für $\hat{n} > 2$. Mit wachsendem $\hat{n}$ nimmt $\log B_2$ ständig ab, weil die Glieder der rechten Seite von (42) einzeln ständig abnehmen, also nimmt B_2 ständig ab. In B_3 nimmt mit wachsendem $\hat{n}$ der Zähler ständig ab, die beiden Faktoren des Nenners ständig zu, also B_3 ständig ab. Also nimmt

$$\frac{F_{\hat{n}}}{F_{\hat{n}-2}}$$

ständig ab. Da nach (5) nur Werte $\hat{n} \geqq 3$ betrachtet werden sollen, genügt es, in (27) $\hat{n} \geqq 5$ anzunehmen. Es ist

$$\frac{F_5}{F_3} \leqq \frac{(0{,}7)^2}{2\pi} \cdot \frac{5^{\frac{9}{2}}}{3^{\frac{7}{2}}} \cdot \frac{3}{(1+\frac{9}{2})\frac{9}{2}} <$$

$$< \frac{1}{2\,.\,2\,.\,\pi} \cdot \frac{5^4}{3^3} \sqrt{\frac{5\,.\,3}{3\,.\,3}} \cdot \frac{3\,.\,2\,.\,2}{11\,.\,9} <$$

$$< \frac{1}{2\,.\,2\,.\,3} \cdot \frac{5^4}{3^3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3\,.\,2\,.\,2}{11\,.\,9} <$$

$$< \frac{5^4\,.\,4}{3^6\,.\,10} = \frac{2500}{7290} < 1$$

mithin

$$\frac{F_{\hat{n}}}{F_{\hat{n}-2}} < 1 \text{ für } \hat{n} \geqq 5. \tag{29}$$

Es genügt also, zu zeigen daß $F_3 < 1$ und $F_4 < 1$, um mit Hilfe von (29) schließen zu können, daß $F_{\hat{n}} < 1$ für $\hat{n} \geqq 3$. Es ist, nach (26) unter Benützung von $\Gamma(\frac{1}{2}) = \pi^{\frac{1}{2}}$

$$F_3 = 2 \,.\, \frac{(\log 2)^3}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \,.\, 3^{\frac{7}{2}} \,.\, \frac{2}{\pi^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2}} =$$

$$= \frac{(\log 2)^3 \,.\, 2^{\frac{9}{2}} \,.\, 3^{\frac{5}{2}}}{\pi^2 \,.\, 35} < \frac{(0{,}7)^2 \,.\, 0{,}7 \,.\, 2 \,.\, 2^3 \,.\, 6^{\frac{1}{2}}}{35} <$$

$$< \frac{0{,}1 \,.\, 2^3 \,.\, 3}{5} = 0{,}48 < 1$$

$$F_4 = 2 \,.\, \frac{(\log 2)^4}{(2\pi)^2} \,.\, 4^4 \,.\, \frac{\pi^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2}}{\pi^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{9}{2}} =$$

$$= \frac{2^9 (\log 2)^4}{\pi^2 \,.\, 7 \,.\, 9} < \frac{2^9 \,.\, (0{,}7)^4}{9 \,.\, 7 \,.\, 9} < \frac{2^7}{9 \,.\, 7 \,.\, 9} = \frac{128}{567} < 1.$$

Es ist also mit Rücksicht auf (26)

$$f \leqq F_{\hat{n}} < 1 \text{ für } \hat{n} \geqq 3.$$

Dies ergibt, in (19) eingesetzt,

$$\log |D| \leqq n \log n + \frac{|R|}{R_{\min}} \log 2 \,.\, \frac{2n(n-1)}{k+1} \,.\, g^{\frac{k-1}{2}}. \tag{30}$$

Das ist aber genau die Formel (1), die also für $k \geqq 2$, d.h. $n \geqq 6$, auch im Falle des schwachen Einheitsdefektes gilt. Im Falle $k = 1$ gelten die besonderen Abschätzungen ZDR § 9 (135), (136), (137)

$$\log |D| \leqq 2 \log 2 + 2 |R| \quad \text{für } n = 2,\ r = 2,\ s = 0 \tag{31}$$

$$\log |D| \leqq 3 \log 3 + 2\sqrt{3}\, |R| \quad \text{für } n = 3,\ r = 1,\ s = 1 \tag{32}$$

$$\log |D| \leqq 4 \log 4 + 4 |R| \quad \text{für } n = 4,\ r = 0,\ s = 2 \tag{33}$$

(32) kommt hier nicht in Frage. Es soll gezeigt werden, daß für $k = 1$ und schwachen Einheitsdefekt, die gleichen Abschätzungen gelten. Es muß also $\hat{n} = 2$; $n = 4$ sein. Es ist nach (4)

$$\log |D| \leqq 4 \log 2 + 2 \log |\hat{D}|. \tag{34}$$

Es ist, da $k = 1$, nach (12) und (13),

$$|\hat{R}| = \frac{\text{abs}\,|h_{\lambda\mu}|}{2} \cdot |R| \leqq \frac{2}{2}\,|R| = |R|. \tag{35}$$

In (34) setzt man (31) ein und benutzt (35):

$$\begin{aligned} \log|D| &\leqq 4 \cdot \log 2 + 2(2 \cdot \log 2 + 2\,|\hat{R}|) \\ &= 4 \cdot \log 4 + 4\,|\hat{R}| \leqq 4 \cdot \log 4 + 4\,|R|. \end{aligned}$$

Damit ist aber (33) auch für den Fall $k = 1$ für Körper mit schwachem Einheitsdefekt bewiesen.

Für $n = 2$; $r = 0$, $s = 1$, also imaginär-quadratische Zahlkörper ist $k = 0$. Bei schwachem Einheitsdefekt können in $\mathfrak{K}$ nur Einheitswurzeln auftreten, und zwar die 4. oder 6. Einheitswurzeln. Es handelt sich um die beiden Zahlkörper $P(i)$ und $P(i\sqrt{3})$ mit den Diskriminanten $|D| = 3$ bezw. $|D| = 4$. Für diese ist

$$\log|D| \leqq 2 \log 2$$

Es sind also bis auf den im nächsten Paragraphen zu führen Nachweis von (13) die Abschätzungen aus ZDR auch für schwachen Einheitsdefekt erwiesen, und es braucht mithin nur der starke Einheitsdefekt ausgenommen zu werden, d.h. der Fall, daß sämtliche Einheiten von $\mathfrak{K}$ in einem echten Unterkörper $\hat{\mathfrak{K}}$ liegen.

§ 2.

Es soll in diesem § der Nachweis von (13) nachgeholt werden. Es soll aber für den Leser, der ohne § 1 und die vorangehenden Abschätzungsarbeiten zu kennen, hier zu lesen beginnt, die Definitionen wiederholt werden.

Es sei $\mathfrak{K}$ ein algebraischer Zahlkörper mit „Einheitsdefekt", d.h. $\mathfrak{K}$ besitzt nicht mehr unabhängige Einheiten als ein echter Unterkörper $\hat{\mathfrak{K}}$. Es sei n der Grad von $\mathfrak{K}$. Eine erzeugende Zahl von $\mathfrak{K}$ besitzt r reelle, s Paare konjugiert komplexer Konjugierte. Die Anzahl der unabhängigen Einheiten ist

$$k = r + s - 1$$

Es ist $n = r + 2s$. Die entsprechenden Zahlen für $\hat{\mathfrak{K}}$ seien $\hat{n}$, $\hat{r}$, $\hat{s}$, $\hat{k}$. Ein Einheitsdefekt liegt vor, wenn $\hat{k} = k$. Es ist für jeden Körper $\mathfrak{K}$

$$k = r + s - 1 = \frac{2r + 2s}{2} - 1 \geqq \frac{r + 2s}{2} - 1 = \frac{n}{2} - 1. \tag{36}$$

Es ist für jeden Unterkörper $\hat{\mathfrak{K}}$ von $\mathfrak{K}$

$$(37)\qquad \hat{k} = \hat{r} + \hat{s} - 1 \leqq \hat{r} + 2\hat{s} - 1 = \hat{n} - 1 \leqq \frac{n}{2} - 1.$$

Aus (36) und (37) folgt, da $\hat{n}$ ein echter Teiler von n ist,

$$(38)\qquad k \geqq \frac{n}{2} - 1 \geqq \hat{k}.$$

Wenn also in (38) das Gleichheitszeichen stehen soll, so muß in (36) und (37) überall das Gleichheitszeichen stehen, d.h. es muß sein

$$r = 0, \quad \hat{s} = 0, \quad \hat{n} = \frac{n}{2}.$$

Es besitzt also $\mathfrak{K}$ *dann und nur dann einen Einheitsdefekt, wenn* $\mathfrak{K}$ *total imaginär und vom Relativgrad* 2 *über einem total reellen Unterkörper* $\hat{\mathfrak{K}}$ *ist.* Der Einheitsdefekt heißt „stark", wenn sogar sämtliche Einheiten und Einheitswurzeln von $\mathfrak{K}$ in $\hat{\mathfrak{K}}$ liegen. Ein Einheitsdefekt der nicht stark ist, heißt „schwach". Im Fall des schwachen Einheitsdefektes kommt also in $\mathfrak{K}$ eine Einheit oder eine Einheitswurzel vor, die nicht in $\hat{\mathfrak{K}}$ liegt.

Es sei $\vartheta_1^{(1)}, \vartheta_1^{(2)}, \ldots, \vartheta_1^{(k)}$ ein vollständiges System von fundamentalen Einheiten von $\mathfrak{K}$. Wenn ξ_1 eine erzeugende Zahl von $\mathfrak{K}$ und ξ_ν ihre Konjugierten durchläuft, $1 \leqq \nu \leqq n$, so sei definiert

$$\psi_\nu = 1, \text{ wenn } \xi_\nu \text{ reell,}$$
$$\psi_\nu = 2, \text{ wenn } \xi_\nu \text{ komplex.}$$

Die Reihenfolge der ξ_ν sei so gewählt, daß die ξ_ϱ reell sind für $1 \leqq \varrho \leqq r$. Diese fallen für total imaginäre $\mathfrak{K}$ weg. Unter den komplexen Zahlen $\xi_{r+1}, \xi_{r+2}, \ldots, \xi_{r+s}$ kommen keine zwei zueinander konjugiert komplexe Zahlen vor. Es sei ferner

$$\xi_{\sigma+s} = \bar{\xi}_\sigma \quad \text{für } r + 1 \leqq \sigma \leqq r + s,$$

worin $\bar{a}$ die zu a konjugiert komplexe Zahl ist.

Man setzt

$$R[\psi_\nu \log \vartheta_\nu^{(\mu)}] = \log |\vartheta_\nu^{(\mu)}|^{\psi_\nu} = a_\nu^{(\mu)}.$$

Dann ist die k-reihige Determinante

$$|a_\nu^{(\mu)}| = R$$

der Regulator des Körpers [6]). Hier im total imaginären Fall sind sämtliche $\psi_\nu = 2$. Da der Index ν nur bis k läuft, so kommen keine zwei zueinander konjugiert komplexe Zahlen $\vartheta_\nu^{(\mu)}$ vor;

[6]) Siehe l.c. Anmerkung [2]).

ferner fehlt eine Konjugierte, da $k = \frac{n}{2} - 1$. Entsprechend sei für $\hat{\mathfrak{K}}$:

$$\hat{\vartheta}_1^{(1)}, \hat{\vartheta}_1^{(2)}, \ldots, \hat{\vartheta}_1^{(k)}$$

ein vollständiges System von fundamentalen Einheiten. Da diese gleichzeitig Einheiten von $\mathfrak{K}$ sind, so ist

$$\hat{\vartheta}_1^{(\lambda)} = \varepsilon_1 \vartheta_1^{(1)^{h_{\lambda 1}}} \vartheta_1^{(2)^{h_{\lambda 2}}} \ldots \vartheta_1^{(k)^{h_{\lambda k}}}$$

ε_1 bedeutet eine Einheitswurzel. Diese Gleichung gilt auch, wenn man zu den n Konjugierten übergeht. Da links eine reelle Einheit steht, so ergeben die unteren Indices ν und $\nu + s$, die zu konjugiert komplexen Konjugierten gehören, links denselben Wert. Läßt man den unteren Index nur bis k laufen, so kommen keine konjugiert komplexe ξ_ν vor, also links keine zwei Konjugierten in $\hat{\mathfrak{K}}$. Da $\hat{\mathfrak{K}}$ ein total reeller Körper ist, so sind sämtliche $\psi_\nu = 1$. Geht man zu den Logarithmen der absoluten Beträge über, so erhält man

$$\hat{a}_\nu^{(\lambda)} = \tfrac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{k} h_{\lambda\mu}\, a_\nu^{(\mu)}. \tag{39}$$

Es ist also nach dem Multiplikationstheorem der Determinanten

$$\begin{aligned} \hat{R} = \left| \hat{a}_\nu^{(\lambda)} \right| &= \frac{1}{2^k} \left| h_{\lambda\mu} \right| \cdot \left| a_\nu^{(\mu)} \right| \\ &= \frac{1}{2^k} \left| h_{\lambda\mu} \right| . R. \end{aligned} \tag{40}$$

Es soll gezeigt werden, daß die ganze rationale Zahl $\left| h_{\lambda\mu} \right|$ nur die Werte 1 und 2 annehmen kann.

Bemerkung: $\mathfrak{K}$ enthält nur Zahlen mit lauter reellen Konjugierten, die in $\hat{\mathfrak{K}}$ vorkommen, und Zahlen, die keine reellen Konjugierten besitzen; diese kommen nicht in $\hat{\mathfrak{K}}$ vor. Beweis: Da es zwischen $\mathfrak{K}$ und $\hat{\mathfrak{K}}$ keine Zwischenkörper geben kann, weil der Relativgrad eine Primzahl ist, erzeugt die Adjunktion irgend einer Zahl ξ_1 von $\mathfrak{K}$, die nicht zu $\hat{\mathfrak{K}}$ gehört, zu $\hat{\mathfrak{K}}$ bereits den ganzen Körper $\mathfrak{K}$. Besäße ξ_1 eine reelle Konjugierte ξ_ν so wäre $\hat{\mathfrak{K}}(\xi_\nu)$ ein zu $\mathfrak{K}$ konjugierter reeller Körper, was der Voraussetzung widerspricht, daß $\mathfrak{K}$ total imaginär sein soll.

Da der Körper $\mathfrak{K}$ von schwachem Einheitsdefekt war, enthält er eine Einheit ϑ, die nicht in $\hat{\mathfrak{K}}$ vorkommt. Sie genügt einer quadratischen Gleichung mit Koeffizienten aus $\hat{\mathfrak{K}}$

$$\vartheta^2 + \hat{a}\vartheta + \hat{n} = 0 \tag{41}$$

und da ϑ eine nicht zu $\hat{\mathfrak{K}}$ gehörige Zahl aus $\mathfrak{K}$ ist, ist ϑ eine nicht reelle Zahl. (41) ist eine quadratische Gleichung mit reellen Koeffizienten. Die zweite Wurzel der Gleichung (41) ist also die zu ϑ konjugiert komplexe Zahl $\bar{\vartheta}$. Es ist mithin

$$\mathfrak{n} = \vartheta\bar{\vartheta}$$

eine positive Einheit des Körpers $\hat{\mathfrak{K}}$. Dies gilt auch für sämtliche Konjugierte von ϑ in $\mathfrak{K}$, da keine von ihnen reell ist nach der Bemerkung. Also ist $\mathfrak{n}$ total positiv. Es ist

$$\vartheta^2 = \vartheta\bar{\vartheta}\frac{\vartheta}{\bar{\vartheta}} = \mathfrak{n}\varepsilon^* \tag{42}$$

$$\frac{\vartheta^2}{\mathfrak{n}} = \varepsilon^* \tag{43}$$

Hierin ist

$$\varepsilon^* = \frac{\vartheta}{\bar{\vartheta}}$$

eine Einheit, für die

$$|\varepsilon^*| = \frac{|\vartheta|}{|\bar{\vartheta}|} = 1. \tag{44}$$

ε^* ist nach (44) eine Einheit in $\mathfrak{K}$. Geht man zu den konjugierten Körpern von $\mathfrak{K}$ über, so geht (41) in die konjugierte Gleichung über; also bleibt die Beziehung zwischen ϑ und $\mathfrak{n}$ erhalten. Für die Konjugierten von ε^* gilt ebenfalls (44). Eine Einheit deren sämtliche Konjugierte den absoluten Betrag 1 haben, ist aber eine Einheitswurzel[7]). Die sämtlichen in $\mathfrak{K}$ vorkommenden Einheitswurzeln bilden eine zyklische Gruppe $\mathfrak{W}$; es sei ε ein Basiselement dieser Gruppe. w sei die Ordnung von ε, also auch von $\mathfrak{W}$, d.h. es ist

$$\varepsilon^w = 1$$
$$\varepsilon^v \neq 1 \quad \text{für } v < w.$$

w ist stets gerade, da -1 unter den Einheitswurzeln vorkommt. Es sei $\varepsilon^* = \varepsilon^v$, also nach (42)

$$\vartheta^2 = \mathfrak{n}\varepsilon^v. \tag{45}$$

Es werden 2 Hauptfälle unterschieden, je nachdem v gerade oder ungerade ist.

Hauptfall A): v gerade, $v = 2x$
Dann ist

$$\vartheta^2\varepsilon^{-2x} = \mathfrak{n}$$

oder

$$(\vartheta\,.\,\varepsilon^{-x})^2 = \mathfrak{n}$$
$$\vartheta\,.\,\varepsilon^{-x} = \sqrt{\mathfrak{n}}.$$

---

[7]) Siehe z.B. l.c. Anm. [2]), S. 123.

Die in $\mathfrak{K}$ vorkommende Einheit $\vartheta \,.\, \varepsilon^{-x}$ ist als Quadratwurzel aus der total positiven Einheit $\hat{\varkappa}$ noch total reell, also kommt sie bereits in $\hat{\mathfrak{K}}$ vor, sie möge mit $\hat{\vartheta}$ bezeichnet werden:

$$\vartheta \,.\, \varepsilon^{-x} = \hat{\vartheta}$$

$$\vartheta = \hat{\vartheta} \,.\, \varepsilon^{x}. \tag{46}$$

Bezeichnet $\hat{\mathfrak{G}}$ die Gruppe der Einheiten von $\hat{\mathfrak{K}}$, so enthält die Gruppe $\hat{\mathfrak{G}}\mathfrak{W}$ alle Einheiten von $\mathfrak{K}$, für die in (45) der Exponent v gerade ist. Gehört umgekehrt eine Einheit von $\mathfrak{K}$ zu $\hat{\mathfrak{G}}\mathfrak{W}$, so ist sie von der Form (46); also

$$\vartheta^2 = \hat{\vartheta}^2 \,.\, \varepsilon^{2x}$$

Hierin is $\hat{\vartheta}^2$ eine total positive Einheit; also ist für diese Einheit v gerade.

Hauptfall B): Wenn die Gruppe $\hat{\mathfrak{G}}\mathfrak{W}$ die Gruppe der Einheiten $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{K}$ nicht erschöpft, so gibt es in $\mathfrak{K}$ eine Einheit ϑ, für die

$$\vartheta^2 = \hat{\varkappa}\varepsilon^{v} \tag{47}$$

mit ungeradem v. Aus (47) ist unmittelbar ersichtlich, daß ϑ^2 zu $\hat{\mathfrak{G}}\mathfrak{W}$ gehört. Hat man zwei Einheiten ϑ_1 und ϑ_2 in $\mathfrak{K}$, für die

$$\vartheta_1^2 = \hat{\varkappa}_1\varepsilon^{v_1}; \quad \vartheta_2^2 = \hat{\varkappa}_2\varepsilon^{v_2} \tag{48}$$

mit ungeraden v_1 und v_2, so ist

$$(\vartheta_1\vartheta_2^{-1})^2 = \vartheta_1^2\vartheta_2^{-2} = \hat{\varkappa}_1\hat{\varkappa}_2^{-1}\varepsilon^{v_1-v_2}.$$

Hier ist aber $v_1 - v_2$ gerade, also nach Hauptfall A)

$$\vartheta_1\vartheta_2^{-1} = \hat{\vartheta}\varepsilon^{x}. \tag{49}$$

Damit ist bewiesen: Wenn nicht $\mathfrak{G} = \hat{\mathfrak{G}} \,.\, \mathfrak{W}$ ist, so ist die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\hat{\mathfrak{G}} \,.\, \mathfrak{W}$ von der Ordnung 2; d.h. das Quadrat einer jeden Einheit von $\mathfrak{G}$ gehört zu $\hat{\mathfrak{G}} \,.\, \mathfrak{W}$, und zwei Einheiten von $\mathfrak{G}$, die nicht zu $\hat{\mathfrak{G}} \,.\, \mathfrak{W}$ gehören, unterscheiden sich nur um einen Faktor, der zu $\hat{\mathfrak{G}} \,.\, \mathfrak{W}$ gehört:

$$\mathfrak{G} = \hat{\mathfrak{G}} \,.\, \mathfrak{W} + \vartheta_1 \,.\, \hat{\mathfrak{G}} \,.\, \mathfrak{W} \tag{50}$$

Es sei

$$\vartheta_1^* = \vartheta_1^{(1)^{t_1}}\vartheta_1^{(2)^{t_2}} \ldots \vartheta_1^{(k)^{t_k}}$$

eine Einheit in $\mathfrak{K}$, die, auch von Einheitswurzeln abgesehen, nicht in $\hat{\mathfrak{K}}$ vorkommt, mit anderen Worten die zu $\mathfrak{G}$, aber nicht zu $\hat{\mathfrak{G}} \,.\, \mathfrak{W}$ gehört. Die ganzzahligen Exponenten

$$t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_k$$

können nicht sämtlich gerade sein; denn das Quadrat einer jeden

Einheit aus $\mathfrak{G}$ kommt in $\hat{\mathfrak{G}} \,.\, \mathfrak{W}$ vor. Es können $t_1, t_2, \ldots, t_k$ noch den ungeraden größten gemeinsamen Teiler u haben. Dann setzt man

$$t_k = x_k \,.\, u$$
$$\vartheta_1 = \vartheta_1^{(1)x_1}\, \vartheta_1^{(2)x_2} \ldots \vartheta_1^{(k)x_k}$$

worin jetzt $x_1, x_2, \ldots, x_k$ teilerfremd sind. Es wird also

$$\vartheta_1^* = \vartheta_1^u.$$

Es kann nicht ϑ_1 in $\hat{\mathfrak{G}} \,.\, \mathfrak{W}$ enthalten sein, weil dann $\vartheta_1^u = \vartheta_1^*$ in $\hat{\mathfrak{G}}\mathfrak{W}$ enthalten ist, entgegen der Voraussetzung.

Der Uebergang von einer Basis $a_\nu^{(\mu)}$ zu einer anderen geschieht durch eine unimodulare Substitution. Die $x_1, \ldots, x_k$ lassen sich weiter teilerfremd zu einer unimodularen Substitution ergänzen. Es gibt also ein neues Fundamentalsystem von $\mathfrak{G}$, das ϑ_1 enthält. ϑ_1^2 ist nur Quadrat und sonst keine Potenz einer anderen Einheit in $\mathfrak{K}_1$. Es ist nach (47)

$$\vartheta_1^2 \,.\, \varepsilon^{-v_1} = \hat{\kappa}_1. \tag{51}$$

Diese Einheit kann also nicht Potenz einer anderen Einheit in $\hat{\mathfrak{G}}$ sein. Also kann man ein Fundamentalsystem von $\hat{\mathfrak{G}}$ finden, das $\hat{\kappa}_1$ enthält:

$$\hat{\kappa}_1 = \hat{\vartheta}_1^{(1)}, \hat{\vartheta}_1^{(2)}, \ldots, \hat{\vartheta}_1^{(k)}.$$

Es hat $k = \hat{n} - 1$ für $\mathfrak{K}$ und $\hat{\mathfrak{K}}$ denselben Wert. Mit Rücksicht auf (50) ist

$$\varepsilon,\ \vartheta_1,\ \hat{\vartheta}_1^{(2)},\ \ldots,\ \hat{\vartheta}_1^{(k)}$$

eine Basis von $\mathfrak{G}$; denn da mit ε und ϑ_1^2 nach (51) die Einheit $\hat{\kappa}_1 = \hat{\vartheta}_1^{(1)}$ darstellbar ist, erhält man die Darstellungsmöglichkeit von $\hat{\mathfrak{G}}\mathfrak{W}$. Die ungeraden Potenzen von ϑ_1 liefern dann die Darstellung von $\vartheta_1 \,.\, \hat{\mathfrak{G}} \,.\, \mathfrak{W}$. Also ist nach (50) die ganze Gruppe $\mathfrak{G}$ dargestellt.

(39) spezialisiert sich jetzt folgendermaßen: der Faktor $\frac{1}{2}$ rechts bleibt stehen, da im total reellen Körper $\hat{\mathfrak{K}}$ sämtlichte $\hat{\psi}_\nu = 1$, im total imaginären Körper $\mathfrak{K}$ sämtliche $\psi_\nu = 2$ sind.

$$\hat{a}_\nu^{(1)} = \tfrac{1}{2} \,.\, 2a_\nu^{(1)}$$
$$\hat{a}_\nu^{(\lambda)} = \tfrac{1}{2} a_\nu^{(\lambda)} \qquad \text{für } \lambda = 2, 3, \ldots, k.$$

Es ist also

$$|h_{\lambda\mu}| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ & & & \ldots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Aus (40) folgt für den Hauptfall B)

$$|\hat{R}| = \frac{2}{2^k}|R| = \frac{1}{2^{k-1}}|R| = \frac{1}{2^{\hat{n}-2}}|R|.$$

Es ist also

$$abs\,|h_{\lambda\mu}| = 1 \text{ im Hauptfall A)}$$
$$qbs\,|h_{\lambda\mu}| = 2 \text{ im Hauptfall B).}$$

Damit ist der Beweis der Ungleichung (13) des § 1 nachgeholt.

§ 3.

Es soll im folgenden gezeigt werden, daß über einem festen, gegebenen, total reellen Körper $\hat{\mathfrak{K}}$, nur endlich viele total imaginäre Oberkörper $\mathfrak{K}$ vom Relativgrad 2 von schwachem Einheitsdefekt existieren, d.h. solche Körper, in denen neue Einheiten auftreten.

Bemerkung 1.

Die Endlichkeit dieser Anzahl ist leicht einzusehen. Es ist für jede Einheit in $\mathfrak{K}$ nach (42)

$$\vartheta^2 = \hat{\kappa}\varepsilon^*.$$

Ist w^* die Ordnung von ε^*, so muß der Grad $\varphi(w^*)$ des Kreiskörpers $P(\varepsilon^*)$ im Grad von $\mathfrak{K}$, also in $n = 2\hat{n}$ aufgehen, das gibt für w^* nur endlich viele Möglichkeiten. Ferner leisten zwei Einheiten $\hat{\kappa}_1$ und $\hat{\kappa}_2$ in $\hat{\mathfrak{K}}$, deren Quotient das Quadrat einer Einheit in $\mathfrak{K}$ ist, für die Adjunktion zu $\hat{\mathfrak{K}}$ dasselbe; ordnet man aber zwei Einheiten, deren Quotient ein Quadrat ist, in dieselbe Klasse ein, so gibt es nur endlich viele Klassen, also gibt es für ϑ überhaupt nur endlich viele Möglichkeiten. Die folgenden Paragraphen sind der genaueren Untersuchung dieser Möglichkeiten der Adjunktion einer Einheit gewidmet.

Es bedeute P den Körper der rationalen Zahlen, $P(\varepsilon)$ einen von einer nicht reellen Einheitswurzel ε erzeugten Kreisteilungskörper, kürzer Kreiskörper. Es werde gesetzt

$$\varepsilon + \varepsilon^{-1} = \eta.$$

ε genügt der quadratischen Gleichung

$$x^2 - \eta x + 1 = 0 \tag{52}$$

deren zweite Wurzel ε^{-1} ist. ε ist quadratisch in Bezug auf den total reellen Körper $P(\eta)$. Wenn ε eine primitive w-te Einheitswurzel ist, so ist wegen der Irreduzibilität der Kreisteilungsgleichung $P(\varepsilon)$ vom Grade $\varphi(w)$. w möge die Ordnung des Kreiskörpers heißen. $P_w(\varepsilon)$ bedeute einen Kreiskörper von der Ordnung w. Da mit ε auch stets $-\varepsilon$ im Körper vorkommt, so können Ordnungen eines Kreiskörpers stets gerade angenommen werden.

Bemerkung 2.

$x^a + x^{-a}$ ist als ganzrationale Funktion von $y = x + x^{-1}$ darstellbar, und zwar werden bei geradem a nur gerade Potenzen von y, bei ungeradem a nur ungerade Potenzen von y gebraucht.

Beweis: $x^{a+1} + x^{-(a+1)} = (x + x^{-1})(x^a + x^{-a}) - (x^{a-1} + x^{-(a-1)})$ und $x^2 + x^{-2} = y^2 - 2$. Dies gibt mit vollständiger Induktion nach a die Behauptungen der Bemerkung 2.

Bemerkung 3. Setzt man wieder

$$\eta = \varepsilon + \varepsilon^{-1}$$

so ist $P(\eta)$ der Unterkörper aller reellen Zahlen von $P(\varepsilon)$. Beweis: Jede Zahl in $P(\varepsilon)$ hat die Form $g(\varepsilon)$, ein Polynom in ε mit rationalen Koeffizienten. Es ist

$$2R[g(\varepsilon)] = g(\varepsilon) + g(\varepsilon^{-1}) = \sum_{\nu} c_\nu(\varepsilon^\nu + \varepsilon^{-\nu}) = h(\eta)$$

nach der Bemerkung 2. In der Gestalt $2R[g(\varepsilon)]$ sind aber alle reellen Zahlen in $P(\varepsilon)$ enthalten, denn wenn ε reell ist, so ist

$$g(\varepsilon) = 2R\left[\frac{g(\varepsilon)}{2}\right].$$

$P(\eta)$ heiße der zu $P(\varepsilon)$ gehörige „reelle-Kreiskörper". Die Ordnung von $P(\eta)$ sei dieselbe wie die von $P(\varepsilon)$, nämlich w. Der Grad von $P(\eta)$ ist $\frac{\varphi(w)}{2}$, weil $P(\varepsilon)$ quadratisch über $P(\eta)$ ist. Eine Einheit in $\mathfrak{K}$, die nicht in $\hat{\mathfrak{K}}$ vorkommt, hat entweder im Hauptfall A) die Gestalt

$$\vartheta = \hat{\vartheta} \cdot \varepsilon^x \tag{46}$$

wo $\hat{\vartheta}$ in $\hat{\mathfrak{K}}$ liegt, ε eine Einheitswurzel in $\mathfrak{K}$ ist; ϑ gehört zu $\mathfrak{GW}$, oder ϑ gehört im Hauptfall B) nicht zu $\mathfrak{GW}$.

Bemerkung 4. Wenn Hauptfall B) vorkommt, d.h. ϑ nicht von der Gestalt (46) ist, so ist in

$$\vartheta^2 = \hat{\kappa}\varepsilon^v \tag{47}$$

die total positive Einheit $\hat{\kappa}$ in $\hat{\mathfrak{K}}$ kein Quadrat. Beweis: Wäre in $\hat{\mathfrak{K}}$

$$\hat{\kappa} = \hat{\vartheta}^2$$

so setzt man

$$\vartheta\bar{\vartheta}^{-1} = \varepsilon^*.$$

Es wäre dann

$$\varepsilon^{*^2} = \vartheta^2\hat{\pi}^{-1} = \varepsilon^v$$

also ε^* eine Einheitswurzel in $\mathfrak{K}$, mithin

$$\varepsilon^* = \varepsilon^x$$

mit ganzzahligem x.

$$\varepsilon^{*^2} = \varepsilon^{2x} = \varepsilon^v$$

also v gerade; es läge also Hauptfall A) vor, entgegen der Voraussetzung. Es ist also

$$\vartheta = \pi'\varepsilon'.$$

Hierin kommen π' und ε' einzeln nicht in $\mathfrak{K}$ vor, es ist aber

$$\pi'^2 = \hat{\pi};$$
$$\varepsilon'^2 = \varepsilon^v.$$

Der Körper $P(\pi'\varepsilon', \hat{\pi})$ möge ein „π'-Körper" heißen. Zur Abkürzung wird gesetzt

$$P(\pi'\varepsilon', \hat{\pi}) = P\{\pi'\varepsilon'\}.$$

Es ist

$$\vartheta = \pi'\varepsilon'; \quad \bar{\vartheta} = \pi'\varepsilon'^{-1}$$

also genügt ϑ der quadratischen Gleichung

(54) $$x^2 - \pi'\eta' x + \hat{\pi} = 0.$$

Hierin ist

$$\eta' = \varepsilon' + \varepsilon'^{-1}.$$

Es muß also außer $\hat{\pi}$ auch $\pi'\eta'$ in $\hat{\mathfrak{K}}$ enthalten sein, wenn $\pi'\varepsilon'$ in $\mathfrak{K}$ vorkommen soll.

Bemerkung 5. Der Körper $P(\pi'\eta', \hat{\pi}) = P\{\pi'\eta'\}$ ist der Unterkörper sämtlicher reellen Zahlen von $P\{\pi'\varepsilon'\}$.

Beweis: Sämtliche Zahlen von $P\{\pi'\varepsilon'\}$ haben die Gestalt

$$z = f_1(\pi'\varepsilon') + f_2(\pi'\varepsilon').$$

Hierin sind die ungeraden Potenzen von $\pi'\varepsilon'$ in f_1, die geraden in f_2 gesammelt. Die Koeffizienten hängen noch von $\hat{\pi}$ ab. Da $\pi'^2 = \hat{\pi}$, kann man auch schreiben

$$z = f_1(\pi'\varepsilon') + f_3(\varepsilon'^2).$$

Dann ist

$$(55)\qquad 2Rz = f_1(\pi'\varepsilon') + f_1(\pi'\varepsilon'^{-1}) + f_3(\varepsilon'^2) + f_3(\varepsilon'^{-2}).$$

Die ersten zwei Glieder sind zu schreiben als eine Summe von Ausdrücken der Gestalt

$$c\pi'^a(\varepsilon'^a + \varepsilon'^{-a})$$

worin a ungerade und c noch von $\hat{\pi}$ abhängt. Unter Benützung von (53) wird das

$$= c\pi'^a f(\eta') = c\sum_\nu b_\nu \eta'^\nu \pi'^a$$

$$= c\sum_\nu b_\nu (\pi'\eta')^\nu \pi'^{a-\nu}.$$

Hierin sind die ν ungerade, also ist $a - \nu$ gerade und man kann fortfahren

$$= c\sum_\nu b_\nu \hat{\pi}^{\frac{a-\nu}{2}} (\pi'\eta')^\nu.$$

In den beiden letzten Ausdrücken auf der rechten Seite von (55) kommen Ausdrücke von der Form

$$\varepsilon'^{2\nu} + \varepsilon'^{-2\nu}$$

vor. Dies läßt sich nach Bemerkung 2 durch gerade Potenzen von η' ausdrücken, also durch

$$\eta'^2 = \frac{(\pi'\eta')^2}{\hat{\pi}}.$$

Mithin enthält der Körper $P\{\pi'\eta'\}$ alle reellen Zahlen aus $P\{\pi'\varepsilon'\}$. Der Körper $P\{\pi'\eta'\}$ heißt der zu $P\{\pi'\varepsilon'\}$ gehörige „reelle-π'-Körper". Wenn $P\{\pi'\varepsilon'\}$ in $\mathfrak{K}$ enthalten ist, muß $P\{\pi'\eta'\}$ in $\hat{\mathfrak{K}}$ enthalten sein. Im Ganzen haben wir 4 Arten von Körpern innerhalb $\mathfrak{K}$ definiert:

In $\mathfrak{K}$ Kreiskörper $P(\varepsilon)$, π'-Körper $P\{\pi'\varepsilon'\}$;
in $\hat{\mathfrak{K}}$ reeller-Kreiskörper $P(\eta)$, reeller-π'-Körper $P\{\pi'\eta'\}$.
Die Ordnung der Körper sei die von ε bezw. ε'.

Bemerkung 6. Ein π'-Körper $P\{\pi'\varepsilon'\}$ enthält $\frac{(\pi'\varepsilon')^2}{\hat{\pi}} = \varepsilon'^2$, enthält also den Kreiskörper $P(\varepsilon'^2)$; setzt man die Ordnung eines π'-Körpers gleich der Ordnung w' von ε', so enthält ein π'-Körper den Kreiskörper von der halben Ordnung $\frac{w'}{2}$.

Wir denken uns sämtliche Kreiskörper und π'-Körper in $\mathfrak{K}$ aufgestellt. Von diesen sollen alle diejenigen beibehalten werden, die die umfassendsten sind, d.h. die nicht echte Unterkörper eines anderen dieser Körper sind.

Bemerkung 7. Unter den Kreiskörpern in $\mathfrak{K}$ gibt es nur einen umfassendsten.

Beweis: Es seien ε_1 und ε_2 Einheitswurzeln in $\mathfrak{K}$ mit den Ordnungen w_1 und w_2; w_1 und w_2 seien gerade, was sich nötigenfalls durch Vorzeichenwechsel der ε erreichen läßt. w_3 sei der größte gemeinsame Teiler der Zahlen w_1 und w_2; w_4 sei ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches. Es soll gezeigt werden, daß es in $\mathfrak{K}$ eine primitive w_4-te Einheitswurzel gibt.

Es sei $w_1 = v_1 w_3$ und $w_2 = v_2 w_3$. Dann ist

(56) $$(v_1, v_2) = 1; \quad w_4 = v_1 v_2 w_3.$$

ε_4 sei eine primitive w_4-te Einheitswurzel, dann ist $\varepsilon_4^{v_2}$ eine primitive w_1-te Einheitswurzel, also eine Potenz von ε_1

(57) $$\varepsilon_4^{v_2} = \varepsilon_1^{y_1}$$

also ist $\varepsilon_4^{v_1}$ eine primitive w_2-te Einheitswurzel, also eine Potenz von ε_2:

(58) $$\varepsilon_4^{v_1} = \varepsilon_2^{y_2}.$$

Man bestimme

(59) $$v_1 x_1 + v_2 x_2 = 1$$

was wegen (56) möglich ist. Dann ist wegen (57) und (58)

(60) $$\varepsilon_4 = \varepsilon_4^{v_1 x_1 + v_2 x_2} = (\varepsilon_2^{y_2})^{x_1} \cdot (\varepsilon_1^{y_1})^{x_2}$$

also ist ε_4 rational durch ε_1 und ε_2 ausdrückbar.

Kommen also zwei Kreiskörper mit den Ordnungen w_1 und w_2 in $\mathfrak{K}$ vor, so kommt auch der Kreiskörper mit der Ordnung w_4 in $\mathfrak{K}$ vor, worin w_4 das KGV von w_1 und w_2 ist. Es sind also alle Kreiskörper in $\mathfrak{K}$ in einem umfassendsten Kreiskörper enthalten.

Bemerkung 8. Kommt in $\mathfrak{K}$ ein π'-Körper vor von der Ordnung

$$w' = u \cdot 2^{\alpha}$$

worin u eine ungerade Zahl ist, so ist die Ordnung eines jeden in $\mathfrak{K}$ vorkommenden Kreiskörpers höchstens durch $2^{\alpha-1}$ teilbar. Beweis: Ist das nicht der Fall, so gibt es in $\mathfrak{K}$ eine primitive 2^{α}-te Einheitswurzel. Ferner enthält der π'-Körper die Zahl

$$\frac{(\pi'\varepsilon')^u}{\pi^{\frac{u-1}{2}}} = \frac{\pi'^u}{\pi'^{u-1}}\varepsilon'^u = \pi'\varepsilon'^u.$$

ε'^{u} ist eine primitive 2^{α}-te Einheitswurzel. Diese käme für sich in $\mathfrak{K}$ vor, also käme π' für sich in $\mathfrak{K}$ vor, was unzulässig ist. Also kann in $\mathfrak{K}$ keine primitive 2^{α}-te Einheitswurzel vorkommen. Die Ordnung aller in $\mathfrak{K}$ vorkommenden Kreiskörper ist höchstens durch $2^{\alpha-1}$ teilbar.

Nach Bemerkung 6 enthält aber $\mathfrak{K}$ einen Kreiskörper von der Ordnung

$$\frac{w'}{2} = u \,.\, 2^{\alpha-1}.$$

Bemerkung 9. Zwei verschiedene π'-Körper in $\mathfrak{K}$ können nur mit demselben π' gebildet werden.

Beweis: In (48) waren zwei verschiedene Einheiten von der Form $\pi'\varepsilon'$ und $\pi''\varepsilon''$ betrachtet und es ist in (49) gezeigt worden, daß ihr Quotient $\hat{\vartheta}\varepsilon^{x_1}$ ist, worin $\hat{\vartheta}$ eine totalreelle in $\hat{\mathfrak{K}}$ vorkommende Einheit ist. Da es sich nur um Untersuchungen in Bezug auf $\mathfrak{K}$ und $\hat{\mathfrak{K}}$ handelt, kann π' durch $\pi''\varepsilon^{x}$ ersetzt werden.

Bemerkung 10. Die Ordnungen w' und w'' zweier π'-Körper in $\mathfrak{K}$ (die mit demselben π' gebildet sind) sind genau durch die gleichen Potenzen von 2 teilbar.

Beweis: Angenommen, das sei nicht der Fall. Es sei

$$w' = u \,.\, 2^{\alpha}$$
$$w'' = v \,.\, 2^{\beta}$$

worin $\beta > \alpha$, so enthält der π'-Körper $P_{w''}\{\pi'\varepsilon''\}$ nach Bemerkung 6 den Kreiskörper der Ordnung

$$\frac{w''}{2} = v \,.\, 2^{\beta-1}$$

die durch 2^{α} teilbar ist, da $\beta - 1 \geqq \alpha$. Das widerspricht aber der Bemerkung 8. Damit ist Bemerkung 10 bewiesen.

Bemerkung 11. Die Ordnung w' eines π'-Körpers ist stets durch 4 teilbar.

Beweis: Angenommen, die Behauptung sei nicht richtig. Es sei $\vartheta = \pi'\varepsilon'$. Hierin sei ε' eine primitive w'-te Einheitswurzel, wo $w' = 2u$. Es sei u ungerade. Ist die Ordnung u von ε' ungerade, so benützt man $-\varepsilon'$, das die Ordnung $2u$ hat. Dann käme ε'^{2} in $P\{\pi'\varepsilon'\}$ vor. ε'^{2} hat aber die Ordnung u. Dann hat $-\varepsilon'^{2}$ die Ordnung $2u$. Also ist ε' als Potenz von $-\varepsilon'^{2}$ darstellbar, mithin ε' in $P\{\pi'\varepsilon'\}$ enthalten, also käme auch π' für sich in $P\{\pi'\varepsilon'\}$, also auch in $\mathfrak{K}$ und, da es reell ist, in $\hat{\mathfrak{K}}$ vor, was unzulässig ist. Die Annahme

$w' = 2u$ führt zu einem Widerspruch. Also muß w' durch 4 teilbar sein.

Bemerkung 12. Wenn Hauptfall B) vorliegt, d.h. wenn in $\mathfrak{K}$ überhaupt ein π'-Körper vorhanden ist, so gibt es nur einen umfassendsten π'-Körper.

Beweis: Liegen zwei verschiedene π'-Körper vor: $P\{\pi'\varepsilon_\nu'\}$ mit der Ordnung $w_\nu' = u_\nu 2^\alpha$, u_ν ungerade, $(\nu = 1, 2)$ so sei

$$w_3 = (w_1', w_2')$$
$$w_1' = v_1 w_3'$$
$$w_2' = v_2 w_3'.$$

Dann ist das kleinste gemeinsame Vielfache

$$w_4' = v_1 v_2 w_3'$$

w_3' enthält den Faktor 2^α; die Faktoren v_1 und v_2 sind ungerade. Bestimmt man nach (59)

$$v_1 x_1 + v_2 x_2 = 1$$

so können die Faktoren x_1 und x_2 weder beide gerade noch beide ungerade sein; es ist also die eine gerade, die andere ungerade. Der Uebergang von ε_1' zu einer anderen primitiven Einheitswurzel gleicher Ordnung geschieht durch Potenzen $\varepsilon_1'^{y_1}$ mit ungeraden, zur Ordnung teilerfremden Exponenten. Nach (60) kann man setzen

$$\varepsilon_4' \pi'^{y_2 x_1 + y_1 x_2} = (\pi'\varepsilon_2')^{y_2 x_1} (\pi'\varepsilon_1')^{y_1 x_2}$$

Hierin ist aber

$$y_2 x_1 + y_1 x_2 = 2t + 1$$

eine ungerade Zahl. Also ist

$$\pi'\varepsilon_4' = \hat{\pi}^{-t} (\pi'\varepsilon_2')^{y_2 x_1} (\pi'\varepsilon_1')^{y_1 x_2}$$

mithin kommt $\pi'\varepsilon_4'$ in $\mathfrak{K}$ vor und $\mathfrak{K}$ enthält $P\{\pi'\varepsilon_4'\}$. Es gibt also nur einen umfassendsten π'-Körper in $\mathfrak{K}$.

Bemerkung 13. Der einzige umfassendste π'-Körper in $\mathfrak{K}$ enthält auch den einzigen umfassendsten Kreiskörper.

Beweis: Es sei der einzige umfassendste π'-Körper $P\{\pi'\varepsilon'\}$ von der Ordnung

$$w' = u' \,.\, 2^\alpha, \quad u' \text{ ungerade.}$$

Dann ist nach Bemerkung 8 der einzige umfassendste Kreiskörper $P(\varepsilon)$ von der Ordnung

$$w = u \,.\, 2^{\alpha - 1}$$

worin u ungerade. Es sei w_3 der GGT, w_4 das KGV der beiden Ordnungen w' und w. Es sei ε'_4 eine Einheitswurzel der Ordnung w_4

$$\begin{aligned} w' &= v' \, . \, w_3 \\ w &= v \, . \, w_3 \\ w_4 &= vv' \, . \, w_3 \\ (v, v') &= 1 \end{aligned}$$

Es ist w_3 genau durch $2^{\alpha-1}$ teilbar, also ist v' gerade und v ungerade.

Bestimmt man nach (59)

$$v'x' + vx = 1$$

so ist $v'x'$ gerade, also vx ungerade, also x ungerade. Es ist $\varepsilon_4'^{v'}$ eine primitive Einheitswurzel von der Ordnung w, also

$$\varepsilon_4'^{v'} = \varepsilon^{y_1}$$

mit ungeradem y_1, also ist $\varepsilon_4'^{v}$ von der Ordnung w'

$$\varepsilon_4'^{v} = \varepsilon'^{y_2}$$

mit ungeradem y_2.

Es ist

$$y_2 x = 2t + 1$$

ungerade, weil y_2 und x ungerade sind.

Es ist

$$\pi'^{y_2 x} \varepsilon'_4 = \pi'^{y_2 x} \varepsilon_4'^{vx+v'x'} = (\pi'\varepsilon')^{y_2 x} \varepsilon^{y_1 x'}$$

also

$$\pi'\varepsilon'_4 = \hat{\pi}^{-t} (\pi'\varepsilon')^{y_2 x} \varepsilon^{y_1 x'}$$

mithin enthält $\mathfrak{K}$ die Einheit $\pi'\varepsilon'_4$, also den π'-Körper $P\{\pi'\varepsilon'_4\}$ von der Ordnung w_4. Dieser enthält den Kreiskörper $P(\varepsilon_4'^2)$ von der Ordnung $\frac{1}{2}w_4$.

Wenn nun w' die Ordnung des umfassendsten π'-Körpers, w die Ordnung des umfassendsten Kreiskörpers in $\mathfrak{K}$ ist, so ist $w_4 = w'$ und

$$w = \tfrac{1}{2} w'$$

was zu beweisen war.

Unter den π'-Körpern und Kreiskörpern gibt es in $\mathfrak{K}$ nur einen einzigen gemeinsamen Umfassendsten, der immer ein π'-Körper ist, wenn in $\mathfrak{K}$ überhaupt π'-Körper vorkommen.

§ 4.

Ueber die in $\hat{\mathfrak{K}}$ enthaltenen reellen Kreiskörpern und reellen π'-Körpern können analoge Bemerkungen gemacht werden, deren Beweis ähnlich verläuft. Es wird hauptsächlich Bemerkung 2 benutzt, wobei besonders zu beachten ist, daß zur Darstellung von $x^a + x^{-a}$ bei geradem a nur gerade Potenzen von $y = x + x^{-1}$, bei ungeradem a nur ungerade Potenzen von y benutzt werden. Im reellen-π'-Körper kann man, da $\pi'^2 = \hat{\pi}$ nach Definition darin vorkommt, stets gerade Potenzen von π' wegheben.

Wir betrachten in diesem Zusammenhang zwei reelle Kreiskörper bezw. zwei reelle π'-Körper nur dann als identisch, wenn sie als Zahlkörper im gewöhnlichen Sinn identisch sind und wenn außerdem die Erzeugenden $\eta'\pi'$ übereinstimmen. Es kann also derselbe Zahlkörper im gewöhnlichen Sinn mehrfach aufgeführt werden um auf die Möglichkeit der Erweiterung zu verschiedenen Körpern $\mathfrak{K}$ hinzuweisen. Während in $\mathfrak{K}$ die Kreiskörper und π'-Körper immer zu einem einzigen verschmolzen sind, ist das für die reellen Kreiskörper und reellen π'-Körper in $\hat{\mathfrak{K}}$ nicht der Fall. Es kann dort mehrere umfassendste reelle-Kreiskörper bezw. reelle-π'-Körper geben, die die Erweiterung von $\hat{\mathfrak{K}}$ zu verschiedenen $\mathfrak{K}$ möglich machen. Es muß im folgenden besonders untersucht werden, wann zwei reelle-Kreiskörper verschmolzen sind und wann nicht, ebenso die gleiche Frage für reelle-π'-Körper.

Bemerkung 14. Sind w_1 und w_2 gerade Zahlen und w_2 ein Teiler von w_1, so enthält der reelle-Kreiskörper $P_{w_1}(\eta_1)$ den reellen-Kreiskörper $P_{w_2}(\eta_2)$. $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ bedeutet bei Körpern: $\mathfrak{B}$ ist Unterkörper von $\mathfrak{A}$.

Beweis: Es gilt für die Kreiskörper

$$P_{w_2}(\varepsilon_2) \subset P_{w_1}(\varepsilon_1).$$

$\hat{\mathfrak{K}}$ enthält nach der Bemerkung auf S. [13] alle reellen Zahlen in $\mathfrak{K}$. Nach Bemerkung 3 ist der Durchschnitt

$$P_{w_j}(\eta_2) = (\hat{\mathfrak{K}}, P_{w_j}(\varepsilon_2)) \qquad (j = 1, 2)$$

also

$$P_{w_2}(\eta_2) \subset P_{w_1}(\eta_1)$$

was zu beweisen war.

Bemerkung 15 (analog Bemerkung 6). Der reelle-π'-Körper $P_w\{\pi'\eta'\}$ enthält den reellen-Kreiskörper $P_{\frac{w'}{2}}(\eta)$ und natürlich dessen Unterkörper nach Bemerkung 14.

Beweis: Wenn $\eta' = \varepsilon' + \varepsilon'^{-1}$, so ist $\eta = \varepsilon'^2 + \varepsilon'^{-2}$. Es ist

$$\frac{(\pi'\eta')^2}{\hat{\pi}} - 2 = \eta'^2 - 2 = \eta$$

also η, mithin auch $P_{\frac{w'}{2}}(\eta)$ in $P_{w'}\{\pi'\eta'\}$ enthalten, q.e.d.

Bemerkung 16. Hat $P\{\pi'\eta_1'\}$ die Ordnung w_1' und $P\{\pi'\eta_2'\}$ die Ordnung w_2', ist ferner $w_1' = uw_2'$ wo u eine ungerade Zahl, so ist $P\{\pi'\eta_2'\}$ ein Unterkörper von $P\{\pi'\eta_1'\}$.

$$\eta_2' = \varepsilon_2' + \varepsilon_2'^{-1} = \varepsilon_1'^{uv} + \varepsilon_1'^{-uv} = f(\eta_1')$$

nach Bemerkung 2. In $f(\eta_1')$ kommen nur ungerade Potenzen von η_1' vor.

$$\eta_2' = f(\eta_1') = \sum_{\tau=0}^{t} c_\tau \eta_1'^{2\tau+1}.$$

Dann ist

$$\pi' \,.\, \eta_2' = \sum_{\tau=0}^{t} c_\tau \frac{(\pi'\eta_1')^{2\tau+1}}{\hat{\pi}^\tau}$$

also kommt $\pi'\eta_2'$, mithin auch $P\{\pi'\eta_2'\}$ in $P\{\pi'\eta_1'\}$ vor, q.e.d.

Bemerkung 17 (analog Bemerkung 8). Enthält $\mathfrak{K}$ den reellen-π'-Körper $P\{\pi'\eta'\}$ von der Ordnung $w' = u \,.\, 2^\alpha$, worin u ungerade ist, und $\alpha \geqq 3$, so daß also w' durch 8 teilbar ist, enthält ferner $\hat{\mathfrak{K}}$ den reellen-Kreiskörper $P(\eta)$ von der Ordnung w, so darf w höchstens durch $2^{\alpha-1}$ teilbar sein.

Beweis: Ist das nicht der Fall, so käme nach Bemerkung 16 in $P\{\pi'\eta'\}$ die Zahl $\pi'\eta_2'$ vor, worin η_2' die Ordnung 2^α hat. Wäre die Ordnung von $P(\eta)$ auch durch 2^α teilbar, so käme η_2' nach Bemerkung 14 in $P(\eta)$ vor, also enthielte $\mathfrak{K}$ die Zahl

$$\frac{\pi'\eta_2'}{\eta_2'} = \pi'$$

was unzulässig ist. Also darf w höchstens durch $2^{\alpha-1}$ teilbar sein. Der Schluß versagt, wenn $\eta_2' = 0$, was für $\alpha = 2$ der Fall ist. Dann ist nämlich

$$\varepsilon_1' = i; \quad \eta_2' = i + i^{-1} = 0.$$

Bemerkung 18 (analog Bemerkung 10). Die Ordnungen zweier verschiedener mit einem π' gebildeten reeller-π'-Körper in $\hat{\mathfrak{K}}$ sind, wenn beide durch 8 teilbar sind, beide genau durch dieselbe Potenz von 2 teilbar.

Beweis: Angenommen, das wäre nicht richtig. Die beiden reellen-

π'-Körper seien $P\{\pi'\eta'\}$ und $P\{\pi'\eta''\}$. Es seien die beiden Ordnungen $w' = u \,.\, 2^\alpha$; $w'' = v \,.\, 2^\beta$. Hierin seien u und v ungerade, $\beta > \alpha \geqq 3$. Der reelle-π'-Körper $P\{\pi'\eta''\}$ enthält nach Bemerkung 15 den reellen-Kreiskörper $P(\eta)$ von der Ordnung

$$\frac{w''}{2} = v \,.\, 2^{\beta-1}$$

worin

$$\eta = \eta''^2 - 2.$$

Da

$$\beta - 1 \geqq \alpha \geqq 3$$

erhält man einen Widerspruch zu Bemerkung 17. Es kann also nicht $\beta > \alpha \geqq 3$ sein, sofern $\alpha \geqq 3$ ist. Also ist $\beta = \alpha$, q.e.d.

Bemerkung 19 (analog Bemerkung 11). Die Ordnung w' eines reellen-π'-Körpers ist durch 4 teilbar.

Beweis: Angenommen, es sei $w' = 2u$ mit ungeradem u, die Ordnung von $P\{\pi'\eta'\}$. Wenn

$$\eta' = \varepsilon' + \varepsilon'^{-1}$$

die ungerade Ordnung u hat, so benutze man

$$-\eta' = -\varepsilon' - \varepsilon'^{-1}$$

von der Ordnung $2u$. Dann hat

$$\frac{(\pi'\eta')^2}{\hat{\pi}} - 2 = \varepsilon'^2 + \varepsilon'^{-2} = \eta$$

die Ordnung u, also $-\eta$ wieder die Ordnung $2u$, also ist η' durch $-\eta$ rational ausdrückbar, mithin

$$\frac{\pi'\eta'}{\eta'} = \pi'$$

in $P\{\pi'\eta'\}$, also in $\hat{\mathfrak{K}}$ vorhanden, was unzulässig ist. Die Ordnung w' eines reellen-π'-Körpers ist also durch 4 teilbar.

Es sei ein total-reeller Körper $\hat{\mathfrak{K}}$ gegeben. Es sollen alle reellen-Kreiskörper und reellen-π'-Körper bestimmt werden, die in $\hat{\mathfrak{K}}$ enthalten sind.

Definition. Ist aus $\hat{\mathfrak{K}}$ durch Adjunktion einer total imaginären Zahl z der Oberkörper $\hat{\mathfrak{K}}(z) = \mathfrak{K}$ vom Relativgrad 2 gebildet worden, so werde ich sagen, der reelle-Kreiskörper $P(\eta)$ bezw. der reelle-π'-Körper $P\{\pi'\eta'\}$ wird durch die Adjunktion von z in $\hat{\mathfrak{K}}(z) = \mathfrak{K}$ aufgelöst, wenn $\mathfrak{K}$ den zugehörigen Kreiskörper $P(\varepsilon)$ bezw. den zugehörigen π'-Körper $P\{\pi'\varepsilon'\}$ enthält.

Von besonderer Bedeutung ist die folgende Bemerkung:

Bemerkung 20. Ist der Körper $\mathfrak{K}$ total imaginär vom Relativgrad 2 über dem total reellen Körper $\hat{\mathfrak{K}}$, so wird durch Adjunktion irgend einer Zahl z aus $\mathfrak{K}$, die nicht reell ist, zu $\hat{\mathfrak{K}}$, bereits $\mathfrak{K}$ erzeugt, d.h. es ist $\mathfrak{K} = \hat{\mathfrak{K}}(z)$.

Beweis: Wegen des Relativgrades 2 kann es keinen Zwischenkörper geben. Ein umfassenderer Körper als $\hat{\mathfrak{K}}$ ist also $\mathfrak{K}$. Nach Bemerkung 1 ist jedes z in $\mathfrak{K}$, das nicht zu $\hat{\mathfrak{K}}$ gehört, total imaginär.

Bemerkung 21 (Spezialfall von Bemerkung 20). Es sei

$$\hat{\mathfrak{K}} = P(\eta)$$

und

$$\mathfrak{K} = P(\varepsilon), \text{ von der Ordnung } w,$$

dann ist auch $\mathfrak{K} = \hat{\mathfrak{K}}(\varepsilon^a)$, wo a eine positive ganze rationale Zahl ist, unter der einzigen Voraussetzung, daß ε^a nicht reell, also nicht ± 1 ist. Die Einheitswurzel ε^a braucht also keine primitive w-te Einheitswurzel zu sein.

Bemerkung 22. Es seien ε_1 und ε_2 Einheitswurzeln mit den Ordnungen w_1 und w_2; es seien w_1 und w_2 gerade, es sei w_3 der GGT und w_4 das KGV von w_1 und w_2. Es seien ε_3 und ε_4 Einheitswurzeln der Ordnungen w_3 und w_4. Ferner sei $\frac{w_3}{2} > 1$, d.h. $w_3 \geqq 4$. Dann ist

$$P(\eta_1) \cdot P(\eta_2) = P(\eta_4)$$

Beweis: Es sei gesetzt

$$\hat{\mathfrak{K}} = P(\eta_1)P(\eta_2) \tag{61}$$

Es ist

$$P(\eta_4) \supset P(\eta_1) \text{ und } P(\eta_4) \supset P(\eta_2)$$

nach Bemerkung 14, also

$$P(\eta_4) \supset \hat{\mathfrak{K}}. \tag{62}$$

Nach Bemerkung 21 wird $P(\eta_1)$ bereits durch Adjunktion von ε_3 aufgelöst, da ε_3 nicht reell, weil $w_3 \geqq 4$ ist. Das Gleiche gilt für $P(\eta_2)$. Durch die Adjunktion von $\hat{\mathfrak{K}}(\varepsilon_3)$ erhält man sowohl $P(\varepsilon_1)$ als $P(\varepsilon_2)$ als $P(\varepsilon_4)$ nach Bemerkung 7, also

$$P(\varepsilon_4) \subset \hat{\mathfrak{K}}(\varepsilon_3) = \mathfrak{K} \tag{63}$$

mithin nach Bemerkung 3

$$P(\eta_4) \subset \hat{\mathfrak{K}}. \tag{64}$$

Das ergibt in Verbindung mit (62) und (61)

$$P(\eta_4) = \hat{\mathfrak{K}} = P(\eta_1) \,.\, P(\eta_2) \tag{65}$$

q.e.d.

Bemerkung 22a. Ist $\hat{\mathfrak{K}}$ durch (61) definiert, und gelten die Voraussetzungen von Bemerkung 22, so ist

$$P(\varepsilon_4) = \hat{\mathfrak{K}}(\varepsilon_3).$$

Beweis: Es ist nach (65) und (63)

$$\hat{\mathfrak{K}} = P(\eta_4) \subset P(\varepsilon_4) \subset \hat{\mathfrak{K}}(\varepsilon_3) = \mathfrak{K}.$$

Da es zwischen $\hat{\mathfrak{K}}$ und $\mathfrak{K}$ keinen Zwischenkörper gibt und $P(\varepsilon_4)$ vom Relativgrad 2 über $P(\eta_4)$ ist, so ist

$$P(\varepsilon_4) = \mathfrak{K} = \hat{\mathfrak{K}}(\varepsilon_3) \text{ q.e.d.}$$

Bemerkung 23. Bemerkung 22 ist nicht richtig für den Fall $w_3 = 2$. Beweis: In diesem Fall ist

$$w_4 = \frac{w_1 w_2}{w_3} = \frac{w_1 w_2}{2}.$$

Mindestens eine der beiden Zahlen w_1 und w_2 ist nicht durch 4 teilbar, weil andernfalls $w_3 \geqq 4$ wäre. Es sei z.B. $\frac{1}{2}w_1$ ungerade. Dann ist $\frac{1}{2}w_1$ zu $\frac{1}{2}w_2$ und auch zu w_2 teilerfremd. Schreibt man

$$w_4 = \tfrac{1}{2}w_1 \,.\, w_2$$

so hat man w_4 als Produkt zweier teilerfremder Zahlen dargestellt, also ist

$$\varphi(w_4) = \varphi(\tfrac{1}{2}w_1) \,.\, \varphi(w_2) = \varphi(w_1) \,.\, \varphi(w_2) \tag{66}$$

weil $\varphi(2) = 1$ ist. Auf Grund der Bemerkung 7 ist

$$P(\varepsilon_4) = P(\varepsilon_1)P(\varepsilon_2).$$

$P(\varepsilon_1)$ und $P(\varepsilon_2)$ sind Körper, für die der Grad des Produktes gleich dem Produkt der Grade ist. Also müssen $P(\varepsilon_1)$ und $P(\varepsilon_2)$ teilerfremde Körper sein. $P(\eta_1)$ und $P(\eta_2)$ sind Normalkörper, wie unmittelbar ersichtlich aus Bemerkung 2 (man kann das auch so einsehen: $P(\eta_1)$ und $P(\eta_2)$ sind als Unterkörper der Normalkörper $P(\varepsilon_1)$ und $P(\varepsilon_2)$ mit kommutativen Galoisschen Gruppen wieder Normalkörper), und als Unterkörper teilerfremder Körper ebenfalls teilerfremd. Also ist der Grad ihres Produktes gleich dem Produkt ihrer Grade. Es ist also

$$\text{Grad } (P(\eta_1) \,.\, P(\eta_2)) = \tfrac{1}{2}\varphi(w_1) \,.\, \tfrac{1}{2}\varphi(w_2) = \tfrac{1}{4}\varphi(w_4).$$

Die letzte Gleichung folgt aus (66). Andererseits ist

$$\text{Grad } P(\eta_4) = \tfrac{1}{2}\varphi(w_4).$$

Es ist also, wenn $(w_1, w_2) = 2$ ist,

$$P(\eta_4) \neq P(\eta_1) \,.\, P(\eta_2)$$

weil die Grade der beiden Körper nicht übereinstimmen.

Bemerkung 24. Es sei $w_1' = u_1 \,.\, 2^\alpha$, $w_2' = u_2 \,.\, 2^\alpha$. u_1 und u_2 seien ungerade; 2^α stimmt in w_1' und w_2' überein. Es sei $w_3' = u_3 \,.\, 2^\alpha$ der GGT und $w_4' = u_4 \,.\, 2^\alpha$ das KGV von w_1' und w_2'. Dann sind u_3 und u_4 ebenfalls ungerade Zahlen. Enthält der total reelle Körper $\mathfrak{K}$ für dasselbe π' die reellen-π'-Körper

$$P\{\pi'\eta_1'\} \text{ und } P\{\pi'\eta_2'\}$$

mit den Ordnungen w_1' und w_2', so enthält er auch $P\{\pi'\eta_4'\}$ mit der Ordnung w_4'.

Beweis: Es ist $w_1' = v_1 w_3'$ mit ungeradem v_1. Man setzt $v_1 = 1 + 2x$ $\mathrm{P}\{\pi'\varepsilon_1'\}$ enthält

$$\frac{(\pi'\varepsilon_1')^{v_1}}{\hat{\pi}^x} = \pi'\varepsilon_3'.$$

Nach Bemerkung 19 ist $2^\alpha \geqq 4$, oder $\alpha \geqq 2$. Also ist $w_3' \geqq 4$; mithin ε_3' nicht reell. Es wird also $P\{\pi'\eta_1'\}$ nach Bemerkung 20 bereits durch Adjunktion von $\pi'\varepsilon_3'$ aufgelöst. Das heißt

$$\hat{\mathfrak{K}}(\pi'\varepsilon_3') \supset P\{\pi'\varepsilon_1'\}$$

Ebenso zeigt man

$$\hat{\mathfrak{K}}(\pi'\varepsilon_3') \supset P\{\pi'\varepsilon_2'\}$$

also nach Bemerkung 12

$$\hat{\mathfrak{K}}(\pi'\varepsilon_3') \supset P\{\pi'\varepsilon_4'\}$$

mithin nach Bemerkung 5 und 1

$$\hat{\mathfrak{K}} \supset P\{\pi'\eta_4'\},$$

q.e.d.

Bemerkung 25. In einem totalreellen Körper $\mathfrak{K}$ gehören zu einem festen π' höchstens zwei umfassendste reelle-π'-Körper mit den Ordnungen w_1' und w_2'. Wenn zwei vorhanden sind, so ist die eine Ordnung, z.B. w_1', durch 8 teilbar, die andere w_2' durch 4, aber nicht durch 8 teilbar.

Beweis: Nach Bemerkung 18 sind die Ordnungen aller reellen-π'-Körper, die zum gleichen π' gehören und durch 8 teilbar sind, genau durch die gleiche Potenz von 2 teilbar. Nach Bemerkung 24 sind diese reellen-π'-Körper alle in einem umfassendsten reellen-π'-Körper in $\hat{\mathfrak{K}}$ enthalten. Ebenso sind alle reellen-π'-Körper, die zum gleichen π' gehören und deren Ordnungen genau durch 4 teilbar sind, nach Bemerkung 24 in einem umfassendsten reellen-π'-Körper in $\hat{\mathfrak{K}}$ enthalten; es kann also höchstens zwei umfassendste reelle π-'Körper zu demselben π' geben, wobei die eine Ordnung durch 8 teilbar, die andere durch 4, aber nicht durch 8 teilbar ist.

Bemerkung 26. Es sei ε eine Basis aller in $\mathfrak{K}$ vorkommenden Einheitswurzeln. Die Ordnung von ε ist stets gerade. Es sei $\varepsilon'^2 = \varepsilon$. Die Ordnung von ε' ist also durch 4 teilbar. Man kann jetzt anstatt (47) schreiben

$$\vartheta = \pi'\varepsilon'^v$$

worin v ungerade, $\pi'^2 = \hat{\pi}$ eine total positive Einheit in $\hat{\mathfrak{K}}$ ist. ϑ war die allgemeinste Einheit, die nicht in $\mathfrak{S}\mathfrak{W}$ vorkam. Hat man zwei derartige Einheiten in $\mathfrak{K}$

$$\vartheta_1 = \pi_1'\varepsilon_1' = \pi_1'\varepsilon'^{v_1}; \qquad \vartheta_2 = \pi_2'\varepsilon_2' = \pi_2'\varepsilon'^{v_2}$$

wobei v_1 und v_2 ungerade sind, so ist

$$\pi_1'\pi_2'^{-1} = \hat{\vartheta} \tag{67}$$

worin $\hat{\vartheta}$ eine total reelle Einheit in $\hat{\mathfrak{K}}$.

Beweis: Es ist nach (49)

$$\vartheta_1\vartheta_2^{-1} = \pi_1'\pi_2'^{-1}\varepsilon'^{v_1-v_2} = \hat{\vartheta}\varepsilon^x. \tag{68}$$

Hierin war $\hat{\vartheta}$ eine Einheit in $\hat{\mathfrak{K}}$. Aus (68) folgt

$$\pi_1'\pi_2'^{-1} = \hat{\vartheta}\varepsilon^{x+y}.$$

Hierin ist y für die ganze Zahl $\frac{1}{2}(v_2 - v_1)$ gesetzt. Da π_1', π_2' und $\hat{\vartheta}$ total reell sind, so ist ε^{x+y} eine total reelle Einheitswurzel, also

$$\varepsilon^{x+y} = \pm 1.$$

Nimmt man nötigenfalls das Vorzeichen -1 in $\hat{\vartheta}$ hinein, so erhält man (67), q.e.d.

Zwei π'-Zahlen $\pi'_{(1)}$ und $\pi'_{(2)}$ gehören dann und nur dann zu verschiedenen Körpern $\mathfrak{K}$, wenn keine Gleichung (67) zwischen ihnen besteht,

Definition: Zwei π'-Zahlen über $\hat{\mathfrak{K}}$ können als wesentlich verschieden angesehen werden, wenn zwischen ihnen *keine* Relation von der Form (67) besteht.

Bemerkung 27. Sind $\pi'_{(1)}$ und $\pi'_{(2)}$ wesentlich verschieden und ist

$$\pi'^2_{(1)} = \hat{\pi}_{(1)}, \quad \pi'^2_{(2)} = \hat{\pi}_{(2)}$$

so darf keine Relation

$$\hat{\pi}_{(1)} \hat{\pi}^{-1}_{(2)} = \hat{\vartheta}^2 \tag{69}$$

bestehen. Beweis: Bestünde (69), so wäre

$$(\pi'_{(1)}\varepsilon')(\pi'_{(2)}\varepsilon')^{-1} = \pm\, \hat{\vartheta}$$

oder

$$\pi'_{(1)}\varepsilon' = \pm\, \hat{\vartheta}\pi'_{(2)}\varepsilon'$$

also

$$\hat{\mathfrak{K}}(\pi'_{(1)}\varepsilon') = \hat{\mathfrak{K}}(\pi'_{(2)}\varepsilon')$$

was der Voraussetzung, daß $\pi'_{(1)}$ und $\pi'_{(2)}$ wesentlich verschieden sein sollen, widerspricht.

Bemerkung 28. Gibt es in $\hat{\mathfrak{K}}$ zwei verschiedene Körper, die in der Vereinigten Menge der reellen π'-Körper und der reellen Kreiskörper umfassendste sind, so darf es keine total imaginären Zahlen z geben, so daß $\mathfrak{K} = \hat{\mathfrak{K}}(z)$ vom Relativgrad 2 über $\hat{\mathfrak{K}}$ ist und in $\mathfrak{K}$ beide umfassendste Körper gleichzeitig aufgelöst werden.

Beweis: Betrachtet man in $\hat{\mathfrak{K}}$ zwei reelle-π'-Körper, die durch wesentlich verschiedene π'-Körper erzeugt werden, für die also keine Relation (67) besteht, so können sie nicht gleichzeitig aufgelöst werden, weil zwischen je zwei Einheiten in $\mathfrak{K}$ eine Relation (68) bezw. (67) besteht.

Handelt es sich nur um ein und dasselbe π', so können die beiden umfassendsten Körper in $\hat{\mathfrak{K}}$ sein:

a) zwei reelle-π'-Körper

b) ein reeller-π'-Körper und ein reeller-Kreiskörper

c) zwei reelle-Kreiskörper

Dementsprechend enthalte $\mathfrak{K}$ im Falle a) zwei π'-Körper, im Falle b) einen π'-Körper und einen Kreiskörper, im Falle c) zwei Kreiskörper. Zu diesen gibt es einen beide umfassenden π'-Körper, im Falle a) nach Bemerkung 12, im Falle b) nach Bemerkung 13. Im Falle c) gibt es in $\mathfrak{K}$ einen beide umfassenden Kreiskörper nach Bemerkung 7. Diese Körper haben in den Fällen a) und b) mit $\hat{\mathfrak{K}}$ einen reellen-π'-Körper, im Falle c) einen reellen-Kreiskörper gemeinsam, der beide gegebenen Körper umfaßt. Das widerspricht der Voraussetzung, daß die gegebenen Körper umfassendste Körper sein sollen.

Bemerkung 29. In einem total-reellen Körper $\hat{\mathfrak{K}}$ seien die Ordnungen sämtlicher mit gleichen oder wesentlich verschiedenen π' gebildeten umfassendsten reellen-π'-Körper

$$w'_{(1)}, w'_{(2)}, \ldots, w'_{(m)},$$

die Ordnungen sämtlicher umfassendsten reellen-Kreiskörper

$$w_1, w_2, \ldots, w_l.$$

Dann sind die Zahlen

$$\tfrac{1}{4}w'_{(1)}, \tfrac{1}{4}w'_{(2)}, \ldots, \tfrac{1}{4}w'_{(m)}, \tfrac{1}{2}w_1, \tfrac{1}{2}w_2, \ldots, \tfrac{1}{2}w_l \tag{70}$$

paarweise untereinander teilerfremd.

Beweis: Nach Bemerkung (15) enthält ein reeller-π'-Körper der Ordnung $w'_{(\mu)}$ den reellen-Kreiskörper der Ordnung $\frac{1}{2}w'_{(\mu)}$. Hätten zwei der Zahlen (70) einen gemeinsamen Teiler $\frac{1}{2}w_\alpha > 1$, so hätten die beiden Körper den reellen Kreiskörper $P(\eta_\alpha)$ gemeinsam, worin η_α die Ordnung w_α hat. Durch Adjunktion der Einheitswurzel ε_α, deren Ordnung $w_\alpha \geqq 4$ ist, die also nicht reell ist, werden die beiden umfassendsten Körper gleichzeitig aufgelöst, was nach Bemerkung 28 nicht zulässig ist. Die Zahlen (70) müssen also paarweise untereinander teilerfremd sein.

Bemerkung 30. Die einzigen Einheitswurzeln ε, deren Adjunktion zu allen total reellen Körpern $\hat{\mathfrak{K}}$ ohne besondere Voraussetzung zulässig ist, so daß $\mathfrak{K} = \hat{\mathfrak{K}}(\varepsilon)$ einen schwachen Einheitsdefekt über $\hat{\mathfrak{K}}$ hat, sind die 4-ten und 6-ten Einheitswurzeln.

Beweis: Damit ε der in Bezug auf $\hat{\mathfrak{K}}$ quadratischen Gleichung (52) genügt, ist notwendig und hinreichend daß η in $\hat{\mathfrak{K}}$ enthalten ist. Diese Bedingung ist dann und nur dann für alle $\hat{\mathfrak{K}}$ von selbst erfüllt, wenn η rational ist. $\eta = \varepsilon + \varepsilon^{-1}$ ist als Summe zweier ganzer algebraischer Zahlen eine ganze algebraische Zahl, also eine ganze rationale Zahl. Es ist

$$|\eta| \leqq |\varepsilon| + |\varepsilon^{-1}| = 2.$$

Es kommen für η also nur die 5 Werte $-2, -1, 0, 1, 2$ in Betracht. Die Ordnungen der zugehörigen Einheitswurzeln ε sind

$$\lambda = 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 1. \tag{71}$$

Da die Ordnung gerade gemacht werden kann, so kommt nur die Adjunktion der 4-ten und 6-ten Einheitswurzeln in Betracht, die immer möglich ist.

Unter den in $\hat{\mathfrak{K}}$ vorkommenden reellen-Kreiskörper sind also formal immer

$$P(\eta_4) = P(0) = P$$

und

$$P(\eta_6) = P(1) = P$$

aufzuführen, die in Wirklichkeit beide gleich dem Körper der rationalen Zahlen sind, um auf die Möglichkeit der Adjunktion von $\varepsilon_4 = i$ und $\varepsilon_6 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$ hinzuweisen.

Bemerkung 31. Die Gleichung (54) läßt sich, wofern die total positive Einheit $\mathfrak{k}$ in $\hat{\mathfrak{K}}$ vorhanden und kein Quadrat ist, unter allen Umständen bilden, wenn $\pi'\eta' = 0$. Dann lautet sie

$$x^2 + \mathfrak{k} = 0$$

also

$$x = \pi' i.$$

Die Ordnung eines reellen-π'-Körpers ist nach Bemerkung 19 durch 4 teilbar. Unter den Ordnungen in (71) ist $\lambda = 4$ die einzige durch 4 teilbare. Uebrigens darf in (54) nicht $\eta' \neq 0$ rational sein, weil dann π' in $\hat{\mathfrak{K}}$ vorkäme, was nicht zulässig ist. Die Adjunktion von $\pi'_{(k)} i$ ist also für jedes der wesentlich verschiedenen $\pi'_{(k)}$ in jedem Fall zulässig. Der reelle-π'-Körper der Ordnung 4

$$P\{\pi'\eta_4\} = P$$

wird nur formal aufgeführt, da $\eta_4 = 0$ ist.

Bemerkung 32. Unter den umfassendsten reellen-π'-Körpern sind alle wesentlich verschiedenen $\pi'_{(k)}$ mit Ordnungen vertreten, die durch 4, aber nicht durch 8 teilbar sind.

Beweis: Es sei $\mathfrak{K} = \hat{\mathfrak{K}}(\pi' i)$, ferner sei w' die Ordnung des umfassendsten π'-Körpers in $\mathfrak{K}$. Es enthalte $\mathfrak{K}$ die Einheit $\pi'\varepsilon'$, worin ε' die Ordnung w' hat. Wäre w' durch 8 teilbar:

$$w' = 8v'$$

so wäre

$$\frac{(\pi'\varepsilon')^{2v'}}{\mathfrak{k}^{v'}} = \varepsilon'^{2v'} = \pm i$$

eine primitive 4-te Einheitswurzel in $\mathfrak{K}$ enthalten. Es käme also

$$\frac{\pi' i}{i} = \pi'$$

in $\mathfrak{K}$, und, da es total reell ist, in $\hat{\mathfrak{K}}$ vor, was nicht zulässig ist. Die Annahme, daß w' durch 8 teilbar ist, führt also zu einem Widerspruch.

Bemerkung 33. Unter den Zahlen (70) kommt genau eine gerade

Zahl vor. Der betreffende reelle Körper wird durch Adjunktion von i aufgelöst. Der Körper $P(\eta_4)$ muß entweder:

a) in einem umfassendsten reellen-Kreiskörper, oder

b) in einem umfassendsten reellen-π'-Körper vorkommen.

Im Falle a) ist eine und nur eine der Ordnungen w_λ durch 4 teilbar. Im Falle b) sind sämtliche w_λ durch 2, aber nicht durch 4 teilbar, und es gibt für ein $\pi'_{(k)}$ einen reellen-π'-Körper, dessen Ordnung durch 8 teilbar ist. Für dieses $\pi'_{(k)}$ gibt es einen zweiten umfassendsten reellen-π'-Körper, dessen Ordnung genau durch 4 teilbar ist. Diese beiden Körper entsprechen der Möglichkeit der Adjunktion von i und von $\pi' i$. Dieser Fall, daß zu einem $\pi'_{(k)}$ zwei umfassendste reelle-π'-Körper gehören, kann höchstens für ein einziges $\pi'_{(k)}$ eintreten.

Bemerkung 34. Diese Adjunktionen von i und $\pi' i$ zu $\hat{\mathfrak{K}}$ führen immer zu verschiedenen Körpern $\mathfrak{K}$.

Beweis: Wären i und $\pi' i$ gleichzeitig in $\mathfrak{K}$ vorhanden, so wäre auch π' in $\mathfrak{K}$, also, da π' total reell, auch in $\hat{\mathfrak{K}}$ vorhanden, was der Voraussetzung widerspricht, daß $\hat{\pi}$ in $\hat{\mathfrak{K}}$ kein Quadrat ist.

Bemerkung 35. Da die Adjunktion der 6-ten Einheitswurzeln immer möglich ist, ist genau eine der Zahlen (70) durch 3 teilbar.

Bemerkung 36. Es können nunmehr die Anzahlen der Klassen wesentlich verschiedener π' bestimmt werden. Es ist

$$\pi'^2 = \hat{\pi}$$

eine total positive Einheit in $\hat{\mathfrak{K}}$. Zwei π' werden als nicht wesentlich verschieden angesehen, wenn ihr Quotient eine total reelle Einheit $\hat{\vartheta}$ in $\mathfrak{K}$, also in $\hat{\mathfrak{K}}$ ist:

$$\pi'_1 \pi'^{-1}_2 = \hat{\vartheta}$$

oder nach (69) wenn

$$\hat{\pi}_1 \hat{\pi}_2^{-1} = \hat{\vartheta}^2$$

ist. Zu dem Zwecke sollen neben dem gewöhnlichen Aequivalenzbegriff (zwei Zahlen eines Körpers heißen äquivalent, wenn ihr Quotient eine Einheit des Körpers ist) zwei schärfere Aequivalenzbegriffe betrachtet werden. Zwei ganze Zahlen $\hat{\alpha}_1$, und $\hat{\alpha}_2$ aus $\hat{\mathfrak{K}}$ heißen *positiv äquivalent,* wenn

$$\hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_2 \, . \, \hat{\pi}$$

d.h. wenn ihr Quotient eine total positive Einheit ist. Sie heißen *Quadrat-äquivalent,* wenn

$$\hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_2 \hat{\vartheta}^2$$

d.h. wenn ihr Quotient das Quadrat einer Einheit aus $\hat{\mathfrak{K}}$ ist.

Es sei

$$\vartheta^{(1)},\ \vartheta^{(2)},\ \ldots,\ \vartheta^{(\hat{n}-1)}$$

ein Fundamentalsystem der Einheiten von $\hat{\mathfrak{K}}$. An Einheitswurzeln kommen, da $\hat{\mathfrak{K}}$ total reell ist, nur ± 1 vor. In der Form

$$\hat{\vartheta} = \vartheta^{(1)^{a_1}}\vartheta^{(2)^{a_2}} \ldots \vartheta^{(\hat{n}-1)^{a_{\hat{n}-1}}}(-1)^{a_{\hat{n}}}$$

lassen sich sämtliche Einheiten von $\hat{\mathfrak{K}}$ darstellen. Zwei Einheiten, die durch die Exponenten a_ν bezw. b_ν dargestellt sind, sind dann und nur dann Quadrat-äquivalent, wenn

$$a_\nu \equiv b_\nu \pmod 2,\ 1 \leqq \nu \leqq \hat{n}.$$

Die a_ν haben mod 2 nur die 2 Werte 0 und 1. Ebenso sind bei -1 nur die beiden Exponenten 0 und 1 zu berücksichtigen. Es gibt also genau $2^{\hat{n}}$ Klassen Quadrat-äquivalenter Einheiten, die eine Gruppe $\mathfrak{N}$ bilden.

Jeder Einheit $\hat{\vartheta}_1$ ordnet man einen Charakter zu, bestehend aus den Vorzeichen ihrer sämtlicher Konjugierter in fester Reihenfolge:

$$\chi(\hat{\vartheta}_1) = (\operatorname{sgn} \hat{\vartheta}_1, \operatorname{sgn} \hat{\vartheta}_2, \ldots, \operatorname{sgn} \hat{\vartheta}_{\hat{n}}).$$

Multipliziert man zwei Einheiten, so multiplizieren sich ihre Charaktere. Die sämtlichen vorkommenden Charaktere bilden eine Gruppe $\mathfrak{C}$. Das Quadrat eines Charakters ist der Hauptcharakter, der überall $+1$ enthält. Es kommt also jeder Klasse Quadrat-äquivalenter Einheiten ein wohlbestimmter Charakter zu. Die Anzahl der möglichen Charaktere ist gleich der Anzahl der Verteilungen von $+1$ und -1, auf $\hat{n}$ Stellen, also ebenfalls $2^{\hat{n}}$. Diese möglichen Charaktere bilden eine Gruppe $\mathfrak{M}$ der Ordnung $2^{\hat{n}}$. Die Gruppe $\mathfrak{C}$ hat als Untergruppe von $\mathfrak{M}$ die Ordnung 2^c. Wenn $c < \hat{n}$ ist, so kommen weniger als $2^{\hat{n}}$ Charaktere wirklich vor; es gibt also mehrere Klassen Quadrat-äquivalenter Einheiten, die den gleichen Charakter haben. Der Quotient zweier Einheiten, die denselben Charakter haben, ist eine total positive Einheit, die den Hauptcharakter hat. Die Klassen Quadrat-äquivalenter Einheiten, welche total positive Einheiten enthalten, also den Hauptcharakter haben, bilden eine Gruppe $\mathfrak{P}$, die als Untergruppe von $\mathfrak{N}$ die Ordnung 2^p hat. Unterscheiden sich zwei Klassen von $\mathfrak{N}$ nur um einen Faktor, der zu $\mathfrak{P}$ gehört, d.h. um einen total positiven Faktor, so haben sie denselben Charakter, mit anderen Worten jedem Komplex der Faktorgruppe $\mathfrak{N}/\mathfrak{P}$ kommt ein wohlbestimmter Charakter aus der Gruppe der vorkommenden Charaktere $\mathfrak{C}$ zu.

Das heißt, es besteht der eindeutige Isomorphismus

$$\mathfrak{N}/\mathfrak{P} \cong \mathfrak{C}. \tag{72}$$

Also ist

$$2^{\hat{n}-p} = 2^c, \quad \hat{n} - p = c.$$

Wenn alle möglichen Charaktere wirklich vorkommen, d.h. wenn $\mathfrak{M} = \mathfrak{C}$, so ist

$$2^c = 2^{\hat{n}}, \; c = \hat{n}, \; p = 0, \; 2^p = 1,$$

d.h. außer der Einheitsklasse von $\mathfrak{N}$, die alle Quadrate von Einheiten in $\hat{\mathfrak{K}}$ enthält, gibt es keine total positiven Einheiten.

$\hat{\pi}$ sollte eine total positive Einheit, aber kein Quadrat in $\hat{\mathfrak{K}}$ sein. Das ist hier nicht möglich. Wenn also $c = \hat{n}$, so ist Hauptfall B) nicht möglich, in dem es in $\mathfrak{K}$ Einheiten außerhalb $\hat{\mathfrak{G}}\mathfrak{W}$ gab; d.h. die Einheiten in $\mathfrak{K}$ werden durch $\mathfrak{G} = \hat{\mathfrak{G}}\mathfrak{W}$ erschöpft: man kann zu $\hat{\mathfrak{K}}$ im Wesentlichen nur Einheitswurzeln adjungieren.

Im allgemeinen Fall kommen für den Hauptfall B) 2^p—1 Klassen wesentlich verschiedener π' in Betracht.

Zusammenfassung der Ergebnisse.

Unter den umfassendsten reellen-π'-Körpern in $\hat{\mathfrak{K}}$ kommen sicher $2^p - 1$ verschiedene vor, die mit den diesen Klassen entsprechenden wesentlich verschiedenen π' gebildet sind. Die Ordnungen dieser reellen-π'-Körper sind durch 4, aber nicht durch 8 teilbar. Wenn eine Ordnung genau gleich 4 ist, so ist der reelle-π'-Körper gleich P, also nur formal aufzuführen. Entweder kommt hinzu für ein einziges π' ein zweiter reeller-π'-Körper mit durch 8 teilbarer Ordnung; in diesem Fall sind die Ordnungen aller reellen-Kreiskörper in $\hat{\mathfrak{K}}$ gerade, aber nicht durch 4 teilbar. Im anderen Fall gibt es keine reellen-π'-Körper mit durch 8 teilbarer Ordnung. Dann gibt es unter den umfassendsten reellen-Kreiskörpern genau einen mit durch 4 teilbarer Ordnung. Ist seine Ordnung genau gleich 4, so ist er gleich P und nur formal aufzuführen. Sind $w'_{(1)}, w'_{(2)}, \ldots, w'_{(m)}$, worin $m = 2^p$ oder $m = 2^p - 1$, die Ordnungen der umfassendsten reellen-π'-Körper, $w_1, w_2, \ldots, w_l$, die Ordnungen der umfassendsten reellen-Kreiskörper in $\hat{\mathfrak{K}}$, so sind die Zahlen

$$\tfrac{1}{4} w'_{(\mu)} \text{ und } \tfrac{1}{2} w_\lambda$$

sämtlich paarweise untereinander teilerfremd. Eine von ihnen ist stets durch 3 teilbar, wobei nötigenfalls $w_1 = 6$ nur formal aufzuführen ist.

Da die $\frac{\varphi(w)}{2}$ in $\hat{n}$ aufgehen müssen, da ferner die Anzahlen der $\pi'_{(\nu)}$ beschränkt sind, ergibt sich nur eine endliche Anzahl von Möglichkeiten, $\hat{\mathfrak{K}}$ zu einem $\mathfrak{K}$ mit schwachem Einheitsdefekt zu erweitern.

§ 5.

Beispiel: Ist $\hat{\mathfrak{K}} = P$ der Körper der rationalen Zahlen, so ist $\mathfrak{K}$ ein imaginär-quadratischer Körper, der also einen Einheitsdefekt besitzt, und zwar haben $P(i)$ und $P(i\sqrt{3})$ schwachen Einheitsdefekt, weil sie außer ± 1 die vierten bezw. sechsten Einheitswurzeln enthalten. Alle übrigen imaginär quadratischen Zahlkörper haben einen starken Einheitsdefekt: sie besitzen nur die Einheiten ± 1. Da im Körper P noch keine Einheiten vorkommen, die nicht Einheitswurzeln sind, lassen sich auch noch keine Oberkörper durch Quadratwurzelziehung aus solchen Einheiten bilden. Hauptfall B) tritt also hier noch nicht auf.

Es sei jetzt $\hat{\mathfrak{K}}$ ein reell quadratischer Zahlkörper. Wenn $\mathfrak{K}$ über $\hat{\mathfrak{K}}$ von schwachem Einheitsdefekt sein soll, so wird zuerst der Fall betrachtet, daß $\mathfrak{K}$ noch nicht reelle Einheitswurzeln enthält. Die 4-ten und 6-ten Einheitswurzeln sind enthalten in $\mathfrak{K} = \hat{\mathfrak{K}}(i)$ bezw. $\mathfrak{K} = \hat{\mathfrak{K}}(i\sqrt{3})$, die sich immer bilden lassen. Die Ordnung der Einheitswurzel ε in $\mathfrak{K}$ sei w. Die irreduzible Kreisteilungsgleichung und der Körper $P(\varepsilon)$ sind vom Grade $\varphi(w)$. Es ist $P(\varepsilon) \subset \mathfrak{K}$, also ist $\varphi(w)$ ein Teiler von $2\hat{n} = 4$. Es kommen also nur die Werte $\varphi(w) = 2$ und $\varphi(w) = 4$ in Betracht. $\varphi(w) = 2$ liefert die bereits erwähnten Fälle $w = 4$ und $w = 6$. Es ist $\varphi(w) = 4$ für $w = 8, 10, 12$. In diesen Fällen ist $\mathfrak{K} = P(\varepsilon)$, also ist auch $\hat{\mathfrak{K}} = P(\eta)$ bereits völlig bestimmt. Wenn ε eine primitive w-te Einheitswurzel ist, so muß

$$\eta = \varepsilon + \varepsilon^{-1}$$

in $\hat{\mathfrak{K}}$ enthalten sein.

$w = 8$; Kreisteilungsgleichung $x^4 + 1 = 0$, $x^2 + x^{-2} = 0$, $(x + x^{-1})^2 = 2$, $\eta^2 = 2$, $\eta = \sqrt{2}$,

$$\hat{\mathfrak{K}} = P(\sqrt{2}),\ \mathfrak{K} = P(\sqrt{2}, i),$$

$$\pm \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \pm \tfrac{1}{2}i\sqrt{2} = \varepsilon.$$

$w = 10$; Kreisteilungsgleichung $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0$

$$x^2 - x + 1 - x^{-1} + x^{-2} = 0$$

$$x + x^{-1} = y; \qquad \varepsilon + \varepsilon^{-1} = \eta$$

genügt der Gleichung $y^2 - y - 1 = 0$,

$$\eta = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}; \quad \eta^2 = \eta + 1 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$(\varepsilon - \varepsilon^{-1})^2 = \eta^2 - 4 = \tfrac{1}{2}(-5 \pm \sqrt{5})$$

$$\varepsilon = \tfrac{1}{4}(1 + \sigma\sqrt{5} \pm \sqrt{-10 + \sigma 2\sqrt{5}})$$

wo σ eine der beiden Werte ± 1 bedeutet.

Es ist also

$$\hat{\mathfrak{K}} = P(\sqrt{5}), \; \mathfrak{K} = P(\varepsilon) = P(\sqrt{-10 + 2\sqrt{5}}).$$

$w = 12$; Kreisteilungsgleichung

$$x^4 - x^2 + 1 = 0$$

$$y = x + x^{-1}$$

$$\eta = \varepsilon + \varepsilon^{-1}$$

$$x^2 - 1 + x^{-2} = 0$$

$$y^2 = 3; \; (x - x^{-1})^2 = -1$$

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}(\pm \sqrt{3} \pm i)$$

$$\hat{\mathfrak{K}} = P(\sqrt{3}); \; \mathfrak{K} = \hat{\mathfrak{K}}(\varepsilon) = P(\sqrt{3}, i) = P(\sqrt{3}, i\sqrt{3}).$$

Man erhält also w-te Einheitswurzeln mit $\varphi(w) = 4$ nur über den reell quadratischen Körpern $P(\sqrt{2})$, $P(\sqrt{5})$ und $P(\sqrt{3})$. Der Körper der 8. Einheitswurzeln entsteht durch Adjunktion von i zu $P(\sqrt{2})$, der Körper der 12. Einheitswurzeln entsteht durch Adjunktion von i oder $i\sqrt{3}$ zu $P(\sqrt{3})$. Bei den übrigen reellen quadratischen Zahlkörpern bewirkt die Adjunktion von i bezw. $i\sqrt{3}$ nur das Entstehen von 4-ten bezw. 6-ten Einheitswurzeln.

Es ist, wenn $\hat{\mathfrak{K}}$ reell quadratisch ist, die Ordnung der Gruppe $\mathfrak{M}$ aller möglicher Charaktere $2^{\hat{n}} = 4$. Diese Charaktere sind

$$(+, +), \; (-, -), \; (+, -), \; (-, +).$$

Die Charaktere $(+, +)$ und $(-, -)$ kommen immer vor bei $+1$ und -1. Wenn die fundamentele Einheit ϑ die Norm -1 hat, so hat sie den Charakter $(+, -)$; $-\vartheta$ hat dann den Charakter $(-, +)$. Sämtliche 4 möglichen Charaktere von $\mathfrak{M}$ sind wirklich vorkommende Charaktere, gehören also zu $\mathfrak{K}$, also $\mathfrak{M} = \mathfrak{C}$. Es war nach (72)

$$\mathfrak{N}/\mathfrak{P} \cong \mathfrak{C}; \; 2^{\hat{n}-p} = 2^c = 2^{\hat{n}}.$$

Es ist also $2^p = 1$. Es gibt mithin nur eine Klasse untereinander quadratisch äquivalenter total positiver Einheiten, nämlich die Quadrate von Einheiten selbst. Für diese kann man $+ 1$ setzen. Es gibt also in diesem Fall keine andere Möglichkeit, Oberkörper vom Grade 4 mit schwachem Einheitsdefekt zu bilden, als die Adjunktion von Einheitswurzeln. Der Hauptfall B) kann hier nicht eintreten.

Wenn die fundamentale Einheit $\hat{\pi}$ die Norm $+ 1$ hat, so kann man sie so wählen, daß ihr Charakter $(+, +)$ wird; $-\hat{\pi}$ hat dann den Charakter $(-, -)$. Dann ist $2^c = 2$, $2^p = 2^{\hat{n}-c} = 2$. Es gibt 2 klassen untereinander Quadrat-äquivalenter total positiver Einheiten: außer der 1 noch die Klasse der Fundamentaleinheit $\hat{\pi}$. Dann hat $\hat{\mathfrak{K}}(i\pi') = \mathfrak{K}$, worin $\pi' = \sqrt{\hat{\pi}}$ ist, schwachen Einheitsdefekt. Zu allen reell-quadratischen Zahlkörpern mit total positiver Fundamentaleinheit $\hat{\pi}$ läßt sich $i\pi'$ adjungieren, worin $\pi' = \sqrt{\hat{\pi}}$. Das gilt von den drei oben erwähnten Körpern $P(\sqrt{2})$, $P(\sqrt{3})$, $P(\sqrt{5})$ nur für $P(\sqrt{3})$, wo

$$\hat{\pi} = 2 + \sqrt{3};\; 2 - \sqrt{3} > 0$$

ist. Für $P(\sqrt{2})$ ist

$$1 + \sqrt{2} > 0,\; 1 - \sqrt{2} < 0.$$

Für $P(\sqrt{5})$ ist

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 0,\; \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0.$$

Also sind für $P(\sqrt{2})$ und $P(\sqrt{5})$ die fundamentalen Einheiten nicht total positiv; der Hauptfall B) kann für diese beiden Körper nicht eintreten. Schwachen Einheitsdefekt liefern also nur die oben erwähnten Möglichkeiten der Adjunktion von Einheitswurzeln.

Es sollen die Fälle untersucht werden, in denen $\hat{\mathfrak{K}}$ reell quadratisch und $\hat{\pi}$ eine total positive Fundamentaleinheit in $\hat{\mathfrak{K}}$, $\pi' = \sqrt{\hat{\pi}}$ ist und in $\mathfrak{K}$ eine Einheit $\varepsilon'\pi'$ existiert mit einer Ordnung w' von ε', für die $w' \geqq 4$. Das Quadrat $\varepsilon'^2 = \varepsilon$ kommt in $\mathfrak{K}$ vor, also $\eta = \varepsilon + \varepsilon^{-1}$ in $\hat{\mathfrak{K}}$. Also kommen für ε nur die Ordnungen $w = 2, 4, 6, 8, 10, 12$ in Betracht. Also $w' = 4, 8, 12, 16, 20, 24$.

Der Fall $w' = 4$ kann durch Adjunktion von $i\pi'$ immer gebildet werden, wenn die Fundamentaleinheit von $\hat{\mathfrak{K}}$ total positiv ist.

$w' = 16$, $w = 8$ hätte zur Folge, daß $\hat{\mathfrak{K}} = P(\sqrt{2})$
$w' = 20$, $w = 10$ „ „ „ „ $\hat{\mathfrak{K}} = P(\sqrt{5})$
$w' = 24$, $w = 12$ „ „ „ „ $\hat{\mathfrak{K}} = P(\sqrt{3})$.

In $P(\sqrt{2})$ und $P(\sqrt{5})$ hat die Fundamentaleinheit die Norm -1, ist also nicht total positiv. Die Fälle $w' = 16$ und $w' = 20$ scheiden daher aus. Der Fall $w' = 24$ kann, wenn $\hat{\mathfrak{K}} = P(\sqrt{3})$, tatsächlich auftreten.

Es sei

$$\varepsilon_{24}^2 = \varepsilon_{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}.$$

Dann ist

$$\varepsilon_{24}^{-2} = \varepsilon_{12}^{-1} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$$

$$\varepsilon_{24}^2 + \varepsilon_{24}^{-2} + 2 = 2 + \sqrt{3} = \hat{\pi},$$

da $2 + \sqrt{3}$ gleichzeitig die Fundamentaleinheit des Körpers $\hat{\mathfrak{K}}$ ist. Mithin ist

$$\eta_{24} = \varepsilon_{24} + \varepsilon_{24}^{-1} = \sqrt{2 + \sqrt{3}} = \pi'$$

worin

$$\pi'^2 = \hat{\pi}.$$

Also ist

$$\eta_{24}\pi' = 2 + \sqrt{3}$$

in $\hat{\mathfrak{K}}$ enthalten.

$$\vartheta = \varepsilon_{24}\pi'$$

genügt der quadratischen Gleichung

$$x^2 - (2 + \sqrt{3})x + 2 + \sqrt{3} = 0.$$

$$\vartheta = \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \pm \sqrt{\frac{(2 + \sqrt{3})^2 - 4(2 + \sqrt{3})}{4}} = \frac{2 + \sqrt{3} \pm i}{2}.$$

Nach Bemerkung 20 und 21 genügt die Adjunktion von $\varepsilon_{12}^3 = i$, also

$$\mathfrak{K} = \hat{\mathfrak{K}}(i).$$

Dagegen ist, wenn man verlangt, daß $\hat{\mathfrak{K}} = P(\sqrt{3})$ sein soll, die Adjunktion von $\varepsilon_{12}\pi'$ nicht zulässig, denn dann müßte

$$\eta_{12}\pi' = \sqrt{3(2 + \sqrt{3})}$$

in $\hat{\mathfrak{K}} = P(\sqrt{3})$ enthalten sein, also, da $\sqrt{3}$ darin enthalten ist, auch $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$, was nicht der Fall ist, da $2 + \sqrt{3}$ fundamentale Einheit ist.

Bemerkung 37. Es sei $d = 4n + 3$ eine Primzahl. Dann ist

$$t^2 - du^2 = \sigma . 2$$

entweder für $\sigma = +1$ oder für $\sigma = -1$ lösbar.

Beweis: Die Fundamentallösung der Pellschen Gleichung sei

$$(73) \qquad t^2 - du^2 = 1.$$

Dann ist

$$(74) \qquad t = dt' + \sigma$$

wo

$$\sigma = \pm 1.$$

Setzt man diesen Wert in (73) ein, so erhält man

$$t'^2 d^2 + 2\sigma t' d + \sigma^2 - du^2 = 1.$$

Hieraus

$$t'(t'd + 2\sigma) = u^2$$

t' und $t'd + 2\sigma$ können höchstens den Faktor 2 gemeinsam haben. Alle anderen Primfaktoren können nur entweder in t' oder $t'd + 2\sigma$ aufgehen. Da die rechte Seite u^2 ist, treten sie in gerader Vielfachheit auf, d.h. t', und $t'd + 2\sigma$ sind entweder einfache oder doppelte Quadrate.

Fall a) Es sei

$$t' = 2t''^2, \; t'd + 2\sigma = 2u''^2.$$

Dann ist

$$2t''^2 d + 2\sigma = 2u''^2$$

oder

$$\sigma = u''^2 - t''^2 d.$$

Wäre $\sigma = +1$, so wäre das eine Lösung der Pellschen Gleichung in kleineren Zahlen als die gegebene Fundamentallösung, was nicht möglich ist. $\sigma = -1$ wäre eine Lösung der Nicht-Pellschen Gleichung, die nicht möglich ist, da -1 Nichtrest modulo $d = 4n + 3$ ist. Fall a) kann also nicht eintreten.

Fall b) Es sei

$$t' = t''^2; \; t'd + 2\sigma = u''^2$$

also

$$t''u'' = u.$$

Dann ist

$$(75) \qquad 2\sigma = u''^2 - t''^2 d.$$

Nach dem Ergänzungssatz zum quadratischen Reziprozitätsgesetz ist

$$\sigma = +1, \quad d = 8n + 7$$
$$\sigma = -1, \quad d = 8n + 3.$$

Man erhält unter Benützung von (75) und (74)

$$(76) \qquad \begin{aligned}(u'' + t''\sqrt{d})^2 &= u''^2 + t''^2 d + 2u''t''\sqrt{d} \\ &= 2\sigma + 2t''^2 d + 2u''t''\sqrt{d} \\ &= 2(t + u\sqrt{d}).\end{aligned}$$

Setzt man $\hat{\mathfrak{K}} = P(\sqrt{d})$, $\hat{\pi} = t + u\sqrt{d}$, so ist

$$\sqrt{2\hat{\pi}} = \eta_8 \pi'$$

in $\hat{\mathfrak{K}}$ vorhanden; also läßt sich durch Auflösung einer quadratischer Gleichung $\vartheta = \varepsilon_8 \pi'$ bestimmen. ϑ genügt der Gleichung

$$(77) \qquad x^2 - (u'' + t''\sqrt{d})x + t + u\sqrt{d} = 0.$$

Man setzt

$$u'' + t''\sqrt{d} = \hat{\alpha}.$$

Dann lautet (77)

$$x^2 - \hat{\alpha}x + \hat{\pi} = 0$$

$$(78) \qquad x = \frac{\hat{\alpha}}{2} \pm \sqrt{\frac{\hat{\alpha}^2 - 4\hat{\pi}}{4}}.$$

Nach (76) ist

$$\hat{\alpha}^2 = 2\hat{\pi};$$

also erhält man aus (78)

$$x = \frac{\hat{\alpha} \pm \sqrt{\hat{\alpha}^2 - 2\hat{\alpha}^2}}{2} = \hat{\alpha} \cdot \frac{1 \pm i}{2}.$$

Es ist wieder $\mathfrak{K} = \hat{\mathfrak{K}}(i)$.

Erstes Beispiel:
$$\begin{aligned}\hat{\mathfrak{K}} &= P(\sqrt{7}) \\ \hat{\pi} &= 8 + 3\sqrt{7} \\ \hat{\alpha} &= 3 + \sqrt{7} \\ \hat{\alpha}^2 &= 16 + 6\sqrt{7} = 2\hat{\pi}\end{aligned}$$

$$x^2 - (3 + \sqrt{7})x + 8 + 3\sqrt{7} = 0$$

$$\begin{aligned}x &= \frac{3 + \sqrt{7}}{2} \pm \sqrt{\frac{(3 + \sqrt{7})^2 - 4(8 + 3\sqrt{7})}{4}} \\ &= \frac{3 + \sqrt{7}}{2}(1 \pm i) = \varepsilon_8 \pi'.\end{aligned}$$

Zweites Beispiel:

$$\hat{\mathfrak{K}} = P(\sqrt{6});\ \hat{\pi} = 5 + 2\sqrt{6}$$

$$\hat{\alpha}^2 = (2 + \sqrt{6})^2 = 10 + 4\sqrt{6} = 2\hat{\pi}$$

$$x^2 - (2 + \sqrt{6})x + 5 + 2\sqrt{6} = 0$$

$$x = \frac{2 + \sqrt{6} \pm \sqrt{(2 + \sqrt{6})^2 - 4(5 + 2\sqrt{6})}}{2}$$

$$= \frac{2 + \sqrt{6}}{2}(1 \pm i) = \varepsilon_8 \pi'.$$

Drittes Beispiel:

$$\hat{\mathfrak{K}} = P(\sqrt{6});\ \hat{\pi} = 5 + 2\sqrt{6}$$

$$\hat{\alpha}^2 = (3 + \sqrt{6})^2 = 15 + 6\sqrt{6} = 3\hat{\pi}$$

$$x^2 - (3 + \sqrt{6})x + 5 + 2\sqrt{6} = 0$$

$$x = \frac{3 + \sqrt{6} \pm \sqrt{(3 + \sqrt{6})^2 - 4(5 + 2\sqrt{6})}}{2}$$

$$= \frac{3 + \sqrt{6} \pm i\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}}{2} = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}\ \frac{\sqrt{3} \pm i}{2}$$

$$= \varepsilon_{12}\pi'.$$

Aus dem Körper $\hat{\mathfrak{K}} = P(\sqrt{6})$ erhält man durch Adjunktion von i den Körper $\mathfrak{K} = P\{\varepsilon_8\pi'\}$, durch Adjunktion von $i\pi' = i\sqrt{5+2\sqrt{6}}$ den Körper $\mathfrak{K} = P\{\varepsilon_{12}\pi'\}$.

Bemerkung 38. Wenn $\mathfrak{A}$ ein Zahlkörper ist, in dem a, b und $ab \neq 0$ und keine Quadrate sind, dann ist in $\mathfrak{A}(\sqrt{ab})$ die Zahl a kein Quadrat.

Beweis: Angenommen, die Behauptung wäre nicht richtig, dann ist

$$(c + d\sqrt{ab})^2 = a$$

$c \in \mathfrak{A}$, $d \in \mathfrak{A}$. Also

$$c^2 + d^2ab + 2cd\sqrt{ab} = a.$$

Wäre $cd \neq 0$, so würde aus

$$2cd\sqrt{ab} \in \mathfrak{A}$$

folgen $\sqrt{ab} \in \mathfrak{A}$, was der Voraussetzung widerspricht. Es muß also entweder $c = 0$ oder $d = 0$ sein. Wenn $d = 0$, so wäre

$$c^2 = a$$

also wäre a ein Quadrat in $\mathfrak{A}$, entgegen der Voraussetzung. Wäre $c = 0$, so wäre

$$d^2ab = a$$

also

$$d^2b = 1$$
$$b = (d^{-1})^2$$

mithin b ein Quadrat in $\mathfrak{A}$, entgegen der Voraussetzung. Die Annahme, daß a ein Quadrat in $\mathfrak{A}$ ist, führt also zu einem Widerspruch.

Das Gleiche gilt für b.

Bemerkung 39. Die Bemerkung 38 gestattet sehr allgemeine Beispiele für den Hauptfall B) zu bilden. Es sei im total reellen Körper $\mathfrak{K}_1$ die Zahl $\eta = \varepsilon + \varepsilon^{-1}$, der doppelte Realteil einer primitiven Einheitswurzel von möglichst hoher Ordnung, $\hat{\kappa}$ eine total positive Einheit in $\hat{\mathfrak{K}}_1$, jedoch kein Quadrat in $\hat{\mathfrak{K}}_1$. Wenn $\varepsilon'^2 = \varepsilon$ sein soll, so ist

$$\eta' = \varepsilon' + \varepsilon'^{-1}$$
$$\eta'^2 = \varepsilon'^2 + \varepsilon'^{-2} + 2 = \varepsilon + \varepsilon^{-1} + 2 = \eta + 2.$$

Wenn $\hat{\kappa}(\eta + 2)$ in $\hat{\mathfrak{K}}_1$ ein Quadrat sein soll, setzt man

$$\sqrt{\hat{\kappa}(\eta + 2)} = \pi'\eta'.$$

Wenn $\hat{\kappa}(\eta + 2)$ kein Quadrat in $\hat{\mathfrak{K}}_1$ ist, so bildet man

$$\hat{\mathfrak{K}}_1(\sqrt{\hat{\kappa}(\eta + 2)}) = \hat{\mathfrak{K}}.$$

Es ist

$$\eta \geqq -2;$$

das gilt für sämtliche Konjugierte von η, also ist $\eta + 2$ total positiv; da auch $\hat{\kappa}$ total positiv ist, so ist

$$\sqrt{\hat{\kappa}(\eta + 2)} = \pi'\eta'$$

total reell, also wird $\hat{\mathfrak{K}}$ total reell. Nach Bemerkung 38 kommen π' und η' nicht für sich in $\hat{\mathfrak{K}}$ vor, wie es im Hauptfall B) verlangt war.

Sollen spezielle $\hat{\mathfrak{K}}$ den π'-Körper $P\{\varepsilon'\pi'\}$ enthalten, wo ε' die Ordnung $w' = 8$ bezw. 12 hat, so ist $\varepsilon = \varepsilon'^2$ von der Ordnung 4 bezw. 6, also $\eta = 0$ bezw. 1 nach (71). Es ist also zu prüfen, ob in $\hat{\mathfrak{K}}$ die Zahl $2\hat{\kappa}$ bezw. $3\hat{\kappa}$ ein Quadrat ist. Hierfür siehe oben Bemerkung 37.

Bemerkung 40. Jede Einheit in $\mathfrak{K}$, die nicht in $\hat{\mathfrak{K}}$ vorkommt, genügt einer Gleichung

$$\vartheta^2 + \hat{\alpha}\vartheta + \hat{\kappa} = 0. \tag{41}$$

Hierin ist $\hat{\pi}$ eine total positive Einheit in $\hat{\mathfrak{K}}$. Wir lassen jetzt auch zu, daß $\hat{\pi}$ ein Quadrat in $\hat{\mathfrak{K}}$, auch daß $\hat{\pi} = 1$ sein kann. Bildet man eine Gleichung von der Gestalt (41), worin $\hat{\pi}$ eine total positive Einheit aus einem gegebenen total reellen Körper $\hat{\mathfrak{K}}$, ferner $\hat{\alpha}$ irgend eine ganze Zahl aus $\hat{\mathfrak{K}}$, die so beschaffen ist, daß die Wurzeln der quadratischen Gleichung (41) total imaginär werden, so ist $\hat{\mathfrak{K}}(\vartheta)$ ein total imaginärer Körper vom Relativgrad 2 über $\hat{\mathfrak{K}}$, also, da ϑ eine Einheit ist, einen der von uns untersuchten Körper vom schwachen Einheitsdefekt. Die einzige Bedingung, der $\hat{\alpha}$ genügen muß, damit ϑ imaginär wird, lautet

$$\hat{\alpha}^2 < 4\hat{\pi}.$$

Damit ϑ total imaginär wird, müssen die entsprechenden Bedingungen für sämtliche Konjugierten gelten:

$$\hat{\alpha}_\nu^2 < 4\hat{\pi}_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \hat{n}). \tag{79}$$

Genügt also die Zahl $\hat{\alpha}$ der Bedingung (79) für sämtliche Konjugierten, $\hat{\alpha}_\nu$, so muß ϑ der Gleichung (45) genügen:

$$\begin{aligned} \vartheta^2 &= \hat{\pi}\varepsilon^\nu \\ \vartheta &= \varepsilon'\pi' \\ \hat{\alpha} &= \vartheta + \bar{\vartheta} = \eta'\pi'. \end{aligned}$$

Wir sind also zum Ergebnis gekommen:

Ist $\hat{\pi}$ eine total positive Einheit in einem total-reellen Körper $\hat{\mathfrak{K}}$ und ist $\hat{\alpha}$ eine Zahl in $\hat{\mathfrak{K}}$, die für sämtliche Konjugierte der Bedingung (79) *genügt, so ist*

$$\hat{\alpha} = \eta'\pi'$$

worin

$$\begin{aligned} \pi'^2 &= \hat{\pi} \\ \eta' &= \varepsilon' + \varepsilon'^{-1} \end{aligned}$$

wo ε' eine Einheitswurzel ist.

Für den speziellen Fall $\hat{\pi} = 1$ ergibt sich:

Bemerkung 41. Ist für eine total reelle Zahl $\hat{\alpha}$ die Bedingung

$$|\hat{\alpha}_\nu| < 2$$

für sämtliche Konjugierte erfüllt, so ist

$$\hat{\alpha} = \varepsilon + \varepsilon^{-1}$$

wo ε eine Einheitswurzel ist.

(Oblatum 11-7-51).