NICOLAE DINCULEANU

Sur la représentation intégrale des certaines opérations linéaires. II

Compositio Mathematica, tome 14 (1959-1960), p. 1-22
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1959-1960__14__1_0>

Sur la représentation intégrale des certaines opérations linéaires. II.

par

Nicolae Dinculeanu

Introduction

Ce travail est divisé en deux parties. Les premiers deux paragraphes traitent de la représentation intégrale des certaines fonctionnelles linéaires et les deux derniers de la représentation intégrale des certaines opérations linéaires.

1. Soient T un espace localement compact et E un espace de Banach de type dénombrable. Si μ est une mesure de Radon positive sur T et m une forme linéaire continue sur l'espace $L^1_E(T, \mu)$ (des applications μ-intégrables $\mathbf{x}$ de T dans E), alors m peut s'écrire sous la forme

$$(1) \qquad m(\mathbf{x}) = \int \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{x}'_m(t) \rangle d\mu(t) \qquad \text{pour } \mathbf{x} \in L^1_E(T, \mu),$$

où $\mathbf{x}'_m$ est une application de T dans le dual E' de E telle que $N_\infty(\mathbf{x}'_m, \mu) = ||m||$.

Ce résultat est connu ([3], [5], [10], [11]). On l'énonce (théorème 1) dans le §1 qui a un caractère introductif. Dans le §2 on utilise ce résultat pour donner une représentation intégrale de la forme (1) pour certaines formes linéaires m sur l'espace $\mathscr{K}_E$ des applications de T dans E continues et à support compact (théorème 2). Pour ce faire, on attache à m une mesure de Radon positive μ sur T, de la même manière qu'on attache à une mesure de Radon réelle ou complexe son module.

2. Soit F un espace de Banach de type dénombrable, dual d'un espace de Banach, T et E étant comme plus haut. Si μ est une mesure de Radon positive sur T et m est une application linéaire et continue de $L^1_E(T, \mu)$ dans F, alors m peut s'écrire sous la forme

$$(2) \qquad m(\mathbf{x}) = \int U_m(t)\mathbf{x}(t) d\mu(t) \qquad \text{pour } \mathbf{x} \in L^1_E(T, \mu),$$

où U_m est une application de T dans l'espace $\mathscr{L}(E, F)$ (des applications linéaires et continues de E dans F). Ce résultat que nous avons démontré dans [7], est énoncé dans le §3 (théorème 3). Lorsque $E = F = A$, où A est une algèbre de Banach à élément unité, on donne une condition nécessaire et suffisante (théorème 4) pour que U_m soit à valeurs dans A et non plus dans $\mathscr{L}(A)$, à savoir la condition suivante

$$(3) \qquad m(a\mathbf{x}) = am(\mathbf{x}) \qquad \text{pour } a \in A \text{ et } \mathbf{x} \in L^1_E(T, \mu).$$

Dans le §4 on donne une représentation intégrale de la forme (2) pour certaines applications linéaires (les applications linéaires majorées) de $\mathscr{K}_E$ dans F (théorème 5). On considère aussi le cas des algèbres (théorème 6).

Ces résultats sont, en fait, démontrés dans le cas plus général où, au lieu d'un seul espace E, on considère une famille $E((t))_{t\in T}$ d'espaces de Banach, donc au lieu des fonctions définies sur T à valeurs dans E, on considère des champs de vecteurs $\mathbf{x}$ définis sur T, tels que $\mathbf{x}(t) \in E(t)$ quel que soit $t \in T$. Les démonstrations pour ce cas général ne sont en rien plus compliquées.

Nous aurons pu déduire les résultats concernant les fonctionnelles des résultats analogues sur les opérations; nous avons préféré les traiter séparément pour mettre en évidence certaines propriétés particulières des fonctionnelles.

I. FONCTIONNELLES LINÉAIRES

§ 1. Fonctionnelles linéaires sur $L^p_{\mathscr{A}}$

Soient T un espace localement compact, $\mathscr{E} = (E(t))_{t\in T}$ une famille d'espace de Banach et $\mathscr{C}(\mathscr{E})$ l'ensemble des champs de vecteurs [1]) $\mathbf{x}$ définis sur T, tels que $\mathbf{x}(t) \in E(t)$ quel que soit $t \in T$. Soient $\mathscr{E}' = (E'(t))_{t\in T}$ la famille des duals des espaces $E(t)$, et $\mathscr{C}(\mathscr{E}')$ l'ensemble des champs de fonctionnelles $\mathbf{x}'$ définis sur T, tels que $\mathbf{x}'(t) \in E'(t)$ quel que soit $t \in T$. La norme d'un élément a appartenant à l'un des espaces $E(t)$ ou $E'(t)$ sera notée par $|a|$; si $\mathbf{z}$ est un champ de vecteurs ou de fonctionnelles défini sur T, on notera par $|\mathbf{z}|$ la fonction numérique $t \to |\mathbf{z}(t)|$.

Supposons qu'il existe une famille fondamentale $\mathscr{A} \subset \mathscr{C}(\mathscr{E})$ de champs de vecteurs continus ([10], p. 80). Un champ de vecteurs $\mathbf{x} \in \mathscr{C}(\mathscr{E})$ est continu au point $t_0 \in T$ (relativement à la famille fondamentale $\mathscr{A}$), si pour tout nombre $\varepsilon > 0$ il existe un $\mathbf{y} \in \mathscr{A}$ et un voisinage V de t_0 tels que

$$|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)| \leqq \varepsilon \qquad \text{pour } t \in V.$$

Désignons par $\mathscr{K}_{\mathscr{A}}(T)$ ou $\mathscr{K}_{\mathscr{A}}$ l'ensemble des champs de vecteurs

---

[1]) Pour ce qui concerne les champs de vecteurs et les espaces $L^p_{\mathscr{A}}$ voir [10].

$\mathbf{x} \in \mathscr{C}(\mathscr{E})$ continus sur T et à support compact, et pour toute partie compacte K de T, désignons par $\mathscr{K}_{\mathscr{A}}(T, K)$, l'ensemble des champs de vecteurs $\mathbf{x} \in \mathscr{K}_{\mathscr{A}}$ dont le support est contenu dans K. On munit les espaces $\mathscr{K}_{\mathscr{A}}$ et $\mathscr{K}_{\mathscr{A}}(T, K)$ de la topologie définie par la norme $\|\mathbf{x}\| = \sup_{t \in T} |\mathbf{x}(t)|$.

Si tous les espaces $E(t)$ sont identiques à un même espace de Banach E, on prendra toujours pour famille fondamentale $\mathscr{A}$, l'ensemble des applications constantes de T dans E. Une application $\mathbf{x}$ de T dans E est continue au point $t_0 \in T$ relativement à $\mathscr{A}$, si et seulement si $\mathbf{x}$ est continue en t_0 au sens habituel. Les espaces $\mathscr{K}_{\mathscr{A}}$ et $\mathscr{K}_{\mathscr{A}}(T, K)$ sont alors les espaces $\mathscr{K}_E$ et $\mathscr{K}_E(T, K)$ des applications de T dans E, continues et à support compact.

Si $E = R$, on écrit $\mathscr{K}$ au lieu de $\mathscr{K}_R$; $\mathscr{K}_+$ est le sous-espace de $\mathscr{K}$, formé des fonctions positives.

Dans le §2 nous aurons besoin du lemme suivant:

LEMME. *Soit* $\mathbf{x} \in \mathscr{K}_{\mathscr{A}}$ *et* $g \in \mathscr{K}_+$, *tels que* $0 \leqq g \leqq |\mathbf{x}|$. *Le champ de vecteurs* $\sigma_{\mathbf{x}}$ *défini sur* T *par les égalités* $\sigma_{\mathbf{x}}(t) = 0$ *si* $\mathbf{x}(t) = 0$ *et* $\sigma_{\mathbf{x}}(t) = \dfrac{\mathbf{x}(t)}{|\mathbf{x}(t)|}$ *si* $\mathbf{x}(t) \neq 0$, *est tel que* $1°$ $\sigma_{\mathbf{x}}|\mathbf{x}| = \mathbf{x}$ *et* $2°$ $g\sigma_{\mathbf{x}} \in \mathscr{K}_{\mathscr{A}}$.

DÉMONSTRATION. Puisque 1° est évident, on va démontrer 2°. Soit $t_0 \in T$. Si $\mathbf{x}(t_0) \neq 0$ on a $\mathbf{x}(t) \neq 0$ dans un voisinage V de t_0. La fonction $h(t)$ définie sur T par:

$$h(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{|\mathbf{x}(t)|} & \text{pour } t \in V \\ 1 & \text{pour } t \notin V \end{cases} \qquad \text{est continue en } t_0.$$

Alors $\sigma_{\mathbf{x}}(t) = h(t)\mathbf{x}(t)$ est continue en t_0, donc aussi $g\sigma_{\mathbf{x}}$. Si $\mathbf{x}(t_0) = 0$, alors $g(t_0) = 0$. Soit $\varepsilon > 0$; il existe un champ de vecteurs $\mathbf{y} \in \mathscr{A}$ et un voisinage V de t_0 tels que pour $t \in V$ l'on ait:

$$|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)| < \frac{\varepsilon}{4}, \qquad g(t) < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad |\mathbf{y}(t)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a alors, pour $t \in V$,

$$|g(t)\sigma_{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{y}(t)| \leqq g(t)|\sigma_{\mathbf{x}}(t)| + |\mathbf{y}(t)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

donc $g\sigma_{\mathbf{x}}$ est continu en t_0, ce qui achève la démonstration.

On va supposer parfois que la famille $\mathscr{A}$ vérifie l'axiome de Godement ([10], p. 94):

(G): *Il existe une partie dénombrable* $\mathscr{A}_0 \subset \mathscr{A}$, *telle que pour tout* $t \in T$, *l'ensemble* $\{\mathbf{x}(t) | \mathbf{x} \in \mathscr{A}_0\}$ *est dense dans* $E(t)$.

Dans le cas où les espaces $E(t)$ sont identiques à un espace de Banach E, l'axiome (G) signifie que E est de type dénombrable.

Pour une famille fondamentale $\mathscr{A}' \subset \mathscr{C}(\mathscr{E}')$ de champs de fonctionnelles continus, on suppose parfois vérifié l'axiome suivant:

(T) *La fonction scalaire* $t \to \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t) \rangle$ *est continue quels que soient* $\mathbf{x} \in \mathscr{A}$ *et* $\mathbf{x}' \in \mathscr{A}'$.

Si tous les $E(t)$ sont des espaces hilbertiens, et si l'on prend $\mathscr{A}' = \mathscr{A}$, l'axiome ($T$) est vérifié. Si tous les espaces $E(t)$ sont identiques à un espace de Banach E, on prend pour $\mathscr{A}'$ l'ensemble des applications constantes de T dans E' et l'axiome (T) est trivialement vérifié.

Il s'ensuit de l'axiome (T) que si $\mathbf{x}$ et $\mathbf{x}'$ sont continus (respectivement, relativement à $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$) au point $t_0 \in T$, alors la fonction $t \to \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t) \rangle$ est continue en t_0, et que si $\mathbf{x}$ et $\mathbf{x}'$ sont mesurables pour une mesure de Radon [2]) positive μ sur T, alors la fonction $t \to \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t) \rangle$ est μ-mesurable ([6], p. 136).

Nous allons utiliser le théorème suivant dû à C. T. Ionescu Tulcea ([11], théorème 2).

Théorème 1. *Soit* μ *une mesure de Radon positive sur* T. *Si la famille fondamentale* $\mathscr{A}$ *vérifie l'axiome* (G), *toute forme linéaire et continue* m *sur* $L^p_{\mathscr{A}}(T, \mu)$, $(1 \leqq p < \infty)$ *peut s'écrire sous la forme*

$$m(\mathbf{x}) = \int \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{x}'_m(t) \rangle d\mu(t) \quad pour \quad \mathbf{x} \in L^p_{\mathscr{A}}(T, \mu)$$

où $\mathbf{x}'_m \in \mathscr{C}(\mathscr{E}')$ *et* $N_q(\mathbf{x}'_m, \mu) = ||m||, \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$. *En outre,* $\mathbf{x}'_m$ *est déterminé localement* μ*-presque partout.*

On convient d'identifier deux champs égaux localement μ-presque partout, en remplaçant l'intégrale par l'intégrale essentielle ([2], chap. V).

Remarques: 1° Pour tout champ de vecteurs $\mathbf{x} \in \mathscr{C}(\mathscr{E})$ mesurable (pour μ et $\mathscr{A}$), la fonction scalaire $t \to \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{x}'_m(t) \rangle$ est μ-mesurable, et puisque $\mathscr{A}$ vérifie l'axiome (G), la fonction numérique $t \to |\mathbf{x}'_m(t)|$ est μ-mesurable.

2°. Supposons qu'il existe une famille fondamentale $\mathscr{A}' \subset \mathscr{C}(\mathscr{E}')$ telle que: a) la fonction $t \to \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t) \rangle$ est μ-mesurable quels que soient $\mathbf{x} \in \mathscr{A}$ et $\mathbf{x}' \in \mathscr{A}'$; b) il existe une suite $(\mathbf{x}'_n)$ d'éléments de $\mathscr{A}'$, telle que pour tout $t \in T$, $\mathbf{x}'_m(t)$ soit contenu dans le sous-espace fermé de $E'(t)$, généré par l'ensemble $\{\mathbf{x}'_n(t)\}$. Alors, $\mathbf{x}'_m$ est mesurable (relativement à μ et $\mathscr{A}'$), donc $\mathbf{x}'_m \in L^q_{\mathscr{A}'}(T, \mu)$. Pour la dé-

[2]) Pour ce qui concerne l'Intégration, voir [2] et [10].

monstration voir [11], p. 109. En particulier, la condition a) est satisfaite si $\mathscr{A}'$ vérifie l'axiome (T) et la condition b) est satisfaite si $\mathscr{A}'$ vérifie l'axiome (G).

3°. Si tous les espaces $E(t)$ sont des espaces hilbertiens, le théorème 1 et les remarques précédents sont valables sans supposer l'axiome (G). Dans ce cas on prend $\mathscr{A}' = \mathscr{A}$ et l'axiome (T) est vérifié. Ce résultat est dû à R. Godement [10] p. 91—92.

4° Si tous les espaces $E(t)$ sont identiques à un même espace de Banach E de type dénombrable, le théorème 1 est dû à J. Dieudonné [3] (théorème 3, p. 38) et [5] (théorème 2, p. 134). Si dans ce cas, $T = [0, 2\pi]$ et $p = 1$, S. Bochner et A. E. Taylor [1] ont représenté m comme intégrale de type Stieltjes par rapport à une fonction définie sur T et à valeurs dans E'.

On a aussi le théorème réciproque suivant:

Théorème 1'. *Soit μ une mesure de Radon positive sur T. S'il existe une famille fondamentale $\mathscr{A}' \subset \mathscr{C}(\mathscr{E}')$ vérifiant la condition* a) *de la remarque* 2°, *pour tout élément $\mathbf{x}' \in L^q_{\mathscr{A}'}(T, \mu)$ la fonction m définie par*

$$m(\mathbf{x}) = \int \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t) \rangle d\mu(t) \qquad \text{pour } \mathbf{x} \in L^p_{\mathscr{A}}(T, \mu)$$

est une forme linéaire continue sur $L^p_{\mathscr{A}}(T, \mu)$ et $\|m\| = N_q(\mathbf{x}', \mu)$.

Corollaire. *Soit μ une mesure de Radon positive sur T. Si $\mathscr{A}$ vérifie l'axiome* (G) *et s'il existe une famille fondamentale $\mathscr{A}' \subset \mathscr{C}(\mathscr{E}')$ vérifiant l'axiome* (G) *et la condition* a) *de la remarque* 2, *alors le dual de $L^p_{\mathscr{A}}(T, \mu)$ est isomorphe et isométrique à $L^q_{\mathscr{A}'}(T, \mu)$.*

§ 2. Fonctionnelles linéaires sur $\mathscr{K}_{\mathscr{A}}$

Soit m une fonctionnelle linéaire sur $\mathscr{K}_{\mathscr{A}}$, telle que pour chaque ensemble compact $K \subset T$, la restriction de m à l'espace $\mathscr{K}_{\mathscr{A}}(T, K)$ soit continue. On attache à m une mesure de Radon positive μ sur T, en posant pour chaque fonction $\varphi \in \mathscr{K}_+$,

$$\mu(\varphi) = \sup \{ |m(\mathbf{x})| \mid \mathbf{x} \in \mathscr{K}_{\mathscr{A}},\ |\mathbf{x}| \leqq \varphi \}. \tag{1}$$

On déduit aussitôt

$$|m(\mathbf{x})| \leqq \mu(|\mathbf{x}|) \qquad \text{pour } \mathbf{x} \in \mathscr{K}_{\mathscr{A}}. \tag{2}$$

Proposition 1. *La fonction μ est additive sur l'ensemble $\mathscr{K}_+$.*

Démonstration. *Soient* $\varphi_1 \in \mathscr{K}_+$ et $\varphi_2 \in \mathscr{K}_+$. Pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe deux champs de vecteurs $\mathbf{x}_1$ et $\mathbf{x}_2$ de $\mathscr{K}_{\mathscr{A}}$ tels que $|\mathbf{x}_1| \leqq \varphi_1$, $|\mathbf{x}_2| \leqq \varphi_2$ et

$$\mu(\varphi_1) \leqq |m(\mathbf{x}_1)| + \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \mu(\varphi_2) \leqq |m(\mathbf{x}_2)| + \frac{\varepsilon}{2}\cdot$$

Il existe deux nombres complexes θ_1 et θ_2 de module 1, tels que

$$|m(\mathbf{x}_1)| = \theta_1 m(\mathbf{x}_1) = m(\theta_1 \mathbf{x}_1),$$
$$|m(\mathbf{x}_2)| = \theta_2 m(\mathbf{x}_2) = m(\theta_2 \mathbf{x}_2).$$

Alors

$$\mu(\varphi_1)+\mu(\varphi_2) \leqq m(\theta_1 \mathbf{x}_1+\theta_2 \mathbf{x}_2)+\varepsilon \leqq \mu(\varphi_1+\varphi_2)+\varepsilon$$

donc

$$(*) \qquad \mu(\varphi_1)+\mu(\varphi_2) \leqq \mu(\varphi_1+\varphi_2).$$

Inversement, pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un champ de vecteurs $\mathbf{x} \in \mathscr{K}_{\mathscr{A}}$ tel que $|\mathbf{x}| \leqq \varphi_1+\varphi_2$ et

$$\mu(\varphi_1+\varphi_2) \leqq |m(\mathbf{x})|+\varepsilon.$$

Posons $g_1 = \inf(|\mathbf{x}|, \varphi_1)$ et $g_2 = |\mathbf{x}|-g_1$; g_1 et g_2 appartiennent à $\mathscr{K}_+$ et l'on a:

$$0 \leqq g_1 \leqq \varphi_1, \qquad 0 \leqq g_2 \leqq \varphi_2, \qquad |\mathbf{x}| = g_1+g_2.$$

Du lemme du §1 on déduit:

$$\mathbf{x} = \sigma_{\mathbf{x}} g_1+\sigma_{\mathbf{x}} g_2, \qquad |\sigma_{\mathbf{x}} g_1| \leqq \varphi_1, \qquad |\sigma_{\mathbf{x}} g_2| \leqq \varphi_2.$$

Alors

$$\mu(\varphi_1+\varphi_2) \leqq |m(\sigma_{\mathbf{x}} g_1)|+|m(\sigma_{\mathbf{x}} g_2)|+\varepsilon \leqq \mu(\varphi_1)+\mu(\varphi_2)+\varepsilon$$

donc

$$(**) \qquad \mu(\varphi_1+\varphi_2) < \mu(\varphi_1)+\mu(\varphi_2).$$

Des inégalités (*) et (**) on déduit

$$\mu(\varphi_1+\varphi_2) = \mu(\varphi_1)+\mu(\varphi_2)$$

ce qui achève la démonstration.

On prolonge ensuite la fonction μ en une mesure de Radon positive sur T, notée toujours μ, en posant pour $f, g \in \mathscr{K}_+$

$$\mu(f-g) = \mu(f)-\mu(g).$$

On va noter parfois par $|m|$ la mesure μ définie par l'égalité (1).

Remarques. 1°. *La mesure μ définie par l'égalité* (1) *est la plus petite mesure de Radon positive sur T qui vérifie l'inégalité* (2).

2° On a

$$(3) \quad ||\mu|| = \sup \{\mu(\varphi) \mid \varphi \in \mathscr{K}_+(T), ||\varphi|| \leqq 1\}$$
$$= \sup \{|m(\mathbf{x})| \mid \mathbf{x} \in \mathscr{K}_{\mathscr{A}}(T), ||\mathbf{x}|| \leqq 1\} = ||m||$$

donc m est *continue* sur $\mathscr{K}_{\mathscr{A}}(T)$ si et seulement si μ est *bornée*.

Considérons alors l'espace $L^1_{\mathscr{A}}(T, \mu)$ des champs de vecteurs $\mathbf{x} \in \mathscr{C}(\mathscr{E})$, μ-sommables ([10], p. 87), et la topologie de la convergence en moyenne induite sur $\mathscr{K}_{\mathscr{A}}$ par la topologie de $L^1_{\mathscr{A}}(T, \mu)$. L'inégalité (2) montre que la fonctionnelle m est continue sur $\mathscr{K}_{\mathscr{A}}$ pour cette topologie, et comme $\mathscr{K}_{\mathscr{A}}$ est dense dans $L^1_{\mathscr{A}}(T, \mu)$, on peut prolonger m, d'une manière unique, par continuité, en une fonctionnelle linéaire et continue, notée toujours m, sur l'espace $L^1_{\mathscr{A}}(T, \mu)$ tout entier, et de l'inégalité (2) on déduit

$$(4) \qquad |m(\mathbf{x})| \leqq \int |x(t)| d\mu(t) \qquad \text{pour } \mathbf{x} \in L^1_{\mathscr{A}}(T, \mu).$$

Si l'on note par $||m||_1$ la norme de m sur $L^1_{\mathscr{A}}(T, \mu)$, on a

$$(5) \qquad ||m||_1 = 1.$$

En effet, de (4) on déduit que $||m||_1 \leqq 1$; d'autre part, si $\varphi \in \mathscr{K}_+$ et $\mu(\varphi) = 1$,

$$\begin{aligned} ||m||_1 &= \sup \{|m(\mathbf{x})| \mid \mathbf{x} \in L^1_{\mathscr{A}}(T, \mu), \quad N_1(\mathbf{x}, \mu) \leqq 1\} \\ &\geqq \sup \{|m(\mathbf{x})| \mid \mathbf{x} \in \mathscr{K}_{\mathscr{A}}(T), \quad |\mathbf{x}| \leqq \varphi\} = \mu(\varphi) = 1 \end{aligned}$$

d'où il résulte (5).

THÉORÈME 2. *Si la famille fondamentale $\mathscr{A}$ vérifie l'axiome* (G), *pour toute forme linéaire m sur $\mathscr{K}_{\mathscr{A}}$, continue sur $\mathscr{K}_{\mathscr{A}}(T, K)$ quel que soit l'ensemble compact $K \subset T$, il existe une mesure de Radon positive μ sur T et un champ de fonctionnelles $\mathbf{x}'_m \in \mathscr{C}(\mathscr{E}')$ déterminé localement μ-presque partout, tels que $||\mu|| = ||m||$, $|\mathbf{x}'_m(t)| \equiv 1$ et*

$$m(\mathbf{x}) = \int \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{x}'_m(t) \rangle d\mu(t) \quad \textit{pour } \mathbf{x} \in L^1_{\mathscr{A}}(T, \mu).$$

En outre, la fonction scalaire $t \to \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{x}'_m(t) \rangle$ est μ-mesurable pour chaque champ de vecteurs $\mathbf{x} \in \mathscr{C}(\mathscr{E})$ mesurable (relativement à μ et $\mathscr{A}$).

DÉMONSTRATION. On prend $\mu = |m|$ et les affirmations du théorème résultent du théorème 1 et des considérations précédentes. On déduit que $N_\infty(\mathbf{x}'_m, \mu) = 1$. Il reste à prouver que $|\mathbf{x}'_m(t)| \equiv 1$. Tout d'abord, la fonction $t \to |\mathbf{x}'_m(t)|$ est μ-mesurable. En effet, soit $\mathscr{A}_0$ une partie dénombrable de $\mathscr{A}$, telle que pour tout $t \in T$, l'ensemble $\{\mathbf{x}(t) \mid \mathbf{x} \in \mathscr{A}_0\}$ soit dense dans $E(t)$. Alors la fonction $|\mathbf{x}'_m|$ est μ-mesurable, comme borne supérieure de la famille dénombrable de fonctions μ-mesurables $(h_{\mathbf{x}} |\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}'_m \rangle|)_{\mathbf{x} \in \mathscr{A}_0}$, où pour chaque $\mathbf{x} \in \mathscr{A}_0$, $h_{\mathbf{x}}$ est la fonction μ-mesurable définie sur T par $h_{\mathbf{x}}(t) = \dfrac{1}{|\mathbf{x}(t)|}$ si $\mathbf{x}(t) \neq 0$ et $h_{\mathbf{x}}(t) = 0$ si $\mathbf{x}(t) = 0$. Il en résulte que la fonction $|\mathbf{x}'_m|$ est localement μ-intégrable. Posons $d\nu(t) =$

$|\mathbf{x}'_m(t)|d\mu(t)$. On a $\nu \leqq \mu$. Pour chaque champ de vecteurs $\mathbf{x} \in \mathscr{K}_{\mathscr{A}}$ on a alors

$$|m(\mathbf{x})| \leqq \int |\mathbf{x}(t)|\, |\mathbf{x}'_m(t)| d\mu(t) = \nu(|\mathbf{x}|).$$

Comme μ est la plus petite mesure de Radon vérifiant cette condition, on déduit $\nu = \mu$, donc $|\mathbf{x}'_m(t)| = 1$ localement μ-presque partout, donc partout si l'on modifie $\mathbf{x}'_m$ sur un ensemble localement μ-négligeable. Ceci achève la démonstration.

Remarque. S'il existe une famille fondamentale $\mathscr{A}' \subset \mathscr{C}(\mathscr{E}')$ vérifiant les conditions a) et b) de la remarque 2 suivant le théorème 1, alors $\mathbf{x}'_m$ est mesurable (pour μ et $\mathscr{A}'$), donc $\mathbf{x}'_m \in L^\infty_{\mathscr{A}'}(T, \mu)$. Si la famille fondamentale $\mathscr{A}'$ vérifie les axiomes (G) et (T), alors $\mathbf{x}'_m$ est $|m|$-mesurable, quel que soit m.

On a aussi les théorèmes réciproques suivants:

Théorème 2'. *S'il existe une famille fondamentale $\mathscr{A}' \subset \mathscr{C}(\mathscr{E}')$ vérifiant l'axiome* (T), *pour tout couple* $(\mu, \mathbf{x}')$ *formé d'une mesure de Radon positive μ sur T, et d'un champ de fonctionnelles $\mathbf{x}' \in \mathscr{C}(\mathscr{E}')$ mesurable relativement à μ et $\mathscr{A}'$ et tel que* $|\mathbf{x}'(t)| \equiv 1$, *la forme linéaire et continue m définie sur $L^1_{\mathscr{A}}(T, \mu)$ par l'égalité*

$$m(\mathbf{x}) = \int \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t)\rangle d\mu(t) \qquad \textit{pour } \mathbf{x} \in L^1_{\mathscr{A}}(T, \mu)$$

est telle que la restriction de m à l'espace $\mathscr{K}_{\mathscr{A}}(T, K)$ est continue quel que soit l'ensemble compact $K \subset T$, et $\mu = |m|$. (On ne suppose pas que $\mathscr{A}$ vérifie l'axiome (G)).

Démonstration. On a pour tout $\mathbf{x} \in \mathscr{K}_{\mathscr{A}}$

$$|m(\mathbf{x})| \leqq \int |\mathbf{x}(t)| d\mu(t)$$

donc $|m| \leqq \mu$.

Inversement, soit $0 < a < 1$ et K un ensemble compact de T. Il existe ([8], Proposition 1) un champ de vecteurs $\mathbf{y} \in \mathscr{C}(\mathscr{E})$ mesurable relativement à μ et $\mathscr{A}$, tel que

$$a|\mathbf{x}'(t)| \leqq \langle \mathbf{y}(t), \mathbf{x}'(t)\rangle \text{ et } a \leqq |\mathbf{y}(t)| \leqq 2-a, \quad \mu\text{-presque partout sur } K.$$

Soit $\varepsilon > 0$; il existe un ensemble compact $K' \subset K$ tel que $\mu(K-K') \leqq \dfrac{\varepsilon}{2-a+\varepsilon}$ et tel que $\mathbf{y}$ et $\mathbf{x}'$ soient continus sur K', donc aussi la fonction $t \to \langle \mathbf{y}(t), \mathbf{x}'(t)\rangle$. Il existe aussi ([10], Proposition 7, p. 82) un champ de vecteurs $\mathbf{y}_0 \in \mathscr{C}(\mathscr{E})$, continu sur T, tel que $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0(t)$ pour $t \in K'$, et la norme de $\mathbf{y}_0$ ne dépend pas de K', mais seulement de $\mathbf{y}$, par exemple $||\mathbf{y}_0|| \leqq 2-a+\varepsilon$. Pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{K}_+(T, K)$ on a

$$a\int \varphi d\mu = \int a|\mathbf{x}'(t)|\varphi(t)d\mu(t) \leqq \int \langle \mathbf{y}(t), \mathbf{x}'(t)\rangle \varphi(t)d\mu(t)$$

$$= \int_{K'} \langle \mathbf{y}_0(t), \mathbf{x}'(t)\rangle \varphi(t)d\mu(t) + \int_{K-K'} \langle \mathbf{y}(t), \mathbf{x}'(t)\rangle \varphi(t)d\mu(t)$$

$$\leqq \left| \int \langle \mathbf{y}_0(t), \mathbf{x}'(t)\rangle \varphi(t)d\mu(t) - \int_{K-K'} \langle \mathbf{y}_0(t), \mathbf{x}'(t)\rangle \varphi(t)d\mu(t) \right|$$

$$+ ||\varphi||\varepsilon \leqq \left| \int \langle \mathbf{y}_0(t), \mathbf{x}'(t)\rangle \varphi(t)d\mu(t) \right| + 2||\varphi||\varepsilon$$

$$\leqq \sup \{|m(\varphi \mathbf{x})| \,|\, \mathbf{x} \in \mathscr{K}_{\mathscr{A}}, |\mathbf{x}| \leqq 2 - a + \varepsilon\} + 2||\varphi||\varepsilon$$

$$= (2 - a + \varepsilon) \sup \{|m(\varphi \mathbf{x})| \,|\, \mathbf{x} \in \mathscr{K}_{\mathscr{A}}, |\mathbf{x}| \leqq 1\} + 2||\varphi||\varepsilon;$$

ε et a étant arbitraires, on a

$$\mu(\varphi) \leqq \sup \{|m(\mathbf{x})| \,|\, \mathbf{x} \in \mathscr{K}_{\mathscr{A}}, |\mathbf{x}| \leqq \varphi\} = |m|(\varphi)$$

ce qui achève la démonstration.

Désignons par $\mathscr{M}_{\mathscr{A}}(T)$ l'ensemble des fonctionnelles linéaires m sur $\mathscr{K}_{\mathscr{A}}$, continues sur $\mathscr{K}_{\mathscr{A}}(T, K)$ quel que soit l'ensemble compact $K \subset T$.

Pour une famille fondamentale $\mathscr{A}' \subset \mathscr{C}(\mathscr{E}')$, désignons par $\mathfrak{M}(\mathscr{A}', T)$ l'ensemble des couples $(\mu, \mathbf{x}')$ formés d'une mesure de Radon positive μ sur T et d'un champ de fonctionnelles $\mathbf{x}'$ mesurable relativement à μ et $\mathscr{A}'$, tel que $|\mathbf{x}'(t)| \equiv 1$. Deux couples $(\mu, \mathbf{x}_1')$ et $(\mu, \mathbf{x}_2')$ seront considérés identiques si $\mathbf{x}_1'(t) = \mathbf{x}_2'(t)$ localement μ-presque partout.

Des théorèmes 2 et 2′ on déduit le résultat suivant:

Corollaire. *Si la famille fondamentale $\mathscr{A}$ vérifie l'axiome* (G) *et s'il existe une famille fondamentale $\mathscr{A}' \subset \mathscr{C}(\mathscr{E}')$ vérifiant les axiomes* (G) *et* (T), *alors la correspondance $m \to (|m|, \mathbf{x}_m')$ établie par le théorème* 2, *est une application biunivoque de $\mathscr{M}_{\mathscr{A}}(T)$ sur $\mathfrak{M}(\mathscr{A}', T)$.*

Théorème 2″. *Si la famille fondamentale $\mathscr{A}$ vérifie l'axiome* (G), *pour tout couple $(\mu, \mathbf{x}')$ formé d'une mesure de Radon positive μ sur T et d'un champ de fonctionnelles $\mathbf{x}' \in \mathscr{C}(\mathscr{E}')$ tel que $|\mathbf{x}'(t)| \equiv 1$ et que la fonction $t \to \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t)\rangle$ soit μ-mesurable quel que soit le champ de vecteurs $\mathbf{x} \in \mathscr{C}(\mathscr{E})$ mesurable relativement à μ et $\mathscr{A}$, la fonction m définie par l'égalité*

$$m(\mathbf{x}) = \int \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t)\rangle d\mu(t) \qquad \textit{pour } \mathbf{x} \in L^1_{\mathscr{A}}(T, \mu)$$

est une forme linéaire et continue sur $L^1_{\mathscr{A}}(T, \mu)$ et $|m| = \mu$.

Démonstration. On déduit aussitôt que $|m| \leqq \mu$, donc $d|m|(t) = \alpha(t)d\mu(t)$ où $0 \leqq \alpha(t) \leqq 1$ et α est μ-mesurable. Du théorème 2 on déduit que m s'écrit sous la forme

$$m(\mathbf{x}) = \int \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{x}'_m(t) \rangle d|m|(t) \qquad \text{pour } \mathbf{x} \in L^1_{\mathscr{A}}(T, \mu) \subset L^1_{\mathscr{A}}(T, |m|)$$

où $|\mathbf{x}'_m(t)| \equiv 1$.

On a alors

$$m(\mathbf{x}) = \int \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{x}'_m(t)\alpha(t) \rangle d\mu(t) \qquad \text{pour } \mathbf{x} \in L^1_{\mathscr{A}}(T, \mu)$$

donc, d'après le théorème 1, $\mathbf{x}'_m(t)\alpha(t) = \mathbf{x}'(t)$ localement μ-presque partout, donc $\alpha(t) = 1$ localement μ-presque partout, d'où on déduit que $|m| = \mu$. Ceci achève la démonstration.

Désignons par $\mathfrak{M}(\mathscr{E}', T)$ l'ensemble des couples $(\mu, \mathbf{x}')$ formés d'une mesure de Radon positive μ sur T, et d'un champ de fonctionnelles $\mathbf{x}' \in \mathscr{C}(\mathscr{E}')$, tel que $|\mathbf{x}'(t)| \equiv 1$, et que la fonction $t \to \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t) \rangle$ soit μ-mesurable quel que soit $\mathbf{x} \in \mathscr{C}(\mathscr{E})$ mesurable relativement à μ et $\mathscr{A}$. Si $\mathbf{x}'_1 = \mathbf{x}'_2$ localement μ-presque partout, alors les couples $(\mu, \mathbf{x}'_1)$ et $(\mu, \mathbf{x}'_2)$ seront considérés égals. S'il existe une famille fondamentale $\mathscr{A}' \subset \mathscr{C}(\mathscr{E}')$ vérifiant les axiomes (T) et (G), alors $\mathfrak{M}(\mathscr{E}', T) = \mathfrak{M}(\mathscr{A}', T)$.

Des théorèmes 2 et 2″ on déduit le résultat suivant:

Corollaire. *Si la famille fondamentale $\mathscr{A}$ vérifie l'axiome* (G) *la correspondance $m \to (|m|, \mathbf{x}')$ établie par le théorème* 2 *est une application biunivoque de $\mathscr{M}_{\mathscr{A}}(T)$ sur $\mathfrak{M}(\mathscr{E}', T)$.*

Remarques. 1° Si tous les espaces $E(t)$ sont hilbertiens, les résultats précédents sont vrais sans supposer l'axiome (G). On prend $\mathscr{A}' = \mathscr{A}$ et l'axiome (T) est vérifié.

2°. Supposons que tous les espaces $E(t)$ sont identiques à un même espace E qui soit un espace hilbertien ou bien un espace de Banach de type dénombrable. Supposons encore que T est *compact.* Alors l'espace $\mathscr{K}_E$ est l'espace $\mathscr{C}_E$ des applications continues de T dans E. Dans ce cas on peut préciser la correspondance $m \to (\mu, \mathbf{x}'_m)$ établie par le théorème 2. On peut plonger E isométriquement dans $\mathscr{C}_E$, en identifiant un élément a de E avec la fonction constante $\mathbf{x}(t) \equiv a$. Considérons la restriction m' de m à E. Alors $m' \in E'$. Pour tout $a \in E$ on a

$$m'(a) = \int \langle a, \mathbf{x}'_m(t) \rangle d\mu(t)$$

et comme $\mathbf{x}'_m$ est une application de T dans E', bornée et faiblement μ-mesurable (par rapport à E), on déduit

$$m' = \int \mathbf{x}'_m(t) d\mu(t),$$

où l'intégrale du second membre est l'intégrale faible (par rapport à E). Si maintenant E' est de type dénombrable, $\mathbf{x}'_m$ est aussi mesurable, donc intégrable.

La norme $|m'|$ de m', comme élément de E', vérifie la relation $|m'| \leqq ||m|| = ||\mu||$.

Inversement, tout élément m' de E' peut être prolongé, d'après le théorème de Hahn-Banach, en une forme linéaire et continue m sur $\mathscr{C}_E$, telle que $|m'| = ||m||$. Il existe alors, d'après le théorème 2, une mesure de Radon positive μ sur T et une application faiblement μ-mesurable $\mathbf{x}'$ de T dans E', tels que $||\mu|| = |m'|$, $|\mathbf{x}'(t)| \equiv 1$ et

$$m' = \int \mathbf{x}'(t) d\mu(t).$$

Si E' est de type dénombrable alors $\mathbf{x}'$ est μ-mesurable, donc l'intégrale du second membre est l'intégrale habituelle (forte).

3°. Si tous les espaces $E(t)$ sont identiques à l'espace C des nombres complexes (ou à l'espace R des nombres réels), alors m est une mesure de Radon complexe (ou réelle) sur T, et μ est le *module* $|m|$ de m. Le théorème 2 nous dit qu'il existe une fonction complexe μ-mesurable g définie sur T telle que $|g(t)| \equiv 1$ et $dm = g d\mu$, résultat qui s'obtient d'ailleurs en utilisant directement le théorème de Lebesgue-Nikodym.

Lorsque m est une mesure réelle, la fonction g est de la forme $\varphi_A - \varphi_B$, où A et B sont disjoints, μ-mesurables et $A \cup B = T$, donc $m = \varphi_A \mu - \varphi_B \mu$, $\mu = \varphi_A \mu + \varphi_B \mu$; il en résulte que $m^+ = \varphi_A \mu$ et $m^- = \varphi_B \mu$.

II. OPÉRATIONS LINÉAIRES

§ 3. Opérations linéaires sur $L^1_{\mathscr{A}}$

1. *Le cas général*

Soit F un espace de Banach. Pour tout $t \in T$, soit $G(t)$ l'espace $\mathscr{L}(E(t), F)$ des applications linéaires et continues de $E(t)$ dans F; soit $\mathscr{G}$ la famille $(G(t))_{t \in T}$. Si $F = C$, l'espace $G(t)$ est le dual $E'(t)$ de $E(t)$ est $\mathscr{G}$ est la famille $\mathscr{E}'$. Désignons par $\mathscr{C}(\mathscr{G})$ l'ensemble des champs d'opérations U définis sur T, tels que $U(t) \in G(t)$ quel que soit $t \in T$. Si $\mathscr{D}$ est une famille fondamentale de champs d'opérations continus, on désigne toujours par (T) l'axiome suivant: *la fonction* $t \to U(t)\mathbf{x}(t)$ *est continue quels que soient* $\mathbf{x} \in \mathscr{A}$ *et* $U \in \mathscr{D}$.

On dit qu'un champ d'opérations $U \in \mathscr{C}(\mathscr{G})$ est *simplement mesurable* pour une mesure de Radon positive μ sur T, si la fonction $t \to U(t)\mathbf{x}(t)$ est μ-mesurable, quel que soit le champ de vecteurs $\mathbf{x} \in \mathscr{C}(\mathscr{E})$ mesurable relativement à μ et $\mathscr{A}$.

On a le théorème suivant ([7], théorème 1)

THÉORÈME 3. *Soit μ une mesure de Radon positive sur T. Si la famille fondamentale $\mathscr{A}$ vérifie l'axiome* (G) *et F est de type dénombrable et dual d'un espace de Banach, pour toute application linéaire et continue m de $L^1_{\mathscr{A}}(T, \mu)$ dans F, il existe un champ d'opérations $U_m \in \mathscr{C}(\mathscr{G})$ simplement μ-mesurable, déterminé localement μ-presque partout, tel que $N_\infty(U_m, \mu) = ||m||$ et*

$$m(\mathbf{x}) = \int U_m(t)\mathbf{x}(t)d\mu(t) \qquad \textit{pour } \mathbf{x} \in L^1_{\mathscr{A}}(T, \mu).$$

La fonction numérique $t \to |U_m(t)|$ est μ-mesurable.

REMARQUES. 1° Supposons qu'il existe une famille fondamentale $\mathscr{D} \subset \mathscr{C}(\mathscr{G})$ telle que:

a') La fonction $t \to U(t)\mathbf{x}(t)$ est μ-mesurable quels que soient $\mathbf{x} \in \mathscr{A}$ et $U \in \mathscr{D}$;

b') il existe une suite (U_n) d'éléments de $\mathscr{D}$, telle que pour tout $t \in T$, $U_m(t)$ soit contenu dans le sous-espace fermé de $G(t)$ généré par l'ensemble $\{U_n(t)\}$.

Alors U_m est mesurable relativement à μ et $\mathscr{D}$, donc $U_m \in L^\infty_{\mathscr{D}}(T, \mu)$. En particulier, la condition a') est satisfaite si $\mathscr{D}$ vérifie l'axiome (T), et la condition b') est satisfaite si $\mathscr{D}$ vérifie l'axiome (G). Pour la démonstration voir [11] p. 109.

2°. Pour le cas où $E(t) = F$ quel que soit $t \in T$, le théorème 3 est dû essentiellement à J. Dieudonné ([3], théorème 2, p. 36).

3°. Pour le cas où $E(t) = C$ quel que soit $t \in T$, voir [3] (théorème 1, p. 30), [4], [8], [9] et [12]. Dans ce cas $\mathscr{L}(C, F)$ est isomorphe et isométrique à F, donc on peut considérer U_m à valeurs dans F.

4°. Considérons le cas où tous les espaces $E(t)$ sont identiques à un espace *quelconque* F. On peut plonger isométriquement l'espace C des nombres complexes dans $\mathscr{L}(F)$, en identifiant un nombre $\alpha \in C$ avec l'opérateur $U_\alpha : a \to \alpha a$ de multiplication par α dans F. Soit m une application linéaire et continue de $L^1_F(T, \mu)$ dans F et supposons que m s'écrit sous la forme

$$m(\mathbf{x}) = \int \mathbf{x}(t)\alpha(t)d\mu(t) \qquad \text{pour } \mathbf{x} \in L^1_F(T, \mu)$$

où α est une application de T dans C et $N_\infty(\alpha, \mu) = ||m||$. Alors α est μ-mesurable (donc localement μ-intégrable) donc m est l'extension aux fonctions à valeurs dans F, de la mesure complexe $d\nu(t) = \alpha(t)d\mu(t)$, de base μ et de densité α. En effet, pour tout $a \in F$ et tout ensemble compact $K \subset T$, on a $a\varphi_K \in L^1_F(T, \mu)$ donc $a\varphi_K \alpha$ est μ-mesurable, et par suite $\varphi_K \alpha$ est μ-mesurable. En vertu du principe de localisation, on déduit que α est μ-mesurable. Inversement, si m est l'extension d'une mesure ν de base μ et de densité $\alpha \in L_C^\infty(T, \mu)$ on sait qu'on a

$$m(\mathbf{x}) = \int \mathbf{x}(t)\alpha(t)d\mu(t) \qquad \text{pour } \mathbf{x} \in L_F^1(T, \mu)$$

et $||m|| = N_\infty(\alpha, \mu)$.

Il en résulte que pour une application linéaire et continue m de $L_F^1(T, \mu)$ dans F, la fonction U_m qui lui corresponde par le théorème 3 est à valeurs dans C si et seulement si m est une mesure de Radon sur T.

On a aussi le théorème réciproque suivant:

Théorème 3'. *Soit μ une mesure de Radon sur T. S'il existe une famille fondamentale $\mathscr{D} \subset \mathscr{C}(\mathscr{G})$ vérifiant la condition* a') *de la remarque* 1°, *pour tout $U \in L_{\mathscr{D}}^\infty(T, \mu)$, la fonction m définie par*

$$m(\mathbf{x}) = \int U(t)\mathbf{x}(t)d\mu(t) \qquad \textit{pour } \mathbf{x} \in L_{\mathscr{A}}^1(T, \mu)$$

est une application linéaire et continue de $L_{\mathscr{A}}^1(T, \mu)$ dans F et $||m|| = N_\infty(U, \mu)$.

Corollaire. *Soit μ une mesure de Radon sur T. Si $\mathscr{A}$ vérifie l'axiome* (G), *F est de type dénombrable et dual d'un espace de Banach, et s'il existe une famille fondamentale $\mathscr{D} \subset \mathscr{C}(\mathscr{G})$ vérifiant l'axiome* (G) *et la condition* a') *de la remarque* 1°, *alors l'espace $\mathscr{L}(L_{\mathscr{A}}^1(T, \mu), F)$ des application linéaires et continues de $L_{\mathscr{A}}^1(T, \mu)$ dans F, est isomorphe et isométrique à l'espace $L_{\mathscr{D}}^\infty(T, \mu)$.*

2. *Cas des algèbres*

Soit A une algèbre de Banach, μ une mesure de Radon positive sur T et $\mathbf{y}$ une application localement μ-intégrable de T dans A. Pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{K}(T)$ posons

$$\bar{m}(\varphi) = \int \mathbf{y}(t)\varphi(t)d\mu(t); \tag{1}$$

$\bar{m}$ est une application linéaire de $\mathscr{K}$ dans A et continue sur $\mathscr{K}(T, K)$, quel que soit l'ensemble compact $K \subset T$. En effet, soit K un ensemble compact et $\varphi \in \mathscr{K}(T, K)$. Posons

$$M_K = \int |\mathbf{y}(t)| d\mu(t).$$

Alors

$$|\bar{m}(\varphi)| \leqq \int |\mathbf{y}(t)|\, |\varphi(t)| d\mu(t) \leqq M_K ||\varphi||.$$

Pour toute fonction $\mathbf{x} \in \mathscr{K}_A(T)$ posons

$$m(\mathbf{x}) = \int \mathbf{x}(t)\mathbf{y}(t)d\mu(t). \tag{2}$$

Proposition 2. *L'application* $\mathbf{x} \to m(\mathbf{x})$ *définie par l'égalité* (2) *est la seule application linéaire de* $\mathscr{K}_A$ *dans* A *qui satisfait aux deux conditions suivantes:*

(i) *pour tout élément* $a \in A$ *et toute fonction* $\varphi \in \mathscr{K}(T)$ *on a*

$$m(a\varphi) = a\bar{m}(\varphi);$$

(ii) *pour toute partie compacte* K *de* T, *la restriction de l'application* $\mathbf{x} \to m(\mathbf{x})$ *à* $\mathscr{K}_A(T, K)$ *est continue.*

Pour tout élément $a \in A$ *et toute fonction* $\mathbf{x} \in \mathscr{K}_A$ *on a alors*

$$m(a\mathbf{x}) = am(\mathbf{x}).$$

Démonstration. Il est évident que m est linéaire.

Soit $a \in A$ et $\varphi \in \mathscr{K}$. Alors ([2] chap. III, §4, no. 2, prop. 4)

$$m(a\varphi) = \int a\varphi(t)\mathbf{y}(t)d\mu(t) = \int V_a(\varphi(t)\mathbf{y}(t))d\mu(t)$$
$$= V_a\left(\int \varphi(t)\mathbf{y}(t)d\mu(t)\right) = a\int\varphi(t)\mathbf{y}(t)d\mu(t) = a\bar{m}(\varphi)$$

où V_a est l'opérateur de multiplication à gauche par a, dans A, ce qui établit (i).

Soit K une partie compacte de T et $\mathbf{x} \in \mathscr{K}_A(T, K)$. Alors

$$|m(\mathbf{x})| \leqq \int |\mathbf{x}(t)|\, |\mathbf{y}(t)| d\mu(t) \leqq M_K \|\mathbf{x}\|$$

ce qui établit (ii).

Soit m' une autre application linéaire de $\mathscr{K}_A$ dans A qui vérifie les conditions (i) et (ii). Désignons par $\mathscr{H}_A$ le sous-espace de $\mathscr{K}_A$, formé des combinaisons linéaires finies $\mathbf{x} = \sum_i a_i\varphi_i$ des fonctions de $\mathscr{K}$, à coefficients dans A. On a d'après (i)

$$m'(\mathbf{x}) = \sum_i m'(a_i\varphi_i) = \sum_i a_i\bar{m}(\varphi_i) = \sum_i m(a_i\varphi_i) = m(\mathbf{x})$$

donc m' et m coïncident sur $\mathscr{H}_A$. Comme toute fonction $\mathbf{x}$ de $\mathscr{K}_A$ à support contenu dans un ensemble compact K de T, peut être approchée uniformément par des fonctions de $\mathscr{H}_A$ à support dans un voisinage compact U de K ([4], chap. III, §2, lemme 2) et comme, d'après (ii), m et m' sont continues pour la topologie de la convergence uniforme sur $\mathscr{K}_A(T, U)$, m et m' coïncident sur $\mathscr{K}_A$ tout entier, ce qui montre l'unicité de m.

Enfin, si $a \in A$ et $\mathbf{x} \in \mathscr{K}_A(T)$, on a ([4] chap. III, §4, prop. 4):

$$m(a\mathbf{x}) = \int a\mathbf{x}(t)\mathbf{y}(t)d\mu(t) = \int V_a\mathbf{x}(t)\mathbf{y}(t)d\mu(t)$$
$$= V_a\int\mathbf{x}(t)\mathbf{y}(t)d\mu(t) = a\int\mathbf{x}(t)\mathbf{y}(t)d\mu(t) = am(\mathbf{x})$$

et ceci achève la démonstration.

REMARQUE. Pour toute fonction $\mathbf{x} \in \mathscr{K}_A$ posons

$$(2') \qquad m'(\mathbf{x}) = \int \mathbf{y}(t)\mathbf{x}(t)d\mu(t).$$

On démontre que *m' est la seule application linéaire de $\mathscr{K}_A(T)$ dans A qui vérifie* (ii) *et*
(j) *pour tout élément $a \in A$ et toute fonction $\varphi \in \mathscr{K}$ on a*

$$m'(a\varphi) = \tilde{m}(\varphi)a.$$

Alors pour tout $a \in A$ et $\mathbf{x} \in \mathscr{K}_A(T)$ on a aussi

$$m'(\mathbf{x}a) = m'(\mathbf{x})a.$$

Dans le cas où A est commutative, évidemment $m = m'$.

Supposons maintenant que A soit une algèbre à élément unité e, de type dénombrable, et dual d'un espace de Banach. Une telle algèbre existe, par exemple l'algèbre de groupe d'un groupe discret et dénombrable.

Puisque A a un élément unité on peut plonger isométriquement A dans l'espace $\mathscr{L}(A)$ des opérateurs linéaires et continues sur A, en identifiant un élément $a \in A$ avec l'opérateur U_a de multiplication à droite par a dans A.

Lorsqu'on prend, dans le théorème 3 les espaces $E(t)$ et F identiques à A on peut se demander dans quelles conditions la fonction U_m est une fonction à valeurs dans A.

THÉORÈME 4. *Soit μ une mesure de Radon positive sur T, A une algèbre de Banach a élément unité, de type dénombrable, et dual d'un espace de Banach, et m une application linéaire et continue de $L^1_A(T, \mu)$ dans A. Alors, la condition nécessaire et suffisante pour que m s'écrive sous la forme*

$$m(\mathbf{x}) = \int \mathbf{x}(t)\mathbf{y}_m(t)d\mu(t) \qquad \textit{pour } \mathbf{x} \in L^1_A(T, \mu)$$

où $\mathbf{y}_m \in L^\infty_A(T, \mu)$, est que m vérifie la condition suivante

$$(3) \qquad m(a\mathbf{x}) = am(\mathbf{x})$$

pour tout élément $a \in A$ et toute fonction $\mathbf{x} \in L^1_A(T, \mu)$. On a alors $||m|| = N_\infty(\mathbf{y}_m, \mu)$.

DÉMONSTRATION. La proposition 2 montre que la condition (3) est nécessaire, sans aucune hypothèse supplémentaire sur l'algèbre A. Montrons maintenant que la condition (3) est suffisante. D'après le théorème 3, m s'écrit sous la forme

$$m(\mathbf{x}) = \int U_m(t)\mathbf{x}(t)d\mu(t)$$

où U_m est une application de T dans $\mathscr{L}(A)$ déterminée localement

μ-presque partout telle que l'application $t \to U_m(t)a$ soit μ-mesurable pour tout $a \in A$, et $N_\infty(U_m, \mu) = ||m||$. Posons $\mathbf{y}_m(t) = U_m(t)e$. Alors $\mathbf{y}_m \in L^\infty_A(T, \mu)$ et $N_\infty(\mathbf{y}_m, \mu) = ||m||$. Pour toute fonction $\varphi \in L^1(T, \mu)$ posons

$$\bar{m}(\varphi) = m(\varphi e) = \int U_m(t)e\varphi(t)d\mu(t) = \int \mathbf{y}_m(t)\varphi(t)d\mu(t).$$

On vérifie aisément que m vérifie les conditions (i) et (ii) de la proposition 2. En effet, si $a \in A$ et $\varphi \in \mathscr{K}$ on a

$$m(a\varphi) = m(ae\varphi) = am(e\varphi) = a\bar{m}(\varphi);$$

d'autre part, l'application $t \to |U_m(t)|$ est μ-mesurable, donc pour tout $\mathbf{x} \in \mathscr{K}_A(T, K)$ on a

$$|m(\mathbf{x})| \leqq \int |U_m(t)|\, |\mathbf{x}(t)| d\mu(t) \leqq ||\mathbf{x}|| \int_K |U_m(t)| d\mu(t)$$

ce qui établit (ii). Il résulte alors de la proposition 2 que pour toute fonction $\mathbf{x} \in \mathscr{K}_A$ on a

$$m(\mathbf{x}) = \int \mathbf{x}(t)\mathbf{y}_m(t)d\mu(t) = \int U_{\mathbf{y}(t)}\mathbf{x}(t)d\mu(t)$$

et cette relation a lieu aussi pour tout $\mathbf{x} \in L^1_A(T, \mu)$.

Il en résulte que $U_m(t) = U_{\mathbf{y}(t)}$ localement μ-presque partout et ceci achève la démonstration.

Remarque. La condition nécessaire et suffisante pour que m s'écrive sous la forme

$$m(\mathbf{x}) = \int \mathbf{y}(t)\mathbf{x}(t)d\mu(t) \qquad \text{pour } \mathbf{x} \in L^1_A(T, \mu)$$

est que pour tout $a \in A$ et $\mathbf{x} \in L^1_A(T, \mu)$ l'on ait

$$m(\mathbf{x}a) = m(\mathbf{x})a.$$

§ 4. Opérations linéaires sur $\mathscr{K}_{\mathscr{A}}$

1. *Le cas général*

Soit m une application linéaire de $\mathscr{K}_{\mathscr{A}}$ dans un espace de Banach F.

On dit que m est majorée, s'il existe une mesure de Radon positive ν sur T, telle que pour tout $\mathbf{x} \in \mathscr{K}_{\mathscr{A}}$ l'on ait

$$|m(\mathbf{x})| \leqq \nu(|\mathbf{x}|).$$

Il en résulte que si m est majorée, pour toute partie compacte $K \subset T$, la restriction de m à l'espace $\mathscr{K}_{\mathscr{A}}(T, K)$ est continue.

Si $F = C$ et si m est continue sur l'espace $\mathscr{K}_{\mathscr{A}}(T, K)$, quel que soit l'ensemble compact $K \subset T$, alors m est *majorée* par la mesure $|m|$ définie par l'égalité (1) du §2.

Pour tout élément $z' \in F'$ considérons la forme linéaire définie sur $\mathscr{K}_{\mathscr{A}}$ par l'égalité

$$m_{z'}(\mathbf{x}) = \langle m(\mathbf{x}), z' \rangle \qquad \text{pour } \mathbf{x} \in \mathscr{K}_{\mathscr{A}}.$$

On a

$$|m_{z'}(\mathbf{x})| \leqq |z'|\,|m(\mathbf{x})| \leqq |z'|\nu(|\mathbf{x}|)$$

donc $m_{z'}$ est continue sur $\mathscr{K}_{\mathscr{A}}(T, K)$ quel que soit l'ensemble compact $K \subset T$. A chaque forme linéaire $m_{z'}$ on attache la mesure $\mu_{z'} = |m_{z'}|$ sur T et on a

$$|m_{z'}(\mathbf{x})| \leqq \mu_{z'}(|\mathbf{x}|)$$

pour tout champ de vecteurs $\mathbf{x} \in \mathscr{K}_{\mathscr{A}}$.

Pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{K}_+$ on a aussi

$$\begin{aligned}\mu_{z'}(\varphi) &= \sup\{|\langle m(\mathbf{x}), z'\rangle| \mid \mathbf{x} \in \mathscr{K}_{\mathscr{A}}, |\mathbf{x}| \leqq \varphi\}\\ &\leqq \sup\{|m(\mathbf{x})|\,|z'| \mid \mathbf{x} \in \mathscr{K}_{\mathscr{A}}, |\mathbf{x}| \leqq \varphi\}\\ &\leqq \sup\{\nu(|\mathbf{x}|)\,|z'| \mid \mathbf{x} \in \mathscr{K}_{\mathscr{A}}, |\mathbf{x}| \leqq \varphi\} = \nu(\varphi)|z'|\end{aligned}$$

donc

$$\sup_{|z'| \leqq 1} \mu_{z'}(\varphi) \leqq \nu(\varphi)$$

quelle que soit la mesure ν majorante de m.

Il en résulte que la famille de mesures $(\mu_{z'})_{|z'| \leqq 1}$ est majorée dans l'espace complètement réticulé $\mathscr{M}(T)$ des mesures de Radon sur T, donc elle a une borne supérieure μ.

Pour tout champ $\mathbf{x} \in \mathscr{K}_{\mathscr{A}}$ on a

$$(4)\quad |m(\mathbf{x})| = \sup_{|z'| \leqq 1} |\langle m(\mathbf{x}), z'\rangle| = \sup_{|z'| \leqq 1} |m_{z'}(\mathbf{x}) \leqq |\sup_{|z'| \leqq 1} \mu_{z'}(|\mathbf{x}|) \leqq \mu(|\mathbf{x}|)$$

donc μ est aussi une mesure majorante de m.

Il en résulte que μ est la plus petite mesure de Radon positive sur T majorante de m, et on a $||m|| \leqq ||\mu|| \leqq \infty$.

Si $F = C$, on a vu que $||m|| = ||\mu||$.

On va noter parfois par $|m|$ la plus petite mesure μ majorante de m.

Considérons maintenant l'espace $L^1_{\mathscr{A}}(T, \mu)$ des champs de vecteurs μ-sommables. D'après l'inégalité (4), m est continue sur $\mathscr{K}_{\mathscr{A}}$, pour la topologie de la convergence en moyenne, donc on peut prolonger m uniquement par continuité en une application linéaire et continue, notée toujours m de $L^1_{\mathscr{A}}(T, \mu)$ dans F, et pour tout $\mathbf{x} \in L^1_{\mathscr{A}}(T, \mu)$ on a

$$|m(\mathbf{x})| \leqq \int |\mathbf{x}(t)|\, d\mu(t).$$

Si l'on note par $||m||_1$ la norme de m sur $L^1_{\mathscr{A}}(T, \mu)$, on déduit que $||m||_1 \leqq 1$ et on verra plus bas qu'on a $||m||_1 = 1$.

Si $\mathscr{A}$ vérifie l'axiome (G) et F est de type dénombrable et dual d'un espace de Banach, on peut appliquer le théorème 3 et on obtient le

Théorème 5. *Si la famille fondamentale $\mathscr{A}$ vérifie l'axiome* (G) *et si F est de type dénombrable et dual d'un espace de Banach, pour toute application linéaire et majorée m de $\mathscr{K}_{\mathscr{A}}$ dans F, il existe une plus petite mesure de Radon μ sur T, majorante de m et un champ d'opérations $U_m \in \mathscr{C}(\mathscr{G})$ simplement μ-mesurable, déterminé localement μ-presque partout, tels que $||m|| \leqq ||\mu||$, $|U_m(t)| \equiv 1$ et*

$$m(\mathbf{x}) = \int U_m(t)\mathbf{x}(t)d\mu(t) \qquad \textit{pour } \mathbf{x} \in L^1_{\mathscr{A}}(T, \mu).$$

Démonstration. Il reste à prouver seulement que $|U_m(t)| \equiv 1$, car les autres affirmations résultent des considérations précédentes et du théorème 3, en prenant $\mu = |m|$. En particulier, comme d'après le théorème 3 on a $||m||_1 = N_\infty(U_m, \mu)$, il résultera que $||m||_1 = 1$. On sait que la fonction $t \to |U_m(t)|$ est μ-mesurable, donc localement μ-intégrable. On pose alors $d\nu(t) = |U_m(t)|d\mu(t)$ et puisque $|U_m(t)| \leqq ||m||_1 \leqq 1$, on déduit que $\nu \leqq \mu$. D'autre côté pour tout $\mathbf{x} \in \mathscr{K}_{\mathscr{A}}$ on a

$$|m(\mathbf{x})| \leqq \int|\mathbf{x}(t)|\,|U_m(t)|d\mu(t) = \int|\mathbf{x}(t)|d\nu(t)$$

donc ν est majorante pour m, et comme μ est la plus petite majorante de m, on déduit $\nu = \mu$, donc $|U_m(t)| = 1$ localement μ-presque partout, et si l'on modifie U_m sur un ensemble localement μ-négligeable, on peut obtenir $|U_m(t)| \equiv 1$, et ceci achève la démonstration.

Remarque. S'il existe une famille fondamentale $\mathscr{D} \subset \mathscr{C}(\mathscr{G})$ vérifiant les conditions a') et b') de la remarque 1° suivant le théorème 3, alors U_m est mesurable relativement à μ et $\mathscr{D}$, donc $U_m \in L^\infty_{\mathscr{D}}(T, \mu)$. Si la famille fondamentale $\mathscr{D}$ vérifie les axiomes (T) et (G), alors U_m est mesurable pour $|m|$ et $\mathscr{D}$ quel que soit m.

On a aussi le théorème réciproque suivant:

Théorème 5'. *Si la famille $\mathscr{A}$ vérifie l'axiome* (G) *et F est de type dénombrable et dual d'un espace de Banach, pour tout couple* (μ, U) *formé d'une mesure de Radon positive μ sur T et d'un champ d'opérations $U \in \mathscr{C}(\mathscr{G})$ simplement μ-mesurable tel que $|U_m(t)| \equiv 1$, la fonction m définie sur $L^1_{\mathscr{A}}(T, \mu)$ par l'égalité*

$$m(\mathbf{x}) = \int U(t)\mathbf{x}(t)d\mu(t) \qquad \textit{pour } \mathbf{x} \in L^1_{\mathscr{A}}(T, \mu)$$

est une application linéaire et continue sur $L^1_{\mathscr{A}}(T, \mu)$, dont la restriction a l'espace $\mathscr{K}_{\mathscr{A}}$ est majorée et $|m| = \mu$.

Démonstration. Il reste à montrer que $|m| = \mu$, car les autres affirmations sont évidentes. Tout d'abord on a $|m(\mathbf{x})| \leqq \mu(|\mathbf{x}|)$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathscr{K}_{\mathscr{A}}$, donc m est majorée par μ. Alors $|m| \leqq \mu$, donc $|m|$ s'écrit $d|m|(t) = \alpha(t)d\mu(t)$, où α est une fonction numérique μ-mesurable sur T, telle que $0 \leqq \alpha(t) \leqq 1$. D'après le théorème 5, m s'écrit

$$m(\mathbf{x}) = \int U_m(t)\mathbf{x}(t)d|m|(t) \qquad \text{pour } \mathbf{x} \in L^1_{\mathscr{A}}(T, \mu) \subset L^1_{\mathscr{A}}(T, |m|)$$

où $U_m \in \mathscr{C}(\mathscr{G})$ est telle que $|U_m(t)| \equiv 1$. On a alors

$$m(\mathbf{x}) = \int U_m(t)\mathbf{x}(t)\alpha(t)d\mu(t) \qquad \text{pour } \mathbf{x} \in L^1_{\mathscr{A}}(T, \mu)$$

donc, d'après le théorème 4, $U_m(t) = \alpha(t)U(t)$ localement μ-presque partout, d'où on déduit que $\alpha(t) = 1$ localement μ-presque partout, c'est-à-dire $|m| = \mu$. Ceci achève la démonstration.

Des théorèmes 5 et 5′ on obtient le

Corollaire. *Si la famille $\mathscr{A}$ vérifie l'axiome* (G) *et F est de type dénombrable et dual d'un espace de Banach, la correspondance $m \to (|m|, U_m)$ établie par le théorème 5 est une application biunivoque de l'ensemble $\mathscr{M}_{\mathscr{A}, F}(T)$ des applications majorées de $\mathscr{K}_{\mathscr{A}}$ dans F, sur l'ensemble $\mathfrak{M}(\mathscr{G}, T)$ des couples (μ, U) formés d'une mesure de Radon positive μ sur T et d'un champ d'opérations $U \in \mathscr{C}(\mathscr{G})$, simplement μ-mesurable tel que $|U_m(t)| \equiv 1$.*

Deux couples (μ, U_1) et (μ, U_2) seront considérés identiques si $U_1 = U_2$ localement μ-presque partout.

Remarques. 1°. Supposons que tous les espaces $E(t)$ sont identiques à un espace de Banach E de type dénombrable, et supposons T *compact.* On peut plonger E isométriquement dans $\mathscr{C}_E(T)$, en identifiant un élément $a \in E$ avec la fonction constante $\mathbf{x}(t) \equiv a$. Considérons la restriction M de m à E. Alors $M \in \mathscr{L}(E, F)$. Pour tout $a \in E$ on a

$$M(a) = \int U_m(t)ad\mu(t).$$

On dit que U_m est simplement μ-intégrable et que M est l'intégrale simple de U_m par rapport à μ. Si U_m est μ-mesurable pour la topologie d'espace normé de $\mathscr{L}(E, F)$ (en particulier si $\mathscr{L}(E, F)$ est de type dénombrable), alors U_m est μ-intégrale et M est l'intégrale de U_m par rapport à μ. En effet, on a alors

$$\int U_m(t)ad\mu(t) = \Big(\int U_m(t)d\mu(t)\Big)(a)$$

donc

$$M = \int U_m(t) d\mu(t).$$

2°. Si $E(t) = C$ quel que soit $t \in T$, l'espace $\mathscr{L}(C, F)$ est isomorphe et isométrique à F et U_m et une application $\mathbf{g}_m$ μ-mesurable de T dans F. Alors pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{K}_C$ on a

$$m(\varphi) = \int \varphi(t) \mathbf{g}_m(t) d\mu(t).$$

3°. Supposons que tous les espaces $E(t)$ sont identiques à F, où F est un espace de Banach *quelconque*. On peut plonger isométriquement l'espace C des nombres complexes dans l'espace $\mathscr{L}(F)$ des opérateurs linéaires et continus sur F.

Soient ν une mesure de Radon (réelle ou complexe) et μ son module. On a, pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{K}_+$,

$$\mu(\varphi) = \sup \{|\nu(\psi)| \mid \psi \in \mathscr{K}_C, |\psi| \leqq \varphi\}.$$

Soit m l'extension de ν aux fonctions de $\mathscr{K}_F$, définie par

$$m(\mathbf{x}) = \int \mathbf{x}(t) d\nu(t) \qquad \text{pour } \mathbf{x} \in \mathscr{K}_F.$$

On a donc pour toute fonction $\mathbf{x} \in \mathscr{K}_F$

$$|m(\mathbf{x})| \leqq \mu(|\mathbf{x}|)$$

donc m est majorée par μ. D'autre part,

$$\sup \{|\nu(\psi)| \mid \psi \in \mathscr{K}_C, |\psi| \leqq \varphi\} \leqq \sup \{|m(\mathbf{x})| \mid \mathbf{x} \in \mathscr{K}_F, |\mathbf{x}| \leqq \varphi\}$$

d'où il s'ensuit que μ est la plus petite majorante de m et

$$\mu(\varphi) = \sup \{|m(\mathbf{x})| \mid \mathbf{x} \in \mathscr{K}_F, |\mathbf{x}| \leqq \varphi\} \qquad \text{pour } \varphi \in \mathscr{K}_+.$$

On sait (§2 remarque 3) que $d\nu(t) = \alpha(t) d\mu(t)$, où α est μ-mesurable et $|\alpha(t)| \equiv 1$, donc

$$m(\mathbf{x}) = \int \mathbf{x}(t) \alpha(t) d\mu(t) \qquad \text{pour } \mathbf{x} \in \mathscr{K}_F.$$

Inversement, soient m une application linéaire majorée de $\mathscr{K}_F$ dans F, μ la plus petite mesure majorante de m, et supposons que m s'écrit sous la forme

$$m(\mathbf{x}) = \int \mathbf{x}(t) \alpha(t) d\mu(t) \qquad \text{pour } \mathbf{x} \in \mathscr{K}_F,$$

où α est une application de T dans C, telle que $N_\infty(\alpha, \mu) \leqq 1$. Alors m est une mesure de base μ et $|\alpha(t)| \equiv 1$. En effet, on déduit que α est μ-mesurable et étant essentiellement bornée, α est localement μ-intégrable; posons $d\nu(t) = \alpha(t) d\mu(t)$. On a d'abord $d|\nu| = |\alpha| d\mu$, donc $|\nu| \leqq \mu$. D'autre côté, pour toute fonction

$\mathbf{x} \in \mathscr{K}_F$ on a

$$|m(\mathbf{x})| = \left| \int \mathbf{x}(t)\alpha(t)\, d\mu(t) \right| \leqq \int |\mathbf{x}(t)|\, |\alpha(t)| d\mu(t) = \int |\mathbf{x}(t)| d|\nu|(t),$$

donc m est majorée par $|\nu|$ et comme μ est la plus petite majorante de m, on déduit $\mu \leqq |\nu|$; il s'ensuit que $|\nu| = \mu$, donc $|\alpha(t)| = 1$ localement μ-presque partout sur le support de μ, donc partout si l'on modifie α sur un ensemble localement μ-négligeable.

2. *Cas des algèbres*

Supposons que tous les espaces $E(t)$ et F sont identiques à une algèbre de Banach A, à élément unité, de type dénombrable et dual d'un espace de Banach. En utilisant les théorèmes 4 et 5 on obtient le

THÉORÈME 6. *Soit A une algèbre de Banach, a élément unité, de type dénombrable et dual d'un espace de Banach, et soit m une application linéaire et majorée de $\mathscr{K}_A$ dans A. Pour que m s'écrive sous la forme*

$$m(\mathbf{x}) = \int \mathbf{x}(t)\mathbf{y}(t) d\mu(t) \qquad \textit{pour } \mathbf{x} \in \mathscr{K}_A,$$

où $\mu = |m|$ et $\mathbf{y} \in L^\infty_A(T, \mu)$, il faut et il suffit que

$$m(a\mathbf{x}) = am(\mathbf{x}) \qquad \textit{pour } a \in A \textit{ et } \mathbf{x} \in \mathscr{K}_A(T).$$

On a alors $|\mathbf{y}(t)| \equiv 1$.

REMARQUE. Pour que m s'écrive sous la forme

$$m(\mathbf{x}) = \int \mathbf{y}(t)\mathbf{x}(t) d\mu(t) \qquad \text{pour } \mathbf{x} \in \mathscr{K}_A$$

il faut et il suffit que

$$m(\mathbf{x}a) = m(\mathbf{x})a \qquad \text{pour } a \in A \text{ et } \mathbf{x} \in \mathscr{K}_A.$$

Université de Bucarest.

BIBLIOGRAPHIE

S. BOCHNER and A. E. TAYLOR

[1] *Linear functionals on certain spaces of abstractly-valued functions,* Annals of Math., 39 (1938) pp. 913—944.

N. BOURBAKI

[2] *Intégration,* livre VI, chap. I—IV, Paris, 1952, Chap. V, 1956.

J. DIEUDONNÉ

[3] *Sur le théorème des Lebesgue-Nikodym* (III), Annales Univ. Grénoble, 23 (1947—48), pp. 25—53.

[4] *Sur le théorème de Lebesgue-Nikodym* (IV), J. Indian Math. Soc. 15 (1951), pp. 77—86 (cité d'après Math. Rev.).

[5] *Sur le théorème de Lebesgue-Nikodym* (V), Canadian J. Math. 3 (1951) pp. 129—140.

N. Dinculeanu

[6] *Espaces d'Orlicz de champs de vecteurs I*, Rendiconti Accad. Naz. Lincei, 12 (1957) pp. 135—139

[7] *Sur la représentation intégrale des certaines opérations linéaires*, C. R. Acad. Sci. Paris, 245 (1957) pp. 1203—1205.

N. Dunford and B. J. Pettis

[8] *Linear operations on summable functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 47 (1940) pp. 323—392.

I. Gelfand

[9] *Abstrakte Funktionen und lineare Operatoren*, Math. Sbornik, 4 (46) (1938) pp. 68—124.

R. Godement

[10] *Sur la théorie des représentations unitaires*, Annals of Math. 53 (1951) pp. 68—124.

C. T. Ionescu Tulcea

[11] *Deux théorèmes concernant certains espaces de champs de vecteurs*, Bull. Sc. Math. 79 (1955) pp. 106—111.

R. S. Phillips

[12] *On linear transformations*, Trans. Amer. Math. Soc. 48 (1940) pp. 516—541.

(Oblatum 6-3-58).