COMPOSITIO MATHEMATICA

TOKUI SATO

Sur le problème de Dirichlet généralisé pour l'équation $Deltau = f(P, u, \partial u)$

Compositio Mathematica, tome 14 (1959-1960), p. 237-259
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1959-1960__14__237_0>

Sur le problème de Dirichlet généralisé pour l'équation $\Delta u = f(P, u, \partial u)$

par

Tokui Satō

1. Introduction.[1]

Le but du présent article est d'étendre au problème de Dirichlet généralisé pour l'équation [2]

$$(1) \qquad \Delta u = f(P, u, \partial u),$$

les résultats que nous avons obtenus concernant le problème de Dirichlet pour l'équation $\Delta z = f(x, y, z, p, q)$ et qui ont été publiés dans des articles antérieurs [2] et [3].

Les notions de capacité et de potentiel conducteur joueront un grand rôle; pour cela voir, par exemple, [1], [4], [5] et [6].

D'abord nous donnons quelques remarques qui seront utiles dans la suite.

Soit P un point des coordinés (x, y, z). Pour simplifier l'exposition nous conviendrons d'écrire $u(P)$ au lieu de $u(x, y, z)$ et de même de désigner par $\partial_x u(P_0)$, $\partial_y \partial_y u(P_0)$ etc. les valeurs $\partial_x u(x, y, z)$, $\partial_y \partial_y u(x, y, z)$ etc. en un point $P_0(x_0, y_0, z_0)$.

Nous dirons que $u(P)$ est une fonction régulière dans un domaine D, si $u(P)$ est continue dans D, ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre $\partial_x u(P)$, $\partial_y u(P)$, $\partial_z u(P)$.

Soit $u(P)$ une fonction continue dans un voisinage d'un point P.

Posons

$$\underline{\Delta} u(P) = \varliminf_{r\to 0} \frac{3}{2\pi r^2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \{u(x+r\sin\theta\cos\varphi,\ y+r\sin\theta\sin\varphi,\ z+r\cos\theta)-u(x, y, z)\}\sin\theta\, d\theta,$$

$$\bar{\Delta} u(P) = \varlimsup_{r\to 0} \frac{3}{2\pi r^2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \{u(x+r\sin\theta\cos\varphi,\ y+r\sin\theta\sin\varphi,\ z+r\cos\theta)-u(x, y, z)\}\sin\theta\, d\theta,$$

[1]) Les numéros entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin de cet article.

[2]) Nous écrivons simplement $f(P, u, \partial u)$ au lieu de $f(P, u, \partial_x u, \partial_y u, \partial_z u)$.

$$\Delta u(P) = \lim_{r\to 0} \frac{3}{2\pi r^2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \{u(x+r\sin\theta\cos\varphi,\ y+r\sin\theta\sin\varphi,\ z+r\cos\theta)-u(x,y,z)\}\sin\theta\, d\theta.$$

L'opérateur Δ jouit des propriétés suivantes:

i) Si $u(P)$ est régulière dans un voisinage d'un point P et admet les dérivées partielles continues $\partial_x\partial_x u(P)$, $\partial_y\partial_y u(P)$ et $\partial_z\partial_z u(P)$, on a

$$\Delta u(P) = \partial_x\partial_x u(P)+\partial_y\partial_y u(P)+\partial_z\partial_z u(P).$$

ii) Si $u(P)$ est une fonction continue dans un domaine borné D, et qu'il existe l'intégrale $\int_D u(Q)d\omega_Q$, on a

$$\Delta w(P) = -4\pi u(P)$$

où

$$w(P) = \int_D \frac{u(Q)}{\overline{PQ}} d\omega_Q \qquad P \in D,$$

$\overline{PQ}$ désignant la distance du point Q au point P, et $d\omega_Q$ l'élément de volume au point Q.

iii) Si $u(P)$ et $v(P)$ sont deux fonctions régulières dans un voisinage d'un point P, et qu'il existe $\Delta u(P)$ et $\Delta v(P)$ (finies), on a

$$\Delta(u(P)v(P)) = v(P)\Delta u(P)+u(P)\Delta v(P)+2[\partial_x u(P)\partial_x v(P) + \partial_y u(P)\partial_y v(P)+\partial_z u(P)\partial_z v(P)].$$

Dans la suite nous désignons par D un domaine borné et par S la frontière de D, et par S^r l'ensemble des points réguliers et par S^i celui des points irréguliers au sens du problème de Dirichlet pour l'équation $\partial_x\partial_x u+\partial_y\partial_y u+\partial_z\partial_z u = 0$.

Par définition on a

$$S = S^r \cup S^i, \quad S^r \cap S^i = \phi.$$

Soit S une surface fermée; désignons par (S) *l'intérieur de la surface S et par $[S]$ le domaine fermé $(S) \cup S$.*

On peut étendre aisément les résultats des articles [2] et [3] au cas de l'espace ordinaire, mais nous nous contentons d'énoncer, sans démonstration, des propriétés qui seront utilisées dans les numéros suivants.

Lemme 1°. „Supposons qu'une suite $\{u_n(P)\}$ de fonctions continues converge uniformément dans (S_ρ) vers une fonction continue $u(P)$, où S_ρ est la sphère de centre P_0 et de rayon ρ.

Si les suites $\{\underline{\Delta} u_n(P)\}$ et $\{\bar{\Delta} u_n(P)\}$ convergent uniformément dans (S_ρ) vers une fonction continue $\tilde{u}(P)$, on a

$$\Delta u(P) = \tilde{u}(P) \qquad P \in (S_\rho).\text{''}$$

Lemme 2°. „Soient $\omega(P)$ une fonction régulière dans D et $f(P, u, p_1, p_2, p_3)$ une fonction définie dans $D \times E$, où E est un ensemble de points dans l'espace des variables u, p_1, p_2, p_3.

Supposons que l'inégalité

$$\underline{\Delta}\omega(P) < f(P, u, \partial\omega(P))$$

subsiste pour $P \in D$, $\omega(P) \lessdot u$, $(u, \partial_x\omega(P), \partial_y\omega(P), \partial_z\omega(P)) \in E$, et que l'équation (1) admette une solution $u = u(P)$ régulière dans D.

Si l'on a l'inégalité sur S

$$\varliminf_{P \to P_0} (\omega(P) - u(P)) \geqq 0 \qquad P \in D, \tag{2}$$

on a l'inégalité

$$\omega(P) \geqq u(P) \qquad P \in D.\text{''} \tag{3}$$

Lemme 3°. „Soit $f(P, u)$ une fonction définie dans $P \in D$, $-\infty < u < +\infty$ et non décroissante par rapport à u.

Supposons que l'inégalité

$$\underline{\Delta}\omega(P) \leqq f(P, \omega(P)) \qquad P \in D \tag{4}$$

subsiste et que l'équation (1) admette une solution $u = u(P)$ régulière dans D.

Si l'on a l'inégalité (2) sur S, on a l'inégalité (3)."

Dans toute la suite, sauf mention expresse du contraire, $f(P, u, p_1, p_2, p_3)$ *désignera une fonction définie dans le domaine* $\mathscr{D} : P \in D$, $-\infty < u, p_1, p_2, p_3 < +\infty$. Nous écrivons simplement $f(P, u, p)$ au lieu de $f(P, u, p_1, p_2, p_3)$.

Lemme 4°. „Soient $S^i = \phi$ et $F(P, u, p)$ une fonction définie dans $\mathscr{D}$. Supposons que $f(P, u, p)$ et $F(P, u, p)$ satisfassent aux inégalités

$$f(P, u, p) \begin{cases} \leqq 0 & u \leqq 0, \\ \geqq 0 & u \geqq 0, \end{cases}$$

$$|F(P, u, p)| \leqq M \qquad (M : \text{const.}).$$

Si l'équation

$$\Delta u = f(P, u, p) + F(P, u, p) \tag{5}$$

admet une solution $u = u(P)$ qui est régulière dans D et s'annule sur S, on a l'inégalité

$$|u(P)| \leqq M\, \psi(P) \qquad P \in \bar{D},$$

où $u = \psi(P)$ est la solution de l'équation

$$\Delta u = -1 \tag{6}$$

qui est régulière dans D et s'annule sur S."

LEMME 5°. „Si l'on a l'inégalité

$$f(P, u, p) < f(P, \bar{u}, p) \qquad u < \bar{u},$$

l'équation (1) admet au plus une solution régulière dans D et qui prend des valeurs données sur S."

LEMME 6°. „Soit $f(P, u, p, \lambda)$ une fonction continue dans $P \in D$, $|u| \leqq \Gamma$, $-\infty < p_1, p_2, p_3 < +\infty$, $\lambda \in \Lambda$(Λ étant un intervalle de la variable λ) satisfisant aux conditions:

i) $f(P, u, p, \lambda)$ est également continue dans Λ pour $P \in D$, $|u| \leqq \Gamma$, $-\infty < p_1, p_2, p_3 < +\infty$,

ii) on peut faire correspondre à un nombre positif quelconque assez petit ε un nombre positif δ de manière que

$$\delta \leqq f(P, \bar{u}, p, \lambda)-f(P, u, p, \lambda)$$

pour $P \in D$, $\varepsilon \leqq \bar{u}-u$, $-\infty < p_1, p_2, p_3 < +\infty$, $\lambda \in \Lambda$.

Si l'équation

$$\Delta u = f(P, u, \partial u, \lambda)$$

admet pour chaque $\lambda(\in \Lambda)$ une solution

$$u = u(P, \lambda)$$

qui est régulière dans D et qui prend des valeurs données (indépendantes de λ), $u(P, \lambda)$ est continue dans $D \times \Lambda$."

LEMME 7°. [3]) „Soient D un domaine appartenant à la classe B_h et $f(P)$ une fonction bornée et continue dans $D(|f(P)| \leqq M)$.

Posons

$$u(P) = -\frac{1}{4\pi}\int_D G(P; Q)f(Q)d\omega_Q,$$

où $G(P; Q)$ est la fonction de Green relative au domaine D, et $d\omega_Q$ est l'élément de volume au point Q.

Soit D_0 un domaine tel que $\bar{D}_0 \subset D$. On peut faire correspondre à un nombre quelconque $\varepsilon(>0)$ donné à l'avance un nombre $\delta(>0)$ de manière que

$$|u(P_1)-u(P_2)|, \quad |\partial u(P_1)-\partial u(P_2)| < \varepsilon$$

pour $P_1, P_2 \in D$, $\overline{P_1 P_2} < \delta$, où δ est une constante ne dépendante que de ε, M et D_0.

On a de même l'inégalité

$$|u(P)|, \ |\partial u(P)| \leqq \Gamma \qquad P \in D_0,$$

où Γ est une constante ne dépendante que de M et D_0."

[1]) T. Satō, Pri la ekvacio $\Delta u = f(P, u, \partial u)$, La funkcialaj ekvacioj, **10** (1957), (en japonais).

LEMME 8°. „Soit D un domaine appartenant à la classe B_h. Si $f(P, u, p)$ est une fonction bornée et continue dans $P \in \bar{D}$, $-\infty < u, p_1, p_2, p_3 < +\infty$, l'équation

$$u(P) = -\frac{1}{4\pi}\int_D G(P\,;\,Q) f(Q, u(Q), \partial u(Q)) d\omega_Q$$

admet une solution régulière dans D et s'annulant sur S."

2. L'équation $\Delta u = f(P, u, \partial u)$.

Dans toute la suite, sauf mention expresse du contraire E et E^0 *désigneront ensembles fermés de capacité nulle tels que* $E \subset S$, $E^0 \subset D$.

THÉORÈME 1. *Soit* $\omega(P)$ *une fonction bornée et régulière dans* D. *Supposons que l'équation (1) admette une solution* $u = u(P)$ *bornée et régulière dans* D $(|\omega(P)|, |u(P)| \leqq \Gamma)$.

Soit $\{\Sigma_n\}$ *une suite de surfaces appartenant à la classe* B_h *telle que*

$$(\Sigma_1) \supset (\Sigma_2) \supset \ldots \supset (\Sigma_n) \supset \ldots,$$
$$[\Sigma_n] \to E \cup E^0.$$

Désignons par $\chi_n(P)$ *le potentiel conducteur de* $[\Sigma_n]$.

Si l'on a les inégalités

$$\underline{\nabla}\omega(P) < f(P, u, \partial\omega(P) + 2\Gamma\partial\chi_n(P)) \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{7}$$

pour $P \in D - [\Sigma_n]$, $\omega(P) + 2\Gamma\chi_n(P) < u$, *et l'inégalité* (2) *sur* $S - E$, *on a l'inégalité* (3).

En effet, par la définition de la capacité la suite des potentiels conducteurs $\chi_n(P)$ de $[\Sigma_n]$ tend uniformément dans D vers le potentiel conducteur $\chi(P) \equiv 0$ de $E \cup E^0$.

Posons

$$D_n = D - [\Sigma_n] \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

en vertu de (2), on a l'inégalité sur $S - (\Sigma_n) \cup (D \cap \Sigma_n)$

$$\varliminf_{P \to P_0} (\omega(P) + 2\Gamma\chi_n(P) - u(P)) \geqq 0 \qquad P \in D_n.$$

D'après le lemme 2°, l'inégalité (7) entraîne

$$\omega(P) + 2\Gamma\chi_n(P) \geqq u(P) \qquad P \in D_n.$$

Par le passage à la limite $n \to \infty$ on a

$$\omega(P) \geqq u(P) \qquad P \in D - E^0,$$

E^0 étant un ensemble fermé de capacité nulle, on obtient l'inégalité (3), C.Q.F.D.

LEMME 1. *L'équation* (6) *admet une et une seule solution* $u = \psi(P)$

régulière dans D et s'annulant sur S^r. Cette solution est bornée et non négative dans D.

L'équation (6) admet une solution

$$u = -\overline{PP_0^2}/6$$

dans D, où P_0 est un point quelconque mais déterminé. Il existe une fonction $h(P)$ harmonique dans D et prenant des valeurs $\overline{PP_0^2}/6$ sur S^r. Posons

$$\psi(P) = h(P) - \overline{PP_0^2}/6,$$

alors $u = \psi(P)$ est une solution de l'équation (6) bornée et régulière dans D et s'annulant sur S^r.

Soient $u = u_1(P)$ et $u = u_2(P)$ deux telles solutions de l'équation (6). Alors $u(P) = u_1(P) - u_2(P)$ sera la fonction harmonique dans D et s'annulant sur S^r. On obtient donc $u(P) \equiv 0$.

Par la méthode de „sequential solution" de M. N. Wiener, on a l'inégalité

$$h(P) \geqq \overline{PP_0^2}/6 \qquad P \in D,$$

ce qui montre

$$\psi(P) \geqq 0 \qquad P \in D, \quad \text{C.Q.F.D.}$$

THÉORÈME 2. *Supposons que les fonctions $f(P, u, p)$, $F(P, u, p)$ soient définies dans $\mathscr{D}$ et satisfassent aux inégalités*

$$f(P, u, p) \begin{cases} \leqq 0 & u \leqq 0, \\ \geqq 0 & u \geqq 0, \end{cases}$$

$$|F(P, u, p)| \leqq M \qquad (M : \text{const.})$$

dans $P \in D - E^0$, $-\infty < u, p_1, p_2, p_3 < +\infty$, et que l'ensemble S^i soit fermé.

Si l'équation (5) admet une solution $u = u(P)$ qui est bornée et régulière dans D et s'annule sur $S - (S^i \cup E)$, on a l'inégalité

$$|u(P)| \leqq M\psi(P) \qquad P \in D, \tag{8}$$

où $u = \psi(P)$ est la solution de l'équation (6) régulière dans D et s'annulant sur S^r.

Posons

$$v(P) = u(P) - M'\psi(P),$$

où M' est une constante quelconque plus grande que M. $v(P)$ est alors une solution de l'équation

$$\begin{aligned} \Delta v = f(P, v + M'\psi(P), \partial v + M'\partial\psi(P)) \\ + F(P, v + M'\psi(P), \partial v + M'\partial\psi(P)) + M' \end{aligned}$$

qui est bornée ($|v(P)| \leqq \Gamma$) et régulière dans D et s'annule sur $S - (S^i \cup E)$.

$S^i \cup E \cup E^0$ étant borné et fermé, on peut prendre une suite $\{\Sigma_n\}$ de surfaces appartenant à la classe B_h telle que

$$(\Sigma_1) \supset (\Sigma_2) \supset \ldots \supset (\Sigma_n) \supset \ldots ,$$
$$[\Sigma_n] \to S^i \cup E \cup E^0.$$

Désignons par $\chi_n(P)(n = 1, 2, \ldots)$ les potentiels conducteurs de $[\Sigma_n]$.

Par hypothèse on a

$$0 < f(P, v+M'\psi(P), \Gamma\partial\chi_n(P)+M'\partial\psi(P)) \\ +F(P, v+M'\psi(P), \Gamma\partial\chi_n(P)+M'\partial\psi(P))+M'$$

pour $P \in D-[\Sigma_n]$, $\Gamma\chi_n(P) < v$. D'après le théorème 1 on a

$$u(P) \leqq M'\psi(P) \qquad P \in D.$$

De même on a

$$-M'\psi(P) \leqq u(P) \qquad P \in D.$$

On a donc

$$|u(P)| \leqq M'\psi(P) \qquad P \in D.$$

M' pouvant être supposé aussi voisin de M que l'on veut, on obtient l'inégalité (8), C.Q.F.D.

Dans la suite $\lambda(t|a, b)$ *désigne la fonction suivante*

$$\lambda(t|a, b) = \begin{cases} a & t < a, \\ t & a \leqq t \leqq b, \\ b & b < t. \end{cases}$$

Soient $\underset{\sim}{\omega}(P)$ et $\tilde{\omega}(P)$ des fonctions bornées et régulières dans D. Supposons de plus qu'on a les inégalités sur S

$$\varlimsup_{P\to P_0} \underset{\sim}{\omega}(P) \leqq 0 \leqq \varliminf_{P\to P_0} \tilde{\omega}(P) \qquad P \in D,$$

et dans D

$$\underline{\Delta}\tilde{\omega}(P) < 0 < \bar{\Delta}\underset{\sim}{\omega}(P).$$

D'après le lemme 2°, on a les inégalités

$$\underset{\sim}{\omega}(P) \leqq 0 \leqq \tilde{\omega}(P) \qquad P \in D.$$

Soient D_1 et D_2 un ensemble de l'espace à m dimensions et celui à n dimensions repectivement, et soit $f(P; Q)$ une fonction définie dans $D_1 \times D_2$. Soit D_0 un ensemble borné, fermé quelconque contenu dans D_2. Si $f(P; Q)$ est bornée dans $D_1 \times D_0$, nous dirons que $f(P; Q)$ *est bornée au sens généralisé* [1]) *par rapport à* Q dans $D_1 \times D_2$.

THÉORÈME 3. *Soit $f(P, u, p)$ une fonction continue et bornée au*

[1]) Voir [3].

sens généralisé par rapport à u dans $P \in D$, $\underset{\sim}{\omega}(P) \leqq u \leqq \tilde{\omega}(P)$, $-\infty < p_1, p_2, p_3 < +\infty$.

Si l'on a les inégalités

$$(9) \qquad \begin{aligned} \bar{\Delta}\underset{\sim}{\omega}(P) &\geqq f(P, \underset{\sim}{\omega}(P), \partial\underset{\sim}{\omega}(P)), \\ \underline{\Delta}\tilde{\omega}(P) &\leqq f(P, \tilde{\omega}(P), \partial\tilde{\omega}(P)) \end{aligned} \qquad P \in D,$$

l'équation (1) *admet une solution borneé et régulière dans* D *et s'annulant sur* S^r. *Désignons-la par* $u = u(P)$, *on a les inégalités*

$$(10) \qquad \underset{\sim}{\omega}(P) \leqq u(P) \leqq \tilde{\omega}(P) \qquad P \in D.$$

Posons

$$g(P, u, p) = f(P, \lambda(u|\underset{\sim}{\omega}(P), \tilde{\omega}(P)), p).$$

Par hypothèse $g(P, u, P)$ est bornée ($|g(P, u, p)| < M$) et continue dans $\mathscr{D}$. En vertu de (9) on a les inégalités

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}\underset{\sim}{\omega}(P) &> \lambda g(P, \underset{\sim}{\omega}(P), \partial\underset{\sim}{\omega}(P)), \\ \bar{\Delta}\tilde{\omega}(P) &< \lambda g(P, \tilde{\omega}(P), \partial\tilde{\omega}(P)) \end{aligned}$$

pour $0 < \lambda < 1$.

Soit $\{D_n\}$ une suite de domaines appartenant à la classe B_h telle que

$$D_1 \subset D_2 \subset \ldots \subset D_n \subset \ldots, D_n \to D.$$

D'après le lemme 8° l'équation

$$u(P) = -\frac{\lambda}{4\pi}\int_{D_n} G_n(P; Q)g(Q, u(Q), \partial u(Q))d\omega_Q$$

admet une solution

$$u = u_n(P, \lambda)$$

régulière dans D_n et s'annulant sur la frontière S_n de D_n, où $G_n(P; Q)$ est la fonction de Green relative au domaine D_n.

D'après la propriété ii) de l'opérateur Δ, $u = u_n(P, \lambda)$ est une solution de l'équation

$$\Delta u = \lambda g(P, u, \partial u).$$

D'après le lemme 2° on a les inégalités

$$(11) \qquad \underset{\sim}{\omega}(P) \leqq u_n(P, \lambda) \leqq \tilde{\omega}(P) \qquad P \in \bar{D}_n.$$

Prenons une suite $\{\lambda_n\}$ telle que $\lambda_n \uparrow 1 (0 < \lambda_1)$, et posons

$$u_n(P) = u_n(P, \lambda_n) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

et

$$u_n(P) \equiv 0 \qquad P \in D - \bar{D}_n,$$

alors $u_n(P)$ est une fonction continue dans D. Soit D_0 un domaine quelconque tel que $\bar{D}_0 \subset D$. Par hypothèse il existe un entier N tel que

$$\bar{D}_0 \subset D_n \qquad n \geqq N.$$

D'après le lemme 7° les suites $\{u_n(P)\}$, $\{\partial u_n(P)\}$ sont normales dans D_0. On peut supposer que

$$\lim_{n\to\infty} u_n(P) = u(P), \quad \lim_{n\to\infty} \partial u_n(P) = \partial u(P)$$

uniformément dans D_0, en prenant, s'il est nécessaire, une suite partielle. En vertu de (11) on a

$$\underset{\sim}{\omega}(P) \leqq u(P) \leqq \tilde{\omega}(P) \qquad P \in D_0.$$

Par définition on a

$$\Delta u_n(P) = \lambda_n f(P, u_n(P), \partial u_n(P)) \qquad P \in D_0$$

pour $n \geqq N$. D'après le lemme 1° on obtient

$$\Delta u(P) = f(P, u(P), \partial u(P)) \qquad P \in D_0.$$

D_0 étant arbitraire, $u = u(P)$ est une solution de l'équation (1) régulière dans D.

Soit P_0 un point arbitraire de S^r. D'après le lemme 1 il existe une fonction $\omega(P)$ satisfaisant aux conditions suivantes:

i) $\omega(P)$ est non négative et régulière dans D,

ii) $\lim_{P\to P_0} \omega(P) = 0 \qquad P \in D$,

iii) $\Delta\omega(P) = -M$.

D'après le lemme 2°, on a les inégalités

$$-\omega(P) \leqq u_n(P) \leqq \omega(P)$$

dans $\bar{D}_n$. $u_n(P) \equiv 0$ étant dans $D - \bar{D}_n$, ces inégalités subsistent dans D. Par le passage à la limite $n \to \infty$, on a

$$-\omega(P) \leqq u(P) \leqq \omega(P) \qquad P \in D.$$

On obtient donc

$$\lim_{P\to P_0} u(P) = 0 \qquad P \in D, \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

THÉORÈME 4. *Soit $f(P, u, p)$ une fonction bornée ($|f(P, u, p)| \leqq M$) et continue dans $\mathscr{D}$. L'équation* (1) *admet une solution bornée et régulière dans D et prenant des valeurs $\varphi(P)$ sur S^r, où $\varphi(P)$ est une fonction continue sur S donnée à l'avance.*

Soient $h(P)$ la fonction harmonique dans D et prenant des valeurs $\varphi(P)$ sur S^r, et $\psi(P)$ la solution de l'équation (6) régulière dans D et s'annulant sur S^r.

Posons

$$\underset{\sim}{\omega}(P) = -M\psi(P), \quad \tilde{\omega}(P) = M\psi(P)$$

et

$$u = v + h(P).$$

L'équation en v devient

$$\Delta v = f(P, v+h(P), \partial v + \partial h(P)). \tag{12}$$

D'après le théorème 3, l'équation (12) admet une solution $v = v(P)$ bornée et régulière dans D et s'annulant sur S^r, C.Q.F.D.

Théorème 5. *Supposons que $f(P, u, p)$ soit une fonction bornée au sens généralisé et non décroissante par rapport à u et continue dans $\mathscr{D}$, et que S^i soit fermé. L'équation* (1) *admet une solution bornée et régulière dans D et prenant des valeurs $\varphi(P)$ sur S^r, où $\varphi(P)$ est une fonction continue sur S donnée à l'avance.*

Soit $h(P)$ la fonction harmonique dans D et prenant des valeurs $\varphi(P)$ sur S^r. Posons

$$u = v + h(P),$$

on obtient l'équation (12).

Puisqu'on a

$$\begin{aligned} f(P, v+h(P), \partial v+\partial h(P)) \\ &= (f(P, v+h(P), \partial v+\partial h(P)) - f(P, h(P), \partial v + \partial h(P)) \\ &\qquad + (fP, h(P), \partial v+\partial h(P)), \\ |f(P, h(P), \partial v+\partial h(P))| \leqq M \qquad &\qquad (M : \text{const.}), \end{aligned}$$

d'après le théorème 2, une solution $v = v(P)$ de l'équation (12) bornée et régulière dans D et s'annulant sur S^r satisfait à l'inégalité

$$|v(P)| \leqq M\psi(P) \qquad P \in D.$$

Posons

$$g(P, v, p) = f(P, \lambda(v| -\Gamma, \Gamma) + h(P), P + \partial h(P)),$$

où

$$\Gamma = \sup_{P \in D} M\psi(P).$$

$g(P, u, p)$ est bornée et continue dans $\mathscr{D}$.

D'après le théorème 4 l'équation

$$\Delta v = g(P, v, \partial v)$$

admet une solution $v = v(P)$ bornée et régulière dans D et s'annulant sur S^r.

Puisqu'on a

$$g(P, v, \partial v) = (g(P, v, \partial v) - g(P, 0, \partial v)) + g(P, 0, \partial v),$$

$$|g(P, 0, \partial v)| = |f(P, h(P), \partial v + \partial h(P))| \leqq M,$$

d'après le théorème 2 on a

$$|v(P)| \leqq \Gamma.$$

$v = v(P)$ est donc une solution de l'équation (12), C.Q.F.D.

LEMME 2. *Soient E^m un ensemble borné et ferme de l'espace R^m à m dimensions et E^n un ensemble de l'espace R^n à n dimensions.*

Soit $f(P; Q)$ une fonction bornée et continue dans $E^m \times E^n$.

Si $f(P; Q)$ est également continue dans E^n pour $P \in E^m$, on peut définir une fonction $F(P; Q)$ continue dans $R^m \times E^n$ de manière que

$$F(P; Q) = f(P; Q) \qquad P \in E^m, Q \in E^n$$

et, de plus, si l'on a $m \leqq f(P; Q) \leqq M$ dans $E^m \times E^n$, de manière que l'on ait $m \leqq F(P; Q) \leqq M$ dans $R^m \times E^n$, et, enfin, si $f(P; Q)$ est non décroissante par rapport à un des coordonnées y du point Q, de manière que $F(P; Q)$ soit aussi non décroissante par rapport à y.

$f(P; Q)$ étant bornée dans $E^m \times E^n$, on peut supposer que $f(P; Q) \geqq 0$ dans $E^m \times E^n$.

Soit

$$M = \sup_{P \in E^m, Q \in E^n} f(P; Q),$$

on a

$$0 \leqq f(P; Q) \leqq M \qquad P \in E^m, \quad Q \in E^n.$$

Posons

$$F(P; Q) = f(P; Q) \qquad P \in E^m, \quad Q \in E^n,$$

et

$$F(P; Q) = d(P, E^m) \sup_{R \in E^m} \frac{f(R; Q)}{\overline{PR}}$$

pour $P \in (E^m)^c$, $Q \in E^n$, où $d(P, E^m)$ est la distance du point P à l'ensemble E^m.

Si $F(P; Q)$ est continue dans $R^m \times E^n$, il est clair qu'elle est la fonction cherchée.

Fixons $Q \in E^n$, la fonction $F(P, Q)$ est continue dans R^m (D'après le théorème de Lebesgue-Tietze).

Ensuite nous montrons que $F(P; Q)$ est également continue dans E^n pour $P \in R^m$.

Par définition $F(P; Q)$ est également continue dans E^n pour $P \in E^m$. Considérons donc pour $P \in (E^m)^c$. On a

$$F(P; Q_1) - F(P; Q_2)$$
$$= d(P, E^m) \left\{ \sup_{R \in E^m} \frac{f(R; Q_1)}{\overline{PR}} - \sup_{R \in E^m} \frac{f(R; Q_2)}{\overline{PR}} \right\} \quad Q_1, Q_2 \in E^n.$$

Par hypothèse on peut prendre $\delta(>0)$ indépendant du point R de manière qu'on ait l'inégalité

$$|f(R;\, Q_1)-f(R;\, Q_2)| < \varepsilon$$

pour $\overline{Q_1Q_2} < \delta$, où ε est un nombre positif donné à l'avance.

On a donc

$$\begin{aligned} d(P,\, E^m)\left|\sup\frac{f(R;\, Q_1)}{\overline{PR}} - \sup\frac{f(R;\, Q_2)}{\overline{PR}}\right| & \\ \leqq \sup\frac{d(P,\, E^m)}{\overline{PR}}\,|f(R;\, Q_1)-f(R;\, Q_2)| & \\ \leqq \sup\,|f(R;\, Q_1)-f(R;\, Q_2)| & \\ \leqq \varepsilon & \end{aligned}$$

pour $\overline{Q_1Q_2} < \delta$. On en conclut que $F(F;\, Q)$ est également continue dans E^n pour $P \in R^m$. La fonction $F(P;\, Q)$ est donc continu dans $R^m \times E^n$.

THÉORÈME 6. *Soient $f(P,\, u,\, p)$ une fonction définie dans $\mathscr{D}$ et E_0 un ensemble fermé de mesure nulle et contenu dans D.*

Supposons que $f(P,\, u,\, p)$ soit continue et bornée au sens généralisé par rapport à u dans $P \in D-E_0$, $\underset{\sim}{\omega}(P) \leqq u \leqq \tilde{\omega}(P)$, $-\infty < p_1,\, p_2,\, p_3 < +\infty$, et qu'elle soit également continue dans $-\infty < p_1,\, p_2,\, p_3 < +\infty$ pour $P \in D-E_0$, $\underset{\sim}{\omega}(P) \leqq u \leqq \tilde{\omega}(P)$.

Si l'on a les inégalités

$$\text{(13)} \qquad \begin{aligned} \bar{\Delta}\underset{\sim}{\omega}(P) &\geqq f(P,\, \underset{\sim}{\omega}(P),\, \partial\underset{\sim}{\omega}(P)), \\ \underline{\Delta}\tilde{\omega}(P) &\leqq f(P,\, \tilde{\omega}(P),\, \partial\tilde{\omega}(P)) \end{aligned} \qquad P \in D-E_0,$$

il existe une fonction $u = u(P)$ bornée et régulière dans D et s'annulant sur S^r qui satisfait à les inégalités (10) *et à l'équation* (1) *presque partout dans D.*

Posons

$$\text{(14)} \qquad g(P,\, u,\, p) = f(P,\, \lambda(u|\underset{\sim}{\omega}(P),\, \tilde{\omega}(P)),\, p).$$

Par hypothèse $g(P,\, u,\, p)$ est bornée ($|g(P,\, u,\, p)| \leqq M$) et continue dans $P \in D-E_0$, $-\infty < u,\, p_1,\, p_2,\, p_3 < +\infty$ et également continue dans $-\infty < u,\, p_1,\, p_2,\, p_3 < +\infty$ pour $P \in A$, où A est un ensemble quelconque fermé et contenu dans $D-E_0$.

En vertu de (13) on a les inégalités

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}\underset{\sim}{\omega}(P) &> \lambda g(P,\, \underset{\sim}{\omega}(P),\, \partial\underset{\sim}{\omega}(P)), \\ \underline{\Delta}\tilde{\omega}(P) &< \lambda g(P,\, \tilde{\omega}(P),\, \partial\tilde{\omega}(P)) \end{aligned} \qquad P \in D-E_0$$

pour $0 < \lambda < 1$.

Par hypothèse on peut prendre deux ensembles ouverts $0_n'$ et $0_n''$ tels que

$$S \subset 0_n', \quad m(0_n' - S) < 1/2^{n+2},$$
$$E_0 \subset 0_n'', \quad m(0_n'') < 1/2^{n+2} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

où $m(A)$ est la mesure d'un ensemble A.

Posons

$$A_n = \bar{D} - (0_n' \cup 0_n'') \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Alors A_n est fermé et

$$A_n \subseteqq D - E_0, \; m(D - A_n) < 1/2^{n+1}.$$

$g(P, u, p)$ est bornée et continue dans $P \in A_n$, $-\infty < u, p_1, p_2, p_3 < +\infty$, et également continue dans $-\infty < u, p_1, p_2, p_3 < +\infty$ pour $P \in A_n$. D'après le lemme 2 on obtient une fonction $g_n(P, u, p)$ bornée et continue dans $P \in R^3$, $-\infty < u, p_1, p_2, p_3 < +\infty$ telle que

$$(15) \qquad g_n(P, u, p) = g(P, u, p) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

pour $P \in A_n$.

Soit $\{D_n\}$ une suite de domaines D_n appartenant à la classe B_h telle que

$$D_1 \subset D_2 \subset \ldots \subset D_n \subset \ldots, \; D_n \to D.$$

D'après le lemme 8° l'équation

$$u(P) = -\frac{\lambda}{4\pi} \int_{D_n} G_n(P; Q) g_n(Q, u(Q), \partial u(Q)) d\omega_Q$$

admet une solution

$$u = u_n(P, \lambda)$$

régulière dans D_n et s'annulant sur la frontière S_n de D_n, où $G_n(P; Q)$ est la fonction de Green relative au domaine D_n.

D'après la propriété ii) de l'opérateur Δ, $u = u_n(P, \lambda)$ est une solution de l'équation

$$\Delta u = \lambda g_n(P, u, \partial u).$$

D'après le lemme 2° on a les inégalités (11). Prenons une suite $\{\lambda_n\}$ telle que $\lambda_n \uparrow 1$ $(0 < \lambda_n)$, et posons

$$u_n(P) = u_n(P, \lambda_n) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

et

$$u_n(P) \equiv 0 \qquad P \in D - \bar{D}_n.$$

On voit aisément que $u_n(P)$ est une fonction continue dans D.

Soit D_0 un domaine quelconque tel que $\bar{D}_0 \subset D$. Par hypothèse il existe un entier N tel que

$$\bar{D}_0 \subset D_n \qquad n \geqq N.$$

D'après le lemme 7° les suites $\{u_n(P)\}$, $\{\partial u_n(P)\}$ sont normales dans D_0. On peut supposer sans perdre la généralité

$$\lim_{n\to\infty} u_n(P) = u(P), \quad \lim_{n\to\infty} \partial u_n(P) = \partial u(P)$$

uniformément dans D_0, en prenant, s'il est nécessaire, une suite partielle.

Posons

$$B_n = \cap_{j=n}^{\infty} A_j \qquad (n = 1, 2, \ldots);$$

B_n sont des ensembles fermés tels que

$$B_1 \subseteqq B_2 \subseteqq \ldots \subseteqq B_n \subseteqq \ldots,$$
$$B_n \subseteqq A_n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Posons

$$G_n = D - B_n \qquad (n = 1, 2, \ldots);$$

on a

$$G_1 \supseteqq G_2 \supseteqq \ldots \supseteqq G_n \supseteqq \ldots.$$

Puisque $G_n = \cup_{j=n}^{\infty} (D - A_j)$, on obtient l'inégalité

$$m(G_n) \leqq 1/2^n.$$

Posons

$$G = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, G_n = \cap_{n=1}^{\infty} G_n;$$

on a

$$m(G) = \lim_{n\to\infty} m(G_n) \leqq \lim_{n\to\infty} 1/2^n = 0.$$

Soit P_0 un point quelconque mais déterminé de $D - G$. On peut prendre N tel que

$$P_0 \bar{\in} G_n \qquad n \geqq N,$$

c'est-à-dire

$$P_0 \in D - G_n = B_n \subseteqq A_n \qquad n \geqq N.$$

Puisque $A_n \subseteqq D - E_0$, on peut décrire une sphère K_ρ de centre P_0 et de rayon ρ de manière que

$$(K_\rho) \subseteqq D - E_0.$$

En vertu de (11), (14) et (15) on obtient pour $P \in (K_\rho)$

$$g_n(P, u_n(P), \partial u_n(P)) = f(P, u_n(P), \partial u_n(P)).$$

On a donc dans (K_ρ)

$$\Delta u_n(P) = \lambda_n f(P, u_n(P), \partial u_n(P)) \qquad n \geqq N.$$

On voit aisément que $f(P, u_n(P), \partial u_n(P))$ tend uniformément vers $f(P, u(P), \partial u(P))$ dans (K_ρ). D'après le lemme 1° on a

$$\Delta u(P) = f(P, u(P), \partial u(P)) \qquad P \in (K_\rho).$$

On en conclut que $u = u(P)$ est régulière dans D et satisfait à l'équation (1) dans $D-G$. De la démonstration du théorème 3 on voit aisément que la fonction $u(P)$ s'annule sur S^r.

Nous arrivons aux corollaires suivants d'une manière analogue aux théorèmes 4 et 5.

Corollaire 1. *Soient $f(P, u, p)$ une fonction définie dans $\mathscr{D}$, et E_0 un ensemble fermé de mesure nulle et contenu dans D.*

Supposons que $f(P, u, p)$ soit bornée et continue dans $P \in D-E_0$, $-\infty < u, p_1, p_2, p_3 < +\infty$, et qu'elle soit également continue dans $-\infty < u, p_1, p_2, p_3 < +\infty$ pour $P \in D-E_0$.

Il existe une fonction $u(P)$ régilière dans D, prenant des valeurs $\varphi(P)$ sur S^r, et qui satisfait à l'équation (1) *presque partout dans D, où $\varphi(P)$ est une fonction continue sur S donnée à l'avance.*

Corollaire 2. *Soient $f(P, u, p)$ une fonction définie dans $\mathscr{D}$, E_0 un ensemble fermé de mesure nulle et contenu dans D et S^i un ensemble fermé.*

Supposons que $f(P, u, p)$ soit une fonction bornée au sens généralisé, non décroissante par rapport à u et continue dans $P \in D-E_0$, $-\infty < u, p_1, p_2, p_3 < +\infty$, et qu'elle soit également continue dans $-\infty < u, p_1, p_2, p_3 < +\infty$ pour $P \in D-E_0$.

Il existe une fonction $u(P)$ régulière dans D et prenant des valeurs $\varphi(P)$ sur S^r qui satisfait à l'équation (1) *presque partout dans D, où $\varphi(P)$ est une fonction continue donnée à l'avance.*

Nous étendrons les théorèmes 2, 3 et 4 dans l'article [3].

Théorème 7. *Soit $S^i = \phi$. Si $f(P, u, p)$ est une fonction continue, bornée au sens généralisé et non décroissante par rapport à u dans D, l'équation* (1) *admet la plus grande et la plus petite solutions régulières dans D et s'annulant sur S.*

Par hypothèse, on peut prendre une constante M telle que

$$|f(P, 0, p)| \leqq M.$$

Posons

$$\Gamma = (M+1) \max_{P \in \bar{D}} \psi(P),$$

où $\psi(P)$ est la solution de l'équation (6) régulière dans D et s'annulant sur S. Définissons $g(P, u, p)$ par

$$g(P, u, p) = f(P, \lambda(u| -\Gamma, \Gamma), p);$$

alors la fonction $g(P, u, p)$ est bornée et continue dans $\mathscr{D}$.

D'après le théorème 4 l'équation

$$(16) \qquad \Delta u = g(P, u, \partial u)$$

admet une solution $u = u(P)$ régulière dans D et s'annulant sur S.

Puisque $g(P, 0, p) = f(P, 0, p)$, on a $|u(P)| \leqq \Gamma$ dans $\bar{D}$. Par suite $u = u(P)$ devient une solution de l'équation (1). Réciproquement une solution $u = u(P)$ de l'équation (1) telle que $|u(P)| \leqq \Gamma$ est aussi une solution de l'équation (16).

Soit $\{\varepsilon_n\}$ une suite de nombres telle que $\varepsilon_n \downarrow 0 (\varepsilon_1 < 1)$.

Considérons l'équation

$$(17) \qquad \Delta u = g(P, u, \partial u) + \varepsilon_n((\tan^{-1} u - \pi/2)/\pi - 1),$$

où $\tan^{-1} 0 = 0$. D'après le théorème 4 et le lemme 5°, l'équation (17) admet une et une seule solution $u = \tilde{u}_n(P)$ régulière dans D et s'annulant sur S. D'après le lemme 2° on a

$$u(P) \leqq \tilde{u}_{n+1}(P) \leqq \tilde{u}_n(P) \qquad P \in D,$$

où $u = u(P)$ est une solution quelconque de l'équation (1) régulière dans D et s'annulant sur S. La suite $\{\tilde{u}_n(P)\}$ converge uniformément vers $\tilde{u}(P)$ dans $\bar{D}$. $\tilde{u}(P)$ est donc continue dans $\bar{D}$ et s'annule sur S et

$$u(P) \leqq \tilde{u}(P) \qquad P \in \bar{D}.$$

Soit D_0 un domaine quelconque tel que $\bar{D}_0 \subset D$. Prenons un domaine D_1 appartenant à la classe B_h tel que $\bar{D}_0 \subset D_1 \subset D$. Soit $h_n(P)$ la fonction harmonique prenant des valeurs $\tilde{u}_n(P)$ sur la frontière S_1 de D_1.

Posons

$$\tilde{u}_n(P) = v_n(P) + h_n(P),$$

$v_n(P)$ devient une solution régulière dans D_1 et s'annulant sur S_1 de l'équation en v

$$\begin{aligned} \Delta v = g(P, v + h_n(P), \partial v + \partial h_n(P)) \\ + \varepsilon_n((\tan^{-1}(v + h_n(P)) - \pi/2)/\pi - 1). \end{aligned}$$

$v_n(P)$ s'exprime donc comme suit:

$$\begin{aligned} v_n(P) = -\frac{1}{4\pi}\int_{D_1} G_1(P; Q)\{g(Q, v_n(Q) + h_n(Q), \partial v_n(Q) + \partial h_n(Q)) \\ + \varepsilon_n((\tan^{-1}(v_n(Q) + h_n(Q)) - \pi/2)/\pi - 1)\} d\omega_Q, \end{aligned}$$

où $G_1(P; Q)$ est la fonction de Green relative au domaine D_1. Les familles $\{\partial v_n(P)\}$ sont donc normales dans D_0. Par suite on a

$$\lim_{n\to\infty} \partial u_n(P) = \partial \tilde{u}(P),$$

la convergence étant uniforme dans D_0. D'aprés le lemme 1° on a

$$\Delta \tilde{u}(P) = g(P, \tilde{u}(P), \partial\tilde{u}(P)) \qquad P \in D_0.$$

D_0 étant arbitraire, $u = \tilde{u}(P)$ est la plus grande solution de l'équation (1) régulière dans D et s'annulant sur S.

De même on peut démontrer l'existence de la plus petite solution.

Exemple. Désignons par S la surface: $x^4+y^4+z^4-1 = 0$. Posons

$$f(p_1, p_2, p_3) = 3\sqrt[3]{4}\{\lambda(p_1|-4, 4)^{\frac{2}{3}}+\lambda(p_2|-4, 4)^{\frac{2}{3}}+\lambda(p_3|-4, 4)^{\frac{2}{3}}\}.$$

La fonction $f(p_1, p_2, p_3)$ est bornée et continue dans $-\infty < p_1, p_2, p_3 < +\infty$. On verra aisément que l'équation

$$\Delta u = f(\partial u) \tag{18}$$

admet des solutions

$$u \equiv 0, \; u = x^4+y^4+z^4-1$$

qui sont régulières dans (S) et s'annulent sur S.

Montrons par exemple que $u = x^4+y^4+z^4-1$ est la plus petite solution.

Posons

$$\omega(P) = \lambda(x^4+y^4+z^4-1) \qquad (\lambda > 1).$$

On a alors l'inégalité

$$\Delta\omega(P) > f(\partial\omega(P))$$

en dehors de l'origine, et l'égalité

$$\Delta\omega(P) = f(\partial\omega(P))$$

à l'origine 0.

Désignons par Σ_n une sphère de centre 0 et de rayon $1/2^n$. On a donc

$$|\partial\omega(P)+\partial\chi_n(P)| < |\partial\omega(P)| \qquad P \in D-[\Sigma_n],$$

où $\chi_n(P)$ est le potentiel conducteur de $[\Sigma_n]$. Par la définition de $\chi_n(P)$ on a

$$f(\partial\omega(P)) > f(\partial\omega(P)+\partial\chi_n(P)) \qquad P \in D-[\Sigma_n].$$

D'après le théorème 1, si $u = u(P)$ est une solution quelconque de l'équation (18) régulière dans (S) et s'annulant sur S, on a l'inégalité

$$\omega(P) \leqq u(P) \qquad P \in D.$$

Par le passage à la limite $\lambda \downarrow 1$, on obtient

$$x^4+y^4+z^4-1 \leqq u(P).$$

Or $u = x^4+y^4+z^4-1$ est une solution de l'équation (18), et donc la plus petite, C.Q.F.D.

Nous avons le théorème suivant d'une manière analogue à la démonstration du théorème 3 de l'article [3].

THÉORÈME 8. *Dans les mêmes hypothèses qu'au théorème 7, l'équation* (1) *admet la plus petite et la plus grande solutions régulières dans D et s'annulant sur S, qui seront désignées par $u = \underset{\sim}{u}(P)$ et $u = \tilde{u}(P)$ respectivement. Soit P_0 un point dans D, et soit u_0 une valeur telle que $\underset{\sim}{u}(P_0) \leqq u_0 \leqq \tilde{u}(P_0)$. Alors il esiste une solution $u = u(P)$ régulière dans D telle que*

$$u(P_0) = u_0,$$
$$\underset{\sim}{u}(P) \leqq u(P) \leqq \tilde{u}(P) \qquad P \in \bar{D}.$$

THÉORÈME 9. *Soient $S^i = \phi$ et $f(P, u, p)$ une fonction continue, bornée au sens généralisé et non décroissante par rapport à u dans $\mathscr{D}$.*

Supposons que l'équation (1) *admette au plus une solution régulière dans D et prenant des valeurs données et continues sur S.*

Soit $\{u_n(P)\}$ une suite de solutions de l'équation (1) *régulières dans D et continues dans $\bar{D}$.*

Si la suite $\{u_n(P)\}$ converge uniformément sur S, elle converge uniformément (au sens strict) dans D. Désignons par $u(P)$ sa fonction limite. $u(P)$ est une solution de l'équation (1) *régulière dans D et continue dans $\bar{D}$, et on a*

$$\lim_{n\to\infty} \partial u_n(P) = \partial u(P),$$

la convergence étant uniforme dans D.

Par la méthode utilisée plusieurs fois on peut supposer sans perdere la généralisé que $f(P, u, p)$ soit bornée dans D.

Soit $\{\varepsilon_\nu\}$ une suite de nombres tels que $\varepsilon_\nu \downarrow 0$ $(\varepsilon_1 < 1)$.

Considérons l'équation

$$\Delta u = f(P, u, \partial u)+\varepsilon_\nu((\tan^{-1}u-\pi/2)/\pi-1),$$

où $\tan^{-1}0 = 0$.

Désignons par $u = u_{n,\nu}(P)$ la solution régulière dans D et prenant des valeurs $u_n(P)$ sur S. D'après le lemme 2° on a les inégalités

$$u_n(P) \leqq u_{n,\nu+1}(P) \leqq u_{n,\nu}(P).$$

Par hypothèse on obtient

$$\lim_{\nu\to\infty} u_{n,\nu}(P) = u_n(P),$$

la convergence étant uniforme dans $\bar{D}$. A un nombre $\varepsilon(>0)$ donné à l'avance on peut faire correspondre N_1 et N_2 de manière que

$$|u_{n,\nu}(P) - u_n(P)| < \varepsilon/3$$

pour $\nu \geqq N_1$ et

$$|u_{n+p,\nu}(P) - u_{n+p}(P)| < \varepsilon/3$$

pour $\nu \geqq N_2$.

Fixons ν et posons

$$v(P) = u_{n+p\ \nu}(P) - u_{n,\nu}(P).$$

Alors $v(P)$ devient une solution régulière dans D de l'équation

$$\Delta v = g(P, v, \partial v),$$

où

$$\begin{aligned} g(P, v, \partial v) & \\ &= f(P, v+u_{n,\nu}(P), \partial v + \partial u_{n,\nu}(P)) - f(P, u_{n,\nu}(P), \partial u_{n,\nu}(P)) \\ &\quad + \varepsilon_\nu(\tan^{-1}(v+u_{n,\nu}(P)) - \tan^{-1}u_{n,\nu}(P))/\pi. \end{aligned}$$

Par hypothèse on a les inégalités

$$g(P, v, 0) \begin{cases} < 0 & v < 0, \\ = 0 & v = 0, \\ > 0 & v > 0, \end{cases} \qquad P \in D,$$

et on peut prendre N de manière que

$$|u_{n+p}(P) - u_n(P)| \leqq \varepsilon/3 \qquad P \in S, n \geqq N.$$

D'après le lemme 2° on a l'inégalité

$$|v(P)| \leqq \varepsilon/3 \qquad P \in D,$$

c'est-à-dire

$$|u_{n+p,\nu}(P) - u_{n,\nu}(P)| \leqq \varepsilon/3 \qquad P \in D, n \geqq N.$$

En prenant $\nu = \max\{N_1, N_2\}$, on obtient les inégalités

$$\begin{aligned} &|u_{n+p}(P) - u_n(P)| \\ &\leqq |u_{n+p}(P) - u_{n+p,\nu}(P)| + |u_{n+p,\nu}(P) - u_{n,\nu}(P)| + |u_{n,\nu}(P) - u_n(P)| \\ &< \varepsilon \qquad\qquad n \geqq N. \end{aligned}$$

La suite $\{u_n(P)\}$ converge uniformément dans D. Désignons par $u(P)$ sa fonction limite.

Soit D_0 un domaine quelconque tel que $\bar{D}_0 \subset D$. Par la méthode utiliseé plusieurs fois les suites $\{\partial u_n(P)\}$ sont normales dans D_0. On a donc

$$\lim_{n\to\infty} \partial u_n(P) = \partial u(P),$$

la convergence étant uniforme dans D_0. D'après le lemme 1° on obtient

$$\Delta u(P) = f(P, u(P), \partial u(P)) \qquad P \in D_0.$$

D_o étant arbitraire, $u = u(P)$ est une solution de l'équation (1) régulière dans D. C.Q.F.D.

Remarque. Nous ne pouvons pas supprimer dans l' hypothèse du théorème précédent la condition que l'équation (1) admet au plus une solution régulière dans D et prenant des valeurs données et continues sur S.

En effet, considérons l'équation (18). Posons

$$u_n(P) = -\frac{1}{n} \quad n = 2\nu+1 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$u_n(P) = x^4+y^4+z^4-1-\frac{1}{n} \quad n = 2\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Alors $u_n(P)$ est une solution de l'équation (18) régulière dans (S) et prenant $-1/n$ sur S. La suite $\{u_n(P)\}$ converge uniformément vers 0 sur S. Or on obtient dans (S)

$$\lim_{\nu\to\infty} u_{2\nu+1}(P) = 0, \qquad \lim_{\nu\to\infty} u_{2\nu}(P) = x^4+y^4+z^4-1;$$

donc cet exemple justifie la remarque.

3. L'équation $\Delta u = f(P, u)$.

Dans la suite supposons que $f(P, u)$ soit une fonction définie et non décroissante par rapport à u dans le domaine $\mathscr{D}_0 : P \in D, -\infty < u < +\infty$.

Théorème 10. *Supposons que $\omega(P)$ soit une fonction bornée et régulière dans D et que l'équation*

$$(19) \qquad \Delta u = f(P, u)$$

admette une solution $u = u(P)$ bornée et régulière dans D.

Si l'on a l'inégalité

$$(20) \qquad \underline{\Delta}\omega(P) \leqq f(P, \omega(P))$$

dans $D-E^0$ et l'inégalité (2) *sur $S-E$, on obtient l'inégalité* (3).

On peut prendre une suite de surfaces appartenant à la classe B_h telle que

$$(\Sigma_1) \supset (\Sigma_2) \supset \ldots \supset (\Sigma_n) \supset \ldots, \ [\Sigma_n] \to E \cup E^0.$$

Désignons par $\chi_n(P)$ le potentiel conducteur de $[\Sigma_n]$.

Posons

$$D_n = D-[\Sigma_n] \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Alors on a en vertu de (2) sur $(S-(\Sigma_n)) \cup (D \cap \Sigma_n)$

$$\varliminf_{P\to P_0} (\omega(P)+2M\chi_n(P)-u(P)) \geqq 0 \qquad P \in D_n,$$

où $|u(P)|$, $|\omega(P)| \leqq M$. D'après (20) on obtient

$$\underline{\Delta}(\omega(P)+2M\chi_n(P)) = \underline{\Delta}\omega(P) \leqq f(P, \omega(P)) \\ \leqq f(P, \omega(P)+2M\chi_n(P)).$$

D'après le lemme 3° on a

$$\omega(P)+2M\chi_n(P) \geqq u(P) \qquad P \in D_n,$$

et par le passage à la limite $n \to \infty$,

$$\omega(P) \geqq u(P) \qquad P \in D-E^0.$$

E^0 étant un ensemble fermé de capacité nulle, ce qui établit l'inégalité (3).

THÉORÈME 11. *L'équation* (19) *admet au plus une solution bornée et régulière dans D et prenant des valeurs données sur $S-E$.*

Soient $u = u_1(P)$ et $u = u_2(P)$ deux solutions de l'équation (19) bornées et régulières dans D et prenant les mêmes valeurs sur $S-E$.

Posons

$$u(P) = u_2(P)-u_1(P),$$

$u(P)$ est alors une solution bornée et régulière dans D s'annulant sur $S-E$ de l'équation

$$\Delta u = f(P, u+u_1(P))-f(P, u_1(P)).$$

D'après le théorème 10 on a

$$u_2(P)-u_1(P) \geqq 0 \qquad P \in D.$$

De même on a

$$u_2(P)-u_1(P) \leqq 0 \qquad P \in D.$$

On a donc

$$u_1(P) = u_2(P) \qquad P \in D.$$

THÉORÈME 12. *Si la fonction $f(P, u)$ est continue et bornée au sens généralisé par rapport à u dans un domaine $P \in D-E^0$, $-\infty < u < +\infty$, tous les points appartenant à E^0 sont des singularités artificielles de l'équation* (19).

Soit $u = u(P)$ une solution de l'équation (19) bornée et régulière dans $D-E^0$.

On prend un domaine quelconque D_0 appartenant à la classe B_h tel que

$$E^0 \subset D_0 \subset \bar{D}_0 \subset D.$$

Désignons par S_0 la frontière de D_0. D'après les théorèmes 5 et 11, l'équation (19) admet une et une seule solution $u = u_0(P)$ régulière dans D_0 et prenant des valeurs $u(P)$ sur S_0.

Il est clair que $u = u(P)$ est une solution de l'équation (19) bornée et régulière dans $D_0 - E^0$ et prenant des valeurs $u(P)$ sur (la frontière de $(D_0 - E^0)) - E^0$. Puisque E^0 est un ensemble fermé de capacité nulle, d'apérs le théorème 11 on a

$$u(P) = u_0(P) \qquad P \in D_0 - E^0.$$

Posons

$$u(P) = u_0(P) \qquad P \in E^0,$$

alors $u = u(P)$ devient une solution de l'équation (19) régulière dans D_0. D_0 étant un domaine arbitraire contenu dans D, $u = u(P)$ devient une solution de l'équation (19) régulière dans D.

THÉORÈME 13. *Soient S^i un ensemble fermé et $f(P, u)$ une fonction continue et bornée au sens généralisé par rapport à u.*

Supposons qu' une suite $\{\varphi_n(P)\}$ converge uniformément vers une fonction $\varphi(P)$ sur S^r, où $\varphi_n(P)$ $(n = 1, 2, \dots)$ soient des fonctions continues sur S.

Désignons par $u = u_n(P)$ une solution de l'équation (19) *bornée et régulière dans D et prenant les valeurs $\varphi_n(P)$ sur S^r. Alors la suite $\{u_n(P)\}$ converge uniformément dans D. Soit $u = u(P)$ sa fonction limite, $u = u(P)$ est une solution de l'équation* (19) *bornée et régulière dans D et prenant les valeurs $\varphi(P)$ sur S^r.*

Posons

$$v(P) = u_{n+p}(P) - u_n(P).$$

$v(P)$ devient une solution bornée et continue dans D de l'équation

$$\Delta v = g(P, v),$$

où

$$g(P, v) = f(P, v + u_n(P)) - f(P, u_n(P)).$$

Par hypothèse on a

$$g(P, v) \begin{cases} \leqq 0 & v \leqq 0, \\ \geqq 0 & v \geqq 0, \end{cases} \qquad P \in D.$$

A un nombre $\varepsilon (> 0)$ donné à l'avance on peut faire correspondre N de manière que

$$|\varphi_{n+p}(P) - \varphi_n(P)| < \varepsilon \qquad P \in S^r, \quad n \geqq N.$$

D'après le théorème 10 on a

$$|u_{n+p}(P) - u_n(P)| \leqq \varepsilon \qquad P \in D, \quad n \geqq N,$$

ce qui montre que la suite $\{u_n(P)\}$ converge uniformément dans D. Puisque $\Delta u_n(P) = f(P, u_n(P))$, par le passage à la limite $n \to \infty$, on a

$$\Delta u(P) = f(P, u(P)).$$

Par suite $u = u(P)$ est une solution de l'équation (19) régulière dans D. Puisque $u_n(P) = \varphi_n(P)$ $P \in S^r$, on a

$$u(P) = \varphi(P) \qquad P \in S^r, \quad \text{C.Q.F.D.}$$

BIBLIOGRAPHIE

O. FROSTMAN

[1] Potentiel d'équilibrium et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions, Med. Lund Univ. Math. Sem., **3** (1935).

T. SATŌ

[2] Sur l'équation aux dérivées partielles $\Delta z = f(x, y, z, p, q)$, Comp. Math. **12** (1954), 157—177.

T. SATŌ

[3] Sur l'équation aux dérivées partielles $\Delta z = f(x, y, z, p, q)$ II.

C. DE LA VALLÉE POUSSIN

[4] Les nouvelles méthodes de la théorie du potentiel et le problème généralisé de Dirichlet, Act. Sci. et ind., **578** (1937).

F. VASILESCO

[5] La notion de point irrégulier dans le problème de Dirichlet, Act. sci. et ind., **660** (1938).

N. WIENER

[6] Certain notions in potential theory, Journ. of Math. Massachusetts Inst. of Technology, (1924).

Le 17 février 1958.
L'université de Kōbe.

(Oblatum 29-5-58).