COMPOSITIO MATHEMATICA

L. FEJES TÓTH

A. HEPPES

Über stabile Körpersysteme

Compositio Mathematica, tome 15 (1962-1964), p. 119-126

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1962-1964__15__119_0>

Über stabile Körpersysteme

von

L. Fejes Tóth und A. Heppes, Budapest

Wir betrachten im Euklidischen Raum starr bewegliche Körper, die in keiner Lage übereinandergreifen (d.h. gemeinsame innere Punkte besitzen) können. Eine bestimmte Lage dieser Körper heisst eine Lagerung oder Packung. Wir nennen die Packung *stabil*, wenn sich ein Körper nur durch gleichzeitige Bewegung sämtlicher Körper bewegen lässt, wobei aber natürlich die Drehung eines Rotationskörpers um seine Achse als keine „Bewegung" angesehen wird. In einer stabilen Packung sind also die Körper starr verbunden. Genügt die Packung nur der schwächeren Bedingung, dass jeder Körper von den übrigen fixiert wird, dass also kein Körper für sich bewegt werden kann, so sagen wir, dass die Packung *relativ stabil* ist. Statt „nicht stabil" wollen wir auch *labil* und statt „nicht relativ stabil" auch *absolut labil* sagen. Der Zusammenhang dieser Begriffe lässt sich folgendermassen veranschaulichen:

stabil labil

relativ stabil absolut labil

Im gleichen Sinne sprechen wir von (relativ) verschiebungsstabilen und (absolut) verschiebungslabilen Lagerungen, indem wir uns statt Bewegungen nur auf Verschiebungen beschränken.

Unter einem Körper wollen wir die abgeschlossene Hülle einer offenen, beschränkten, zusammenhängenden Punktmenge verstehen. Handelt es sich ausdrücklich um den zweidimensionalen Fall, so sprechen wir statt Körpern von Scheiben oder Bereichen. Ausser Körpern wollen wir gelegentlich auch allgemeinere Punktmengen in Betracht ziehen.

Eine Punktmenge M mit der Eigenschaft, dass es einen Punkt P gibt, so dass die Verbindungsstrecke von P und eines beliebigen Punktes von M zu M gehört, heisst sternkonvex bezüglich des „Poles" P. Die Menge aller möglichen Pole ist der Kern von M. Es gilt der

SATZ 1. (Satz von De Bruijn [1])) *Eine Packung sternkonvexer Punktmengen ist stets verschiebungslabil, es sei denn, dass die Vereinigung der Kerne aus einem einzigen Punkt besteht.*

Wir bezeichnen die Mengen mit $M_0, M_1, \ldots$ und wählen in jeder Menge M_i einen Kernpunkt P_i, so dass nicht alle Punkte P_0, $P_1, \ldots$ identisch sein sollen. Wir verschieben jede Menge M_i $(i > 0)$ mit dem konstanten Geschwindigkeitsvektor $\overrightarrow{P_0 P_i}$ und behaupten, dass die Mengen bei gleichzeitiger durchführung dieser Verschiebungen in keinem Zeitpunkt übereinandergreifen. Im Zeitpunkt t befinde sich P_i und M_i in P_i^t und M_i^t. Wir fassen diejenige Punktmenge $(t+1)M_i$ ins Auge, die von M_i durch Vergrösserung bezüglich P_0 im Verhältnis $(t+1):1$ entsteht. Da sich $(t+1)M_i$ auch durch Vergrösserung von M_i^t bezüglich P_i^t erzeugen lässt, gilt, im Hinblick auf die Sternkonvexität von M_i^t in Bezug auf P_i^t,

$$M_i^t \subset (t+1)M_i, \quad i = 0, 1, \ldots.$$

Da aber die Mengen $(t+1)M_i$ selbst eine Packung bilden, ist der Beweis des Satzes 1 erbracht.

Die in Fig. 1 dargestellte stabile Lagerung aus zwei ebenen Sternmengen zeigt, dass die „Kernbedingung" notwendig ist.

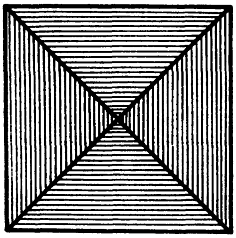

Fig. 1

Diese Punktmengen sind aber keine Bereiche, da das Innere beider Punktmengen in je zwei disjunkte Teilmengen zerfällt.

Wir betrachten eine Packung von Bereichen, die in Bezug auf einen gemeinsamen Randpunkt sternkonvex sind. Offensichtlich liegen diese Bereiche in nicht übereinandergreifenden Winkelräumen. Deshalb ist die Packung (in jeder Richtung) verschiebungslabil. *Eine Sternbereichenpackung ist* also *stets verschiebungs-*

[1]) Nach der Fertigstellung des Manuskriptes dieses Aufsatzes ist es uns bekanntgeworden, dass diesen Satz (sowie den wesentlichen Inhalt des Satzes 2) N. G. de Bruijn schon vorher bewiesen hat. [Aufgaben 17 und 18, Nieuw Archief voor Wiskunde 2 (1954) 67; Wiskundige Opgaven met de oplossingen 20 (1955), 19—20]. In einem freundlichen Brief hat De Bruijn auch auf eine Beweismöglichkeit für den Satz 4 hingewiesen. Doch scheint unser Beispiel einfacher zu sein.

labil. Dagegen gibt es stabile Sternkörperpackungen. Wir zerlegen eine Kugelfläche, ähnlich wie einen Tennisball, in zwei kongruente „Biskotten". Verbinden wir den Kugelmittelpunkt zunächst mit den Punkten der einen, sodann mit den Punkten der anderen Biskotte, so entstehen zwei Sternkörper, die eine stabile Packung bilden.

In Fig. 2a bilden die drei kongruenten, sternkonvexen „Seehunde" (Fig. 2b) eine relativ stabile Lagerung, die aber, im Einklang mit dem Satz 1, verschiebungslabil ist (Fig. 2c). Auf Grund dieses Beispiels können wir auch eine relativ stabile Packung aus

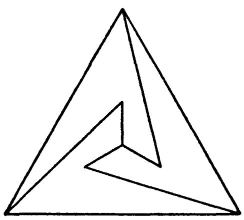

Fig. 2a

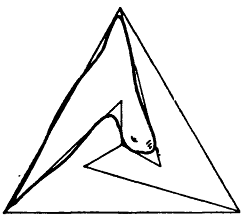

Fig. 2b

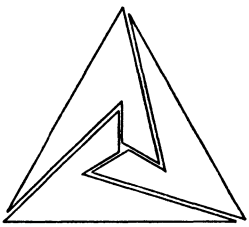

Fig. 2c

drei Sternkörpern mit verschiedenen Polen konstruieren. Wir stellen uns die Seehunde als flache Platten (Prismen) vor. Hält man zwei Platten fest, so gestattet die dritte nur zur Platte senkrechte Verschiebungen. Solche Verschiebungen können aber durch hervorspringende Kanten entlang der Hälse und entsprechende Kimmen an den Rücken verhindert werden, und zwar so, dass dabei die Sternkonvexität beibehalten bleibt.

Eine Punktmenge heisst richtungskonvex, wenn es eine Gerade gibt, so dass alle zu dieser Geraden parallele Geraden, die die Menge treffen, diese entweder in einer Strecke, oder in einem Punkt schneiden. Es lässt sich fragen: gilt der Satz 1 statt sternkonvexen Körpern auch für richtungskonvexe? Die Antwort ist: nein. Fig. 3 zeigt eine stabile Packung aus vier richtungskonvexen

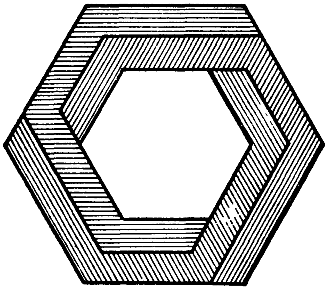

Fig. 3

Scheiben. Im Raum gibt es sogar stabile Packungen aus zwei richtungskonvexen Körpern, z.B. aus zwei ineinandergeschlungenen Ringen. Im Raum ist es aber zweckmässig den Begriff der Richtungskonvexität einzuschränken, indem man Richtungskonvexität bezüglich sämtlicher zu einer Ebene parallelen Geraden verlangt. Wir konstruieren eine stabile Packung aus drei Körpern, die in diesem engeren Sinne richtungskonvex sind. Wir zerlegen eine „Würfelschale" in sechs kongruente Pyramidenstumpfe und vereinigen die gegenüberliegenden Körper durch je eine kürzeste „Stange" zu drei (in engerem Sinne) richtungskonvexen Körpern. Betrachten wir nur zwei von diesen Körpern, und fixieren wir den einen im Raum, so lässt sich der andere nur in einer zu beiden Stangen senkrechte Richtung verschieben. Eine solche Verschiebung wird aber von dem dritten Körper nicht zugelassen.

Im Folgenden wollen wir uns mit Eikörperpackungen beschäftigen. Zunächst erwähnen wir zwei unmittelbare Folgerungen aus dem Satz 1.

Eine Eikörperpackung ist stets verschiebungslabil.

Eine Packung aus mehr als zwei Eikörpern lässt sich nicht dadurch stabilisieren, dass man Paare von anstossenden Eikörpern starr verbindet, es sei denn, dass alle Eikörper in einem gemeinsamen Randpunkt zusammentreffen.

In der Ebene lässt sich die erste Feststellung durch schärfere Aussagen ersetzen. Wir beweisen zunächst den

Satz 2. *Eine Packung endlich vieler Eibereiche ist in jeder Richtung absolut verschiebungslabil.*

Es gibt also zu jeder Richtung eine Scheibe, die sich in dieser Richtung verschieben lässt.

Wir gehen von einer beliebigen Scheibe aus. Lässt sich diese in der vorgegebenen Richtung R nicht verschieben, so wird die Verschiebung durch (wenigstens) eine andere Scheibe verhindert. Wir gehen von der ersten Scheibe zu dieser neuen Scheibe über und setzen dieses Verfahren fort. Wir behaupten, dass wir nach endlich vielen Schritten zu der gewünschten Scheibe gelangen, die sich in der Richtung R verschieben lässt. Sonst gebe es einen Zyklus, in dem die Verschiebung jeder Scheibe durch die nächste verhindert ist. Wir zeichnen die gemeinsamen Stützgeraden von je zwei aufeinander folgenden Scheiben und richten sie nach aussen (Fig. 4). Wir fassen eine Stützgerade S ins Auge und führen sie durch sukzessive Drehungen um je einen Winkel $< \pi$ in die nächste Stützgerade über. Während S in ihre ursprüngliche Lage zurückkehrt, wendet sie sich insgesamt um 2π, und zwar in einem (durch den Zyklus bestimmten) positiven Drehsinn. Deshalb gibt es eine erste Stützgerade S_1 so, dass wir bei der Drehung von S_1

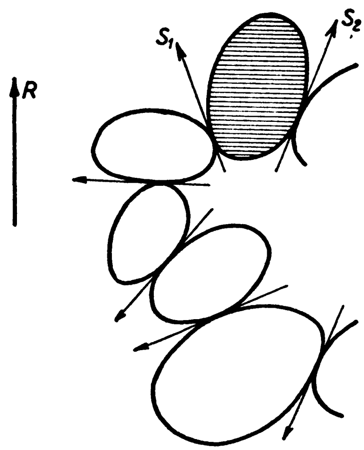

Fig. 4

in die nächste Stützgerade S_2 die Richtung R in positivem Drehsinn fortschreitend übertreten. Dann wird aber die Verschiebung der zwischen S_1 und S_2 liegenden Scheibe nicht durch die nächste gehindert, womit der Satz 2 bewiesen ist.

Das hexagonale Mosaik liefert ein Beispiel für eine relativ stabile Packung aus unendlich vielen Eibereichen. Wir wissen aber, dass eine solche Packung stets verschiebungslabil ist. Der folgende Satz besagt mehr.

Satz 3. *Eine Eibereichenpackung ist in jeder Richtung verschiebungslabil.*

Dies bedeutet, dass man zu einer beliebig vorgegebenen Richtung eine (echte) Scheibenteilmenge herausgreifen kann, die sich in der vorgegebenen Richtung ohne Störung der übrigen Scheiben verschieben lässt. Wir stellen uns die vorgegebene Richtung horizontal vor und wählen ausserhalb der Scheiben oder am Rand einer Scheibe einen Punkt P, so dass die von P ausgehenden beiden horizontalen Halbgeraden je eine Scheibe treffen (Fig. 5). (Gebe es keinen solchen Punkt, so liesse sich jede Scheibe horizontal verschieben.) Wir legen in P zunächst eine punktartige „Blase", dann einen „schweren Punkt", die ohne in die Scheiben eindringen zu können ständig aufwärts bzw. abwärts streben. Stossen die Punkte an eine horizontale Strecke an, so sollen sie sich etwa ständig nach rechts bewegen. Dann beschreiben unsere Punkte

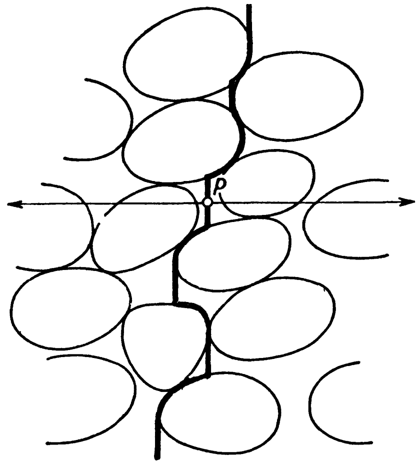

Fig. 5

eine Kurve, die die Scheiben auf der gewünschten Weise in zwei Teilmengen zerlegen.

In krassem Kontrast zum Satz 2 gilt der

SATZ 4. *Es gibt relativ stabile Packungen aus endlich vielen Eikörpern.*

Es sei ABC eine Fläche und O der Mittelpunkt eines regulären Tetraeders R, D der Mittelpunkt der von O gefällten Höhe des Dreiecks ABO und E der Schnittpunkt der Geraden AO und BD (Fig. 6). Wir betrachten das Tetraeder $ACDE$, sowie die weiteren Tetraeder, die aus diesem durch die Drehungen der Drehgruppe von R entstehen. Wir behaupten, dass diese zwölf Tetraeder, zusammen mit dem durch ihnen eingeschlossenen, von kongruen-

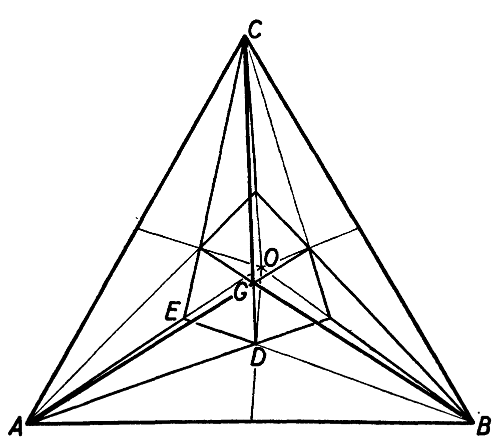

Fig. 6

ten Deltoiden begrenzten Zwölfflach, eine relativ stabile Packung bilden.

Da die Deltoide vollständig auf die Tetraeder aufliegen, haben wir nur die Unbewegbarkeit eines Tetraeders zu zeigen. Die Oberfläche des Tetraeders $ACDE$ liegt mit Ausnahme des Dreiecks ACG vollständig auf die benachbarten Polyederflächen auf, wobei G der von A und C gleichentfernte Punkt der Kante CD ist. Zur Unbewegbarkeit des Tetraeders genügt es die Existenz eines inneren Tetraederpunktes P nachzuweisen, dessen sämtliche Projektionen auf die Flächenebenen auf aufliegende Flächenteile fallen. Da P bei jeder Bewegung zu einer der vier Flächenebenen näher rückt, müsste das Tetraeder bei jeder Bewegung in ein Nachbarpolyeder hineindringen. Wir werden zeigen, dass jeder Punkt P der zu E gehörigen Höhe EF des Tetraeders der genannten Eigenschaft Genüge leistet.

Projizieren wir E senkrecht zu der Ebene ABC auf die Fläche ADC, so erhalten wir einen Punkt, der aus Symmetriegründen auf der Strecke AG liegt. Deshalb liegt die zu ACD senkrechte Projektion von E, d.h. der Höhenfusspunkt F, im Inneren des Dreiecks AGD. Es lässt sich nun zeigen, dass die bei A, D und C liegenden Winkel der Dreiecke ADE, DCE und CAE alle spitze Winkel sind. Projizieren wir also diese Dreiecke senkrecht zu ihren Ebenen auf ADC, so wird jede Projektion den Punkt F enthalten. Hieraus folgt umgekehrt, dass die senkrechte Projektion von F, und zugleich jedes Punktes P der Höhe EF, auf die Dreiecksebenen innerhalb der Dreiecke liegen.

Es lässt sich vermuten, dass die zwölf Tetraeder schon für sich, d.h. ohne des Zwölfflaches, eine relativ stabile Packung bilden, aber der Beweis scheint weitere Überlegungen zu erfordern. Um derartige Fragen behandeln zu können wäre es wünschenswert allgemeine Kriterien anzugeben um zu entscheiden, ob gewisse Randpunkte einen Eikörper fixieren oder nicht. Jedenfalls ist unsere Tetraederpackung relativ Verschiebungsstabil.

Im Zusammenhang mit dem Satz 4 erheben sich verschiedene Probleme: Gesucht wird die Mindestzahl 1) der Eikörper, 2) der kongruenten Eikörper, 3) der zentralsymmetrischen Eikörper, die a) eine relativ stabile, b) eine relativ verschiebungsstabile Lagerung bilden können. Da zur Fixierung eines Körpers wenigstens vier weitere Körper nötig sind, ist die gesuchte Mindestzahl in jedem Falle $\geqq 5$. Es lässt sich leicht zeigen, dass jede Packung aus endlich vielen (nicht notwendig kongruenten) Kugeln in jeder Richtung absolut verschiebungslabil ist. Es ist deshalb vorstellbar, dass die gesuchte Zahl in den Fällen 3a) und 3b) unendlich ist.

Wir betrachten ein System von Punkten, die einen Körper (gegen Verschiebungen oder beliebigen Bewegungen) so fixieren, dass ein (echtes) Teilsystem den Körper nicht mehr fixiert. Ein solches System wollen wir ein primitives fixierendes Punktsystem nennen. Aus höchstens wievielen Punkten kann ein primitives fixierendes Punktsystem bestehen? Es ist nicht schwer zu zeigen, dass bei Verschiebungen diese Grösstzahl für singularitätenfreie Eibereiche 4, für beliebige Eibereiche 6, für singularitätenfreie Eikörper 6 und für beliebige Eikörper mindestens 14 beträgt. Als Beispiele betrachten wir einen Kreis und die Ecken des einbeschriebenen Quadrats, ein reguläres Sechseck und seine Ecken, eine Kugel und die Ecken des einbeschriebenen Oktaeders und schliesslich ein Rhombendodekaeder und seine Ecken. Vermutlich ist die gesuchte Zahl im letzten Fall genau 14. Dies würde bedeuten, dass wenn ein Eikörper gegen Verschiebungen durch mehr als 14 Punkten fixiert wird, wenigstens ein Punkt überflüssig ist. Wesentlich schwieriger scheinen die entsprechenden Fragen für allgemeine Bewegungen zu sein.

(Oblatum 8-1-62).