Christian Blatter

Zur Riemannschen Geometrie im Grossen auf dem Möbiusband

Compositio Mathematica, tome 15 (1962-1964), p. 88-107
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1962-1964__15__88_0>

Zur Riemannschen Geometrie im Grossen auf dem Möbiusband

von

Christian Blatter
Basel und Zürich

Unter einem *Möbiusband* verstehen wir im folgenden eine nichtorientierbare zweidimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit M der Klasse $C^r(r \geqq 3)$ mit freier zyklischer Fundamentalgruppe $\{\Gamma\}$. Ist A der Flächeninhalt von M und

$$l_n = \inf_{\gamma \in \Gamma^n} \int_\gamma ds \qquad (n \geqq 1)$$

die *minimale Länge* aller Wege aus Γ^n, so gilt nach Pu [1]

$$(0.1) \qquad A \geqq l_1^2 \frac{2}{\pi} \operatorname{Tg} q,$$

wo q einen konformen Modul darstellt, der von der Riemannschen Metrik auf M abhängt. Bekanntlich lässt sich (0.1) auch folgendermassen formulieren: Die *Extremallänge* der Wege aus Γ beträgt $\frac{\pi}{2} \operatorname{Ctg} q$.

In der vorliegenden Arbeit soll nun u.a. eine universelle, d.h. modulfreie Abschätzung dieser Art hergeleitet werden. Zu diesem Ende bezeichnen wir mit Γ^* die Schar der Transversalen auf M, i.e. der (offenen) Wege, die mit jedem $\gamma \in \Gamma$ Schnittzahl ± 1 haben. Die zugehörige minimale Länge l^* ist offenbar ein Mass für die Breite des Möbiusbandes. Ist ferner

$$l = \inf_{n \geqq 1} l_n$$

die minimale Länge *aller* nicht nullhomotopen geschlossenen Wege auf M [1]), so beweisen wir

Satz 4. Für jedes Möbiusband M gilt

$$A > \tfrac{1}{2} l l^*,$$

und die Konstante $\frac{1}{2}$ kann nicht durch eine grössere ersetzt werden.

Die Fragestellung von Satz 4 ist offenbar ein *gemischtes* Extre-

[1]) Wie das Korollar zu Lemma 1 zeigt, braucht durchaus nicht $l = l_1$ zu sein.

mallängenproblem in dem Sinne, dass statt l_1^2 das für zwei verschiedene Kurvenscharen gebildete Produkt ll^* betrachtet wird. Zur Behandlung derartiger Probleme musste nun eine neue Methode entwickelt werden; insbesondere tritt an die Stelle der im gewöhnlichen Fall stets zum Ziel führenden Schwarzschen Ungleichung die folgende, auch an sich interessante Verallgemeinerung (Lemma 2):

$$(f, g)(f, h) \leqq \tfrac{1}{2}\, ||f||^2(||g||\; ||h|| + (g, h)).$$

Dabei zeigte sich überraschenderweise, dass die Extremalsituation für „konform breite" Möbiusbänder grundsätzlich von der bei „konform schmalen" vorliegenden verschieden ist. Dies war ja von vorneherein nicht zu erwarten.

Die von uns gewählte Darstellung liefert endlich einen einfachen Beweis des obigen Satzes von Pu (Satz 1).

1. Ergebnisse

1.1. Bekanntlich lässt sich auf M und dessen Überlagerungen eine konforme Struktur so festlegen, dass die Riemannsche Metrik von M in den lokalen konformen Parametern erscheint als

$$ds = \rho_M(\zeta)|d\zeta|, \quad \rho_M > 0, \quad \rho_M \in C^1.$$

Insbesondere wird damit die zweiblättrige Überlagerungsfläche $\bar{M}$ von M zu einer Riemannschen Fläche mit freier zyklischer Fundamentalgruppe. Es gibt daher eine eineindeutige konforme Abbildung A, die $\bar{M}$ in ein Ringgebiet

$$R = \{z \mid e^{-q} < |z| < e^{q}\}, \qquad 0 < q \leqq \infty \tag{1.1}$$

oder

$$R = \{z|\; 0 < |z| < 1\} \tag{1.1'}$$

der z-Ebene überführt.

Bezeichnet man mit S die Spurabbildung $\bar{M} \to M$, so wird R vermöge SA^{-1} zweiblättrige Überlagerungsfläche von M. Sei $\{\tilde{\mathsf{T}}\}$ die zugehörige zweielementige Gruppe von Decktransformationen; ihre Erzeugende $\tilde{\mathsf{T}}$ ist ein fixpunktfreier antikonformer involutiver Automorphismus von R. Hieraus folgt leicht, dass (1.1′) entfällt und dass $\tilde{\mathsf{T}}$ notwendig die Gestalt

$$\tilde{\mathsf{T}}: \qquad z \to -\frac{1}{\bar{z}}$$

besitzt.

1.2. Legt man auf der Einheitskugel $S^2 \subset R^3$ die von der euklidischen Metrik des R^3 induzierte konforme Struktur zugrunde und führt man auf S^2 sphärische Koordinaten ϑ, φ $\left(-\frac{\pi}{2} \leqq \vartheta \leqq \frac{\pi}{2},\ 0 \leqq \varphi < 2\pi\right)$ ein, so ist die stereographische Projektion

$$(1.2) \qquad \mathsf{P}: \qquad \varphi = \arg z, \qquad \sin\vartheta = \frac{|z|-|z|^{-1}}{|z|+|z|^{-1}}\,{}^{2})$$

von R auf eine Zone

$$Z = \{p \in S^2 | -\vartheta_0 < \vartheta < \vartheta_0\}, \quad 0 < \vartheta_0 \leqq \frac{\pi}{2}$$

der Sphäre S^2 eine eineindeutige konforme Abbildung. Dabei geht der Einheitskreis in den Äquator ($\vartheta = 0$) über, und es gilt wegen (1.1) und (1.2)

$$(1.3) \qquad \sin\vartheta_0 = \mathrm{Tg}\, q.$$

Nunmehr ist Z eine Realisierung von $\bar{M}$, und zwar wird die zugehörige Gruppe von Decktransformationen erzeugt durch die Abbildung $\mathsf{T} = \mathsf{P}\tilde{\mathsf{T}}\mathsf{P}^{-1}$, die offenbar jeden Punkt $p \in Z$ in seinen Diametralpunkt auf S^2 überführt. Es überlagern also z.B. halbe Grosskreise auf Z Elemente von Γ und Breitenkreise auf Z Elemente von Γ^2.

1.3. Endlich erscheint die Riemannsche Metrik von M auf Z in der Gestalt

$$(1.4) \qquad ds = \rho_M(p)d\bar{s},$$

wo $d\bar{s}$ das euklidische R^3-Linienelement auf S^2 darstellt. Dabei ist

$$(1.5) \qquad \rho_M(p) > 0,\ \rho_M(p) = \rho_M(\mathsf{T}p),\ \rho_M(p) \in C^1 \quad (p \in Z).$$

Im Anschluss an (1.4) und (1.5) wollen wir jede nichtnegative gegenüber T invariante stetige Funktion $\rho(p)$ auf Z als (*zulässige*) *Metrik* bezeichnen, wenn für die auf $M = Z/\mathsf{T}$ festgelegte (i.a. semidefinite) Riemannsche Metrik

$$(1.6) \qquad ds = \rho(p)\,d\bar{s}$$

der Flächeninhalt A_ρ von M endlich ist.

Bemerkungen. (I) Es wird zu keinen Missverständnissen führen, wenn wir den Index ρ im folgenden unterdrücken. Dieselbe Vereinbarung gelte für die zu ρ gehörigen minimalen Längen. (II) Ins-

[2]) Vgl. etwa [2], p. 20.

besondere ist nach (1.5) die M a priori zukommende Metrik ρ_M zulässig. (III) Zwei Metriken $\rho'(p)$ und $\rho''(p)$, die sich auf Z nur um einen konstanten Faktor unterscheiden, werden als gleich angesehen.

1.4. Wir führen nun einige Bezeichnungen ein, die wir im folgenden meist ohne Verweis benützen werden.

(I) Für die in dieser Arbeit auftretenden Winkel α, β, ϑ, ϑ', ϑ_0 und δ setzen wir

$$\sin\alpha = a,\ \sin\beta = b,\ \sin\vartheta = t,\ \sin\vartheta' = t',\ \sin\vartheta_0 = t_0,\ \sin\delta = \tau.$$

(II) Ist $0 \leqq \vartheta' \leqq \vartheta_0$, so sei die Metrik $\rho_{\vartheta'}(p)$ definiert durch

$$\rho_{\vartheta'}(p) = \begin{cases} 1 & (0 \leqq |\vartheta| < \vartheta') \\ \dfrac{\cos\vartheta'}{\cos\vartheta} = \dfrac{\cos\vartheta'}{\sqrt{1-t^2}} & (\vartheta' \leqq |\vartheta| < \vartheta_0). \end{cases}$$

Es ist also $\rho_{\vartheta'}$ für $0 \leqq |\vartheta| < \vartheta'$ gleich der euklidischen Metrik auf S^2 und entspricht für $\vartheta' \leqq |\vartheta| < \vartheta_0$, wie man sich leicht überlegt, bis auf einen konstanten Faktor der euklidischen Metrik in der Mercatorprojektion von Z. In den Bereichen $\vartheta' \leqslant |\vartheta| < \vartheta_0$ bilden daher sowohl die Meridiane wie die Breitenkreise je eine geodätische Parallelschar.

(III) Ist $\vartheta_0 < \dfrac{\pi}{2}$, so sei für $0 \leqq \vartheta' \leqq \vartheta_0$:

$$I_{\vartheta'} = \int_{\vartheta'}^{\vartheta_0} \frac{d\vartheta}{\cos\vartheta} = \int_{t'}^{t_0} \frac{dt}{1-t^2}.$$

Es ist offenbar

$$\lim_{\vartheta_0 \to \frac{\pi}{2}} I_{\vartheta'} = \infty. \tag{1.7}$$

(IV) Es sei θ definiert durch

$$2\theta = \operatorname{tg}\theta, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Es ist $\theta \sim 66°47' > \dfrac{\pi}{3}$.

(V) Ist $\theta \leqq \vartheta_0 < \dfrac{\pi}{2}$, so sei $\alpha = \alpha(\vartheta_0)$ definiert durch

$$\cos\alpha\, I_\alpha = \operatorname{tg}\alpha - 2\alpha, \quad \theta \leqq \alpha \leqq \vartheta_0. \tag{1.8}$$

Es gibt nämlich genau ein $\alpha(\vartheta_0)$ mit diesen Eigenschaften: Trivialerweise ist $\alpha(\theta) = \theta$. Sei daher $\theta < \vartheta_0 < \frac{\pi}{2}$. Betrachtet man in (1.8) α als Variable im Intervall (θ, ϑ_0), so fällt die linke Seite stetig und monoton von $\cos\theta\, I_\theta > 0$ nach 0, während die rechte Seite stetig und monoton von 0 nach $\operatorname{tg}\vartheta_0 - 2\vartheta_0 > 0$ wächst.

Mit Rücksicht auf (1.7) ist

$$\lim_{\vartheta_0 \to \frac{\pi}{2}} \alpha(\vartheta_0) = \frac{\pi}{2}. \tag{1.9}$$

(VI) $\beta = \frac{\pi}{3}$.

1.5. Mit diesen Bezeichnungen beweisen wir in den Abschnitten 2—5 die folgenden Sätze:

Satz 1 (von Pu). Für alle zulässigen Metriken $\rho(p)$ ist

$$l_1^2 \leqq A \frac{\pi}{2 \sin \vartheta_0} \qquad \left(0 < \vartheta_0 \leqq \frac{\pi}{2}\right), \tag{1.10}$$

und zwar gilt das Gleichheitszeichen genau für die Metrik $\rho(p) = \rho_{\vartheta_0}$.

Aus (1.10) folgt mit (1.3) und der obigen Bemerkung (II) sofort die von Pu gegebene Formulierung (0.1) des Satzes.

Ein erstes Beispiel eines gemischten Extremallängenproblems bildet

Satz 2. Für alle zulässigen Metriken $\rho(p)$ ist

$$l_1 l^* \leqq \begin{cases} A \dfrac{\vartheta_0}{\sin \vartheta_0} & (0 < \vartheta_0 \leqq \theta) \\[2ex] A \dfrac{1}{2 \cos \alpha} & \left(\theta \leqq \vartheta_0 < \dfrac{\pi}{2}\right), \end{cases}$$

und zwar gilt das Gleichheitszeichen genau für die Metrik

$$\rho(p) = \begin{cases} \rho_{\vartheta_0} & (0 < \vartheta_0 \leqq \theta) \\[2ex] \rho_\alpha & \left(\theta \leqq \vartheta_0 < \dfrac{\pi}{2}\right). \end{cases}$$

Im parabolischen Fall $\left(\vartheta_0 = \frac{\pi}{2}\right)$ ist nach (1.9) der Quotient $\frac{l_1 l^*}{A}$ unbeschränkt, so dass sich darüber keine universelle Aussage machen lässt. Ersetzt man aber l_1 durch l, so gilt der

Satz 3. Für alle zulässigen Metriken $\rho(p)$ ist

$$(1.11)\quad ll^* \leqq \begin{cases} A\,\dfrac{\vartheta_0}{\sin\vartheta_0} & \left(0 < \vartheta_0 \leqq \dfrac{\pi}{3} = \beta\right) \\ A\,\dfrac{4\beta+2I_\beta}{4\sin\beta+I_\beta} & \left(\beta \leqq \vartheta_0 < \dfrac{\pi}{2}\right), \end{cases}$$

und zwar gilt das Gleichheitszeichen genau für die Metrik

$$\rho(p) = \begin{cases} \rho_{\vartheta_0} & (0 < \vartheta_0 \leqq \beta) \\ \rho_\beta & \left(\beta \leqq \vartheta_0 < \dfrac{\pi}{2}\right). \end{cases}$$

Ferner ist

$$l = 0 \quad \left(\vartheta_0 = \frac{\pi}{2}\right).$$

1.6. Damit ergibt sich nun Satz 4 unmittelbar.

Beweis. Es gilt wegen $\beta < 2\sin\beta$:

$$\frac{\vartheta_0}{\sin\vartheta_0} \leqq \frac{\beta}{\sin\beta} < 2 \quad (0 < \vartheta_0 \leqq \beta),$$

$$\frac{4\beta+2I_\beta}{4\sin\beta+I_\beta} < \frac{4\beta+2I_\beta}{2\beta+I_\beta} = 2 \quad \left(\beta \leqq \vartheta_0 < \frac{\pi}{2}\right).$$

Hieraus und aus Satz 3 folgt in der Tat

$$ll^* < 2A \quad \left(0 < \vartheta_0 \leqq \frac{\pi}{2}\right).$$

Ist anderseits $\beta \leqq \vartheta_0 < \dfrac{\pi}{2}$ und $\rho = \rho_\beta$, so gilt in (1.11) das Gleichheitszeichen. Mit Rücksicht auf (1.7) ist aber

$$\lim_{\vartheta_0 \to \frac{\pi}{2}} \frac{4\beta+2I_\beta}{4\sin\beta+I_\beta} = 2.$$

1.7. Wir verzichten hier auf eine geometrische Beschreibung der Extremalsituationen in den Sätzen 1—3; sie ergibt sich im übrigen unschwer aus den zugehörigen Beweisen.

2. Hilfssätze

2.1. Bekanntlich brauchen wir beim Beweis der Sätze 1—3 „aus Symmetriegründen" nur Metriken der speziellen Gestalt

$$(2.1) \qquad \rho(p) = \rho(\vartheta), \; \rho(-\vartheta) = \rho(\vartheta)$$

in Betracht zu ziehen. Denn zu jedem $\rho(p)$ gibt es ein $\tilde{\rho}(p)$ mit der Eigenschaft (2.1), für das

$$A_{\tilde{\rho}} \leqq A_\rho, \; L_{\tilde{\rho}} \geqq L_\rho \quad (L = l, l^*, l_1, l_2, \ldots)$$

gilt [3]).

2.2. Ist $\rho(p) = \rho(\vartheta)$, bzw. $\rho(p) = \rho(t)$, so folgt mit (1.6)

$$ds^2 = \rho^2(p)\, d\bar{s}^2 = \rho^2(\vartheta)(d\vartheta^2 + \cos^2\vartheta\, d\varphi^2).$$

Dies liefert für die Breitenkreise

$$(2.2) \qquad ds = \rho(\vartheta) \cos\vartheta\, |d\varphi| \quad (\vartheta = \text{const.})$$

und für die Meridiane

$$(2.3) \qquad ds = \rho(\vartheta)\, |d\vartheta| = \frac{\rho(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, |dt| \quad (\varphi = \text{const.}).$$

Ferner erhält man für den Flächeninhalt A des Möbiusbandes $M = Z/\mathsf{T}$:

$$(2.4) \qquad A = 2\pi \int_0^{\vartheta_0} \rho^2(\vartheta) \cos\vartheta\, d\vartheta = 2\pi \int_0^{t_0} \rho^2(t)\, dt.$$

Wir betrachten endlich einen Grosskreis C, der den Äquator im Punkte p_0 unter dem Winkel δ, $0 < \delta < \vartheta_0$, schneidet. Sei p ein Punkt auf C der Breite $\vartheta > 0$ und p' seine Projektion auf den Äquator. Bezeichnet man die euklidische Länge des Grosskreisbogens $p_0 p$ mit $\bar{s}$, so folgt nach dem sphärischen Sinussatz, angewandt auf das (rechtwinklige) Dreieck $p_0 p p'$:

$$\sin\bar{s} = \frac{\sin\vartheta}{\sin\delta} = \frac{t}{\tau}, \quad \bar{s} = \arcsin\frac{t}{\tau}.$$

Wir erhalten daher für das euklidische Linienelement von C:

$$d\bar{s} = \frac{|dt|}{\sqrt{\tau^2 - t^2}} \quad (0 < \tau < t_0)$$

und somit für dasselbe Linienelement bei der Metrik ρ:

$$(2.5) \qquad ds = \rho(t) \frac{|dt|}{\sqrt{\tau^2 - t^2}} \quad (0 < \tau < t_0).$$

[3]) Vgl. etwa [1], p. 58.

2.3. Lemma 1. Wird auf Z die Metrik $\rho_{\vartheta'}$ $(0 \leqq \vartheta' \leqq \vartheta_0)$ zugrundegelegt, so gilt

$$l_1 = \pi,\ l_2 = 2\pi \cos \vartheta',\ l^* = 2(\vartheta' + \cos \vartheta' I_{\vartheta'}), \tag{2.6}$$
$$A = 2\pi(\sin \vartheta' + \cos^2 \vartheta' I_{\vartheta'}),$$

$$l = \min(l_1, l_2) = \pi \min(1, 2\cos\vartheta'). \tag{2.7}$$

Beweis. Es ist offenbar (vgl. 1.4 (II)) l_1 gleich der Länge eines halben Grosskreises in der Zone $|\vartheta| < \vartheta'$, l_2 gleich der Länge eines Breitenkreises mit $\vartheta' \leqq |\vartheta| \leqq \vartheta_0$ und l^* gleich der Länge des Meridians zwischen den beiden Randkreisen von Z. Nun folgt (2.6) unmittelbar aus (2.2) und (2.3), ferner ergibt sich A aus (2.4).

Zum Beweis von (2.7) betrachten wir auf Z ein beliebiges $\gamma \in \Gamma^{2m+1}$, $m \geqq 1$. Es sei

$$\gamma : \vartheta = u(\xi),\ \varphi = v(\xi) \quad (0 \leqq \xi \leqq 1).$$

Setzt man nun

$$\tilde{\gamma} : \vartheta = u(\xi),\ \varphi = \frac{v(\xi)}{2m+1} \quad (0 \leqq \xi \leqq 1),$$

so ist $\tilde{\gamma} \in \Gamma$, und es gilt für die Länge von $\tilde{\gamma}$:

$$\begin{aligned}|\tilde{\gamma}| &= \int_{\tilde{\gamma}} \rho_{\vartheta'}(\vartheta) \sqrt{d\vartheta^2 + \cos^2 \vartheta\, d\varphi^2} \\ &= \int_0^1 \rho_{\vartheta'}(u(\xi)) \sqrt{\dot{u}^2(\xi) + \cos^2 u \frac{\dot{v}^2(\xi)}{(2m+1)^2}}\, d\xi \\ &< \int_0^1 \rho_{\vartheta'}(u(\xi)) \sqrt{\dot{u}^2(\xi) + \cos^2 u\, \dot{v}^2(\xi)}\, d\xi = |\gamma|.\end{aligned}$$

Hieraus schliesst man aber $l_1 \leqq l_{2m+1} (m \geqq 1)$, und ganz analog: $l_2 \leqq l_{2m} (m > 1)$.

Korollar. Ist $\frac{\pi}{3} < \vartheta' \leqq \vartheta_0$ und wird auf Z die Metrik $\rho_{\vartheta'}$ zugrundegelegt, so gilt $l_2 < l_1$.

2.4. Bis zum Schluss dieses Abschnitts bezeichnen griechische Minuskeln reelle Zahlen.

Lemma 2. Sind f, g, h nichtverschwindende Elemente eines reellen Hilbertschen Raumes $\mathscr{H}$, so gilt stets

$$(f, g)(f, h) \leqq \tfrac{1}{2} \|f\|^2 (\|g\|\, \|h\| + (g, h)), \tag{2.8}$$

und zwar besteht die Gleichheit nur, wenn entweder gilt

$$\text{(I)} \qquad f = \gamma \left(\frac{g}{\|g\|} + \frac{h}{\|h\|}\right), \quad \gamma \neq 0$$

oder

$$\text{(II)} \qquad (f, g) = 0, \; h = \kappa g, \; \kappa < 0.$$

Beweis. Ist erstens

$$h = \kappa g, \; \kappa \neq 0, \tag{2.9}$$

so geht (2.8) durch Division mit $|\kappa|$ über in

$$\operatorname{sgn} \kappa \, (f, g)^2 \leqq \tfrac{1}{2} \|f\|^2 \|g\|^2 (1 + \operatorname{sgn} \kappa). \tag{2.10}$$

Dies ist für $\kappa < 0$ trivial, und zwar besteht die Gleichheit genau im Fall (II). Für $\kappa > 0$ ist (2.10) nichts anderes als die Schwarzsche Ungleichung; bekanntlich besteht hier die Gleichheit nur, wenn $f = \gamma' g$ ist, d.h. aber im Fall (I) mit $\gamma = \gamma' \dfrac{\|g\|}{2}$.

Trifft zweitens (2.9) nicht zu, so gibt es eindeutig bestimmte reelle Zahlen μ_1, μ_2 und genau ein $k \in \mathscr{H}$ mit

$$f = \mu_1 g + \mu_2 h + k, \qquad (k, g) = (k, h) = 0.$$

Es gilt dann, wie man leicht nachrechnet,

$$\tfrac{1}{2} \|f\|^2 [\|g\| \, \|h\| + (g, h)] - (f, g)(f, h) =$$
$$\tfrac{1}{2} [\|g\| \, \|h\| - (g, h)] (\mu_1 \|g\| - \mu_2 \|h\|)^2 + \tfrac{1}{2} [\|g\| \, \|h\| + (g, h)] \, \|k\|^2.$$

Hier ist die rechte Seite nach der Schwarzschen Ungleichung jedenfalls nichtnegativ und verschwindet, da (2.9) ausgeschlossen wurde, genau für

$$\mu_1 \|g\| = \mu_2 \|h\|, \quad k = 0,$$

i.e. im Fall (I).

2.5. Lemma 3. Liegt für $f, g, h \in \mathscr{H}$ der obige Fall (I) vor, so gilt die Gleichung

$$(\tilde{f}, g)(\tilde{f}, h) = \tfrac{1}{2} \|\tilde{f}\|^2 [\|g\| \, \|h\| + (g, h)]$$

dann und nur dann, wenn $\tilde{f} = \gamma' f$ ist.

Beweis. Nur die zweite Behauptung bedarf eines Beweises; und zwar genügt es nach Lemma 2, zu zeigen, dass h nicht negatives Vielfaches von g ist. Wäre dies aber der Fall, so folgte $f = 0$, gegen die Voraussetzung.

2.6. Lemma 4. Sei $f, g \in \mathscr{H}$ und

$$(f, g) > 0. \tag{2.11}$$

Setzt man dann

$$h = f - \lambda g \tag{2.12}$$

mit

$$\lambda = \frac{||f||^2}{2(f, g)}, \tag{2.13}$$

so liegt bei der Relation

$$f = \lambda g + h$$

Fall (I) von Lemma 2 vor, d.h. es ist

$$\lambda\, ||g|| = ||h||. \tag{2.14}$$

Ferner gilt

$$||g||\, ||h|| + (g, h) = (f, g). \tag{2.15}$$

Beweis. Aus (2.12) und (2.13) folgt

$$||h||^2 = ||f||^2 - 2\frac{||f||^2}{2(f, g)}(f, g) + \lambda^2 ||g||^2$$

und somit wegen (2.11), d.h. $\lambda > 0$, die Relation (2.14).

Nun ergibt sich aus (2.14) und (2.12)

$$||g||\, ||h|| + (g, h) = \lambda\, ||g||^2 + (f, g) - \lambda\, ||g||^2 = (f, g).$$

2.7. Lemma 5. Sei $0 < t' < 1$ und

$$0 \leqq \lambda \leqq \sqrt{1 - t'^2}. \tag{2.16}$$

Dann folgt aus

$$\int_t^{t'} \frac{k(\tau)d\tau}{\sqrt{\tau^2 - t^2}} = 1 - \frac{\lambda}{\sqrt{1 - t^2}} \quad (0 \leqq t < t') \tag{2.17}$$

die Relation

$$\int_0^{t'} k(\tau)\, d\tau = \frac{2}{\pi}(t' - \lambda \arcsin t');$$

ferner ist

$$k(\tau) > 0 \quad (0 \leqq \tau < t').$$

Beweis. Aus (2.17) ergibt sich durch Integration

$$\int_0^{t'}\int_t^{t'}\frac{k(\tau)\,d\tau}{\sqrt{\tau^2-t^2}}\,dt = t'-\lambda\arcsin t'.$$

Hier ist aber die linke Seite gleich

$$\int_0^{t'}k(\tau)\int_0^{\tau}\frac{dt}{\sqrt{\tau^2-t^2}}\,d\tau = \frac{\pi}{2}\int_0^{t'}k(\tau)\,d\tau.$$

Anderseits lässt sich (2.17) leicht auf eine abelsche Integralgleichung zurückführen, so dass $k(\tau)$ explizite berechnet werden kann. Es ist, wenn wir diese Rechnung hier unterdrücken,

$$k(\tau) = \frac{2}{\pi}\frac{\tau}{\sqrt{t'^2-\tau^2}}\left(1-\frac{\lambda\sqrt{1-t'^2}}{1-\tau^2}\right).$$

Nun gilt wegen (2.16)

$$1-\lambda\frac{\sqrt{1-t'^2}}{1-\tau^2} > 1-\frac{\lambda}{\sqrt{1-t'^2}} \geqq 0 \quad (0 \leqq \tau < t').$$

2.8. In den folgenden Abschnitten werde gesetzt

$$(f, g) = \int_0^{t_0} fg\,dt, \qquad ||f||^2 = \int_0^{t_0} f^2\,dt.$$

Damit wird die Menge der über $(0, t_0)$ quadratintegrierbaren reellen Funktionen zu einem (reellen) Hilbertraum $\mathscr{H}$.

3. Beweis von Satz 1

3.1. Nach (2.5) gilt für jede zulässige Metrik $\rho = \rho(t)$:

$$l_1 \leqq 2\int_0^{\tau}\frac{\rho(t)\,dt}{\sqrt{\tau^2-t^2}} \qquad (0 < \tau < t_0); \tag{3.1}$$

denn l_1 kann nicht grösser sein als die Länge eines halben Grosskreises auf Z. Aus (3.1) folgt sofort

$$l_1\frac{\tau}{\sqrt{t_0^2-\tau^2}} \leqq 2\int_0^{\tau}\frac{\tau\rho(t)\,dt}{\sqrt{(t_0^2-\tau^2)(\tau^2-t^2)}} \qquad (0 \leqq \tau < t_0),$$

$$l_1\int_0^{t_0}\frac{\tau\,d\tau}{\sqrt{t_0^2-\tau^2}} \leqq 2\int_0^{t_0}\int_0^{\tau}\frac{\tau\rho(t)\,dt}{\sqrt{(t_0^2-\tau^2)(\tau^2-t^2)}}\,d\tau$$

$$= 2\int_0^{t_0}\rho(t)\int_t^{t_0}\frac{\tau\,d\tau}{\sqrt{(t_0^2-\tau^2)(\tau^2-t^2)}}\,dt.$$

Die Integrale über τ lassen sich leicht berechnen; man erhält

$$l_1 t_0 \leqq \pi \int_0^{t_0} \rho(t)\, dt = \pi(\rho, 1). \tag{3.2}$$

Nun gilt nach Schwarz

$$(\rho, 1)^2 \leqq \|\rho\|^2 \|1\|^2 = \|\rho\|^2 t_0, \tag{3.3}$$

so dass aus (3.2) folgt

$$l_1^2 \leqq \frac{\pi^2}{t_0} \|\rho\|^2 = 2\pi \|\rho\|^2 \frac{\pi}{2t_0},$$

mit (2.4) daher, wie behauptet,

$$l_1^2 \leqq A \frac{\pi}{2 \sin \vartheta_0}. \tag{3.4}$$

Anderseits gilt in (3.3) das Gleichheitszeichen genau für $\rho = \rho_{\vartheta_0}$, in (3.4) also höchstens für $\rho = \rho_{\vartheta_0}$. Dass es für diese Metrik tatsächlich gilt, entnimmt man Lemma 1.

4. Beweis von Satz 2

4.1. Nach (2.3) gilt für jede zulässige Metrik $\rho = \rho(t)$:

$$l^* \leqq 2 \int_0^{t_0} \frac{\rho(t)\, dt}{\sqrt{1-t^2}} = 2\left(\rho, \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right); \tag{4.1}$$

denn l^* kann nicht grösser sein als die Länge eines die beiden Randkreise von Z verbindenden Meridians. Aus (3.1) und (4.1) folgt

$$l^* l_1 \leqq 4\left(\rho, \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right) \int_0^{\tau} \frac{\rho(t)\, dt}{\sqrt{\tau^2-t^2}} \qquad (0 < \tau < t_0),$$

somit für zunächst beliebiges

(4.2) $k(\tau) \geqq 0 \quad (0 \leqq \tau < t_0)$:

$$l^* l_1 \int_0^{t_0} k(\tau)\, d\tau \leqq 4\left(\rho, \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right) \int_0^{t_0} k(\tau) \int_0^{\tau} \frac{\rho(t)\, dt}{\sqrt{\tau^2-t^2}}\, d\tau$$

$$= 4\left(\rho, \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right) \int_0^{t_0} \rho(t) \int_t^{t_0} \frac{k(\tau)\, d\tau}{\sqrt{\tau^2-t^2}}\, dt.$$

Setzt man daher

$$\int_t^{t_0} \frac{k(\tau)\, d\tau}{\sqrt{\tau^2-t^2}} = h(t), \tag{4.3}$$

so ergibt sich

$$l^* l_1 \int_0^{t_0} k(\tau)\,d\tau \leqq 4\left(\rho, \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right)(\rho, h). \tag{4.4}$$

Nun gilt nach Lemma 2

$$4\left(\rho, \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right)(\rho, h) \leqq 2\,||\rho||^2 \left[\left\|\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right\|\,||h|| + \left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, h\right)\right], \tag{4.5}$$

so dass (4.4) übergeht in

$$l^* l_1 \int_0^{t_0} k(\tau)\,d\tau \leqq 2\,||\rho||^2 \left[\left\|\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right\|\,||h|| + \left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, h\right)\right]. \tag{4.6}$$

4.2. Sei zunächst $0 < \vartheta_0 \leqq \theta$. Wir setzen

$$h(t) = 1 - \frac{\lambda}{\sqrt{1-t^2}} \tag{4.7}$$

mit

$$\lambda = \frac{t_0}{2 \arcsin t_0} = \frac{\sin \vartheta_0}{2\vartheta_0}. \tag{4.8}$$

Dann liegt für die Funktionen

$$f = \rho_{\vartheta_0} = 1, \; g = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \tag{4.9}$$

und h der Tatbestand von Lemma 4 vor.

Beweis. Es ist $f, g, h \in \mathscr{H}$ und $h = f - \lambda g$; ferner gilt $(f, g) = \arcsin t_0 > 0$, $||f||^2 = t_0$.

Somit folgt

$$\left\|\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right\|\,||h|| + \left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, h\right) = \arcsin t_0; \tag{4.10}$$

zweitens besteht wegen (4.9) und Lemma 3 in (4.5) die Gleichheit genau für die Metrik $\rho = \rho_{\vartheta_0}$, in (4.6) also höchstens für $\rho = \rho_{\vartheta_0}$.

4.3. Anderseits folgt aus (4.8) und $\vartheta_0 \leqq \theta$:

$$\lambda \leqq \frac{\sin \vartheta_0}{\operatorname{tg} \vartheta_0} = \cos \vartheta_0 = \sqrt{1-t_0^2}.$$

Auf (4.3), (4.7) lässt sich daher Lemma 5 mit $t' = t_0$ anwenden. Es ergibt sich erstens die Gültigkeit von (4.2) bei der Wahl (4.7) von h; zweitens folgt für das Integral linker Hand in (4.6):

$$\int_0^{t_0} k(\tau)\,d\tau = \frac{2}{\pi}\,(t_0 - \lambda \arcsin t_0) = \frac{t_0}{\pi}. \tag{4.11}$$

Mit (4.10) und (4.11) geht nunmehr (4.6) über in

$$l^* l_1 \leqq 2\pi\, ||\rho||^2 \frac{\arcsin t_0}{t_0},$$

so dass mit (2.4) endlich folgt

$$l^* l_1 \leqq A\, \frac{\vartheta_0}{\sin \vartheta_0} \qquad (0 < \vartheta_0 \leqq \theta).$$

Wie in (4.6) gilt hier das Gleichheitszeichen höchstens für $\rho = \rho_{\vartheta_0}$. Für diese Metrik gilt es aber in der Tat, was man leicht anhand von Lemma 1 verifiziert.

4.5. Sei nunmehr $\theta \leqq \vartheta_0 < \frac{\pi}{2}$. Wir setzen in (4.6)

$$h(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\lambda}{\sqrt{1-t^2}} & (0 \leqq t < a) \\ 0 & (a \leqq t < t_0) \end{cases} \tag{4.12}$$

mit

$$\lambda = \cos \alpha = \sqrt{1-a^2}. \tag{4.13}$$

Dann liegt für die Funktionen

$$f = \rho_\alpha = \begin{cases} 1 & (0 \leqq t < a) \\ \dfrac{\cos \alpha}{\sqrt{1-t^2}} & (a \leqq t < t_0) \end{cases}, \quad g = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \tag{4.14}$$

und h der Tatbestand von Lemma 4 vor.

Beweis. Es ist $f, g, h \in \mathscr{H}$ und $h = f - \lambda g$ $(0 \leqq t < t_0)$, ferner gilt

$$(f, g) = \arcsin a + \cos \alpha \int_a^{t_0} \frac{dt}{1-t^2} = \alpha + \cos \alpha\, I_\alpha,$$

somit nach Definition von α:

$$(f, g) = \operatorname{tg} \alpha - \alpha > 0. \tag{4.15}$$

Endlich ist

$$||f||^2 = a + \cos^2\alpha \int_a^{t_0} \frac{dt}{1-t^2} = \sin\alpha + \cos^2\alpha\, I_\alpha$$
$$= \sin\alpha + \cos\alpha\,(\operatorname{tg}\alpha - 2\alpha) = 2\cos\alpha\,(\operatorname{tg}\alpha - \alpha),$$

was zusammen mit (4.15) in der Tat

$$\frac{||f||^2}{2(f,g)} = \cos\alpha$$

liefert.

Aus (2.15) und (4.15) ergibt sich daher

$$(4.16) \qquad \left\| \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \right\| \, ||h|| + \left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, h \right) = \operatorname{tg}\alpha - \alpha;$$

zweitens besteht wegen (4.14) und Lemma 3 in (4.5) die Gleichheit genau für die Metrik $\rho = \rho_\alpha$, in (4.6) also höchstens für $\rho = \rho_\alpha$.

4.5. Gelten anderseits für $k(\tau)$ die Relationen

$$(4.17) \qquad \int_t^a \frac{k(\tau)\,d\tau}{\sqrt{\tau^2 - t^2}} = 1 - \frac{\lambda}{\sqrt{1-t^2}} \qquad (0 \leqq t < a),$$

$$(4.18) \qquad k(\tau) = 0 \qquad (a \leqq \tau < t_0),$$

so ist offenbar $k(\tau)$ die zu (4.12) gehörige Lösung der Gleichung (4.3). Wegen (4.13) lässt sich nun auf (4.17) Lemma 5 mit $t' = a$ anwenden. Es ergibt sich erstens zusammen mit (4.18) die Gültigkeit von (4.2) bei der Wahl (4.12) von h; zweitens folgt für das Integral linker Hand in (4.6):

$$\int_0^{t_0} k(\tau)\,d\tau = \int_0^a k(\tau)\,d\tau = \frac{2}{\pi}(a - \lambda \arcsin a)$$
$$= \frac{2}{\pi}(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha),$$

$$(4.19) \qquad \int_0^{t_0} k(\tau)\,d\tau = \frac{2}{\pi}\cos\alpha\,(\operatorname{tg}\alpha - \alpha).$$

Mit (4.19) und (4.16) geht nunmehr (4.6) über in

$$l^* l_1 \frac{2}{\pi} \cos\alpha\,(\operatorname{tg}\alpha - \alpha) \leqq 2\, ||\rho||^2 (\operatorname{tg}\alpha - \alpha),$$

so dass mit (2.4) endlich folgt

$$l^* l_1 \leqq A \frac{1}{2\cos\alpha} \quad \left(\theta \leqq \vartheta_0 < \frac{\pi}{2}\right).$$

Wie in (4.6) gilt hier das Gleichheitszeichen höchstens für $\rho = \rho_\alpha$. Für diese Metrik gilt es aber in der Tat; zum Beweis verweisen wir wiederum auf Lemma 1.

5. Beweis von Satz 3

5.1. Sei zunächst $0 < \vartheta_0 \leqq \frac{\pi}{3}$. Es ist $\frac{\pi}{3} < \theta$; somit ergibt sich sofort aus Satz 2:

$$l l^* \leqq l_1 l^* \leqq A \frac{\vartheta_0}{\sin\vartheta_0} \quad \left(0 < \vartheta_0 \leqq \frac{\pi}{3}\right). \tag{5.1}$$

Gilt anderseits

$$l l^* = A \frac{\vartheta_0}{\sin\vartheta_0}, \tag{5.2}$$

so folgt mit (5.1)

$$l_1 l^* = A \frac{\vartheta_0}{\sin\vartheta_0}$$

und daher wiederum mit Satz 2: $\rho = \rho_{\vartheta_0}$. Für diese Metrik ist (5.2) in der Tat richtig, wovon man sich anhand von Lemma 1 leicht überzeugt (für $\vartheta_0 \leqq \frac{\pi}{3}$ ist $\cos\vartheta_0 \geqq \frac{1}{2}$).

5.2. Sei zweitens $\frac{\pi}{3} \leqq \vartheta_0 < \frac{\pi}{2}$. Es gilt (4.4) erst recht, wenn darin l_1 durch l ersetzt wird:

$$l^* l \int_0^{t_0} k(\tau)\,d\tau \leqq 4\left(\rho, \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right)(\rho, h), \tag{5.3}$$

wobei wiederum das zunächst beliebige

$$k(\tau) \geqq 0 \quad (0 \leqq \tau < t_0) \tag{5.4}$$

und $h(t)$ durch (4.3) zusammenhängen.

Anderseits ist auch (vgl. (4.1) und (2.2))

$$l^* l \leqq l^* l_2 \leqq 2\int_0^{t_0} \frac{\rho\,dt}{\sqrt{1-t^2}} \cdot 2\pi\rho(\vartheta)\cos\vartheta \quad (0 \leqq \vartheta < \vartheta_0); \tag{5.5}$$

denn es kann l_2 nicht grösser sein als die Länge eines Breitenkreises in Z. Aus (5.5) folgt für zunächst beliebiges

$$\tilde{k}(t) \geqq 0 \quad (0 \leqq t < t_0): \tag{5.6}$$

$$l^* l \frac{1}{\pi} \int_0^{t_0} \tilde{k}(\tau)\, d\tau \leqq 4 \left(\rho, \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right) \int_0^{t_0} \rho(t) \tilde{k}(t) \sqrt{1-t^2}\, dt, \tag{5.7}$$

und damit durch Addition von (5.3) und (5.7):

$$l^* l \int_0^{t_0} \left(k(\tau) + \frac{1}{\pi} \tilde{k}(\tau)\right) d\tau \leqq 4 \left(\rho, \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right) (\rho, h + \tilde{k}(t)\sqrt{1-t^2}). \tag{5.8}$$

Wendet man auf die rechte Seite von (5.8) Lemma 2 an, so ergibt sich

$$l^* l \int_0^{t_0} \left(k(\tau) + \frac{1}{\pi} \tilde{k}(\tau)\right) d\tau \leqq 2 ||\rho||^2 \left[\left|\left| \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \right|\right| \, ||h^*|| + \left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, h^*\right)\right] \tag{5.9}$$

mit

$$h(t) + \tilde{k}(t) \sqrt{1-t^2} = h^*(t). \tag{5.10}$$

5.3. Wir setzen

$$h^*(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\lambda}{\sqrt{1-t^2}} & (0 \leqq t < b) \\ \dfrac{\frac{1}{2} - \lambda}{\sqrt{1-t^2}} & (b \leqq t < t_0) \end{cases} \tag{5.11}$$

mit

$$\lambda = \frac{4b + I_\beta}{8\beta + 4 I_\beta}. \tag{5.12}$$

Dann liegt für die Funktionen

$$f = \rho_\beta = \begin{cases} 1 & (0 \leqq t < b) \\ \dfrac{1}{2\sqrt{1-t^2}} & (b \leqq t < t_0) \end{cases}, \quad g = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \tag{5.13}$$

und h^* der Tatbestand von Lemma 4 vor.

Beweis. Es ist f, g, $h^* \in \mathscr{H}$ und $h^* = f - \lambda g$ $(0 \leqq t < t_0)$, ferner gilt

$$(5.14)\qquad (f, g) = \operatorname{arc}\sin b + \tfrac{1}{2} I_\beta = \beta + \tfrac{1}{2} I_\beta > 0,$$
$$\|f\|^2 = b + \tfrac{1}{4} I_\beta$$

und somit in der Tat

$$\frac{\|f\|^2}{2(f, g)} = \frac{b + \frac{1}{4} I_\beta}{2\beta + I_\beta}.$$

Aus (2.15) und (5.14) ergibt sich daher

$$(5.15)\qquad \left\| \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \right\| \, \|h^*\| + \left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, h^* \right) = \beta + \tfrac{1}{2} I_\beta;$$

zweitens gilt wegen (5.13) und Lemma 3 in (5.9) das Gleichheitszeichen höchstens für die Metrik $\rho = \rho_\beta$.

5.4. Setzen wir ferner

$$(5.16)\qquad h(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\lambda}{\sqrt{1-t^2}} & (0 \leqq t < b) \\ 0 & (b \leqq t < t_0), \end{cases}$$

$$(5.17)\qquad \tilde{k}(t) = \begin{cases} 0 & (0 \leqq t < b) \\ \dfrac{\frac{1}{2} - \lambda}{1 - t^2} & (b \leqq t < t_0), \end{cases}$$

so sind jedenfalls (5.10), (5.11) befriedigt. Ferner folgt sofort aus (5.12):

$$(5.18)\qquad \lambda < \tfrac{1}{2} = \sqrt{1-b^2},$$

so dass auch die Bedingung (5.6) erfüllt ist.

Gelten anderseits für $k(\tau)$ die Relationen

$$(5.19)\qquad \int_t^b \frac{k(\tau)\,d\tau}{\sqrt{\tau^2 - t^2}} = 1 - \frac{\lambda}{\sqrt{1-t^2}} \quad (0 \leqq t < b),$$

$$(5.20)\qquad k(\tau) = 0 \qquad (b \leqq \tau < t_0),$$

so ist offenbar $k(\tau)$ die zu (5.16) gehörige Lösung von (4.3). Wegen (5.18) lässt sich nun auf (5.19) Lemma 5 mit $t' = b$ anwenden. Es ergibt sich erstens zusammen mit (5.20) die Gültigkeit von (5.4) bei der Wahl (5.16) von h; zweitens folgt zusammen mit (5.20) und (5.17) für das Integral linker Hand in (5.9):

$$(5.21)\quad \int_0^{t_0}\left(k(\tau)+\frac{1}{\pi}\tilde{k}(\tau)\right)d\tau=\int_0^b k(\tau)\,d\tau+\frac{\frac{1}{2}-\lambda}{\pi}\int_b^{t_0}\frac{dt}{1-t^2}$$

$$=\frac{2}{\pi}(b-\lambda\arcsin b)+\frac{\frac{1}{2}-\lambda}{\pi}I_\beta.$$

Ersetzt man hier λ gemäss (5.12), so wird die rechte Seite gleich

$$\frac{1}{\pi(8\beta+4I_\beta)}[2b(8\beta+4I_\beta)-2\beta(4b+I_\beta)+I_\beta(4\beta+2I_\beta-4b-I_\beta)]$$
$$=\frac{(2\beta+I_\beta)(4b+I_\beta)}{\pi(8\beta+4I_\beta)}.$$

Statt (5.21) erhalten wir somit

$$(5.22)\qquad \int_0^{t_0}\left(k(\tau)+\frac{1}{\pi}\tilde{k}(\tau)\right)d\tau=\frac{1}{4\pi}(4b+I_\beta).$$

Mit (5.15) und (5.22) geht nunmehr (5.9) über in

$$l^*l\frac{1}{4\pi}(4b+I_\beta)\leqq 2\,||\rho||^2(\beta+\tfrac{1}{2}I_\beta),$$

so dass mit (2.4) endlich folgt

$$l^*l\leqq A\,\frac{4\beta+2I_\beta}{4b+I_\beta}\qquad\left(\beta=\frac{\pi}{3}\leqq\vartheta_0<\frac{\pi}{2}\right).$$

Wie in (5.9) gilt hier das Gleichheitszeichen höchstens für $\rho=\rho_\beta$. Dass es für diese Metrik in der Tat gilt, entnimmt man wiederum Lemma 1.

5.5. Sei endlich $\vartheta_0=\frac{\pi}{2}$ und $\rho(\vartheta)$ eine beliebige zulässige Metrik auf Z. Es ist nach (2.2)

$$l\leqq l_2\leqq 2\pi\rho(\vartheta)\cos\vartheta\qquad\left(0\leqq\vartheta<\frac{\pi}{2}\right),$$

so dass mit (2.4) folgt

$$A=2\pi\int_0^{\pi/2}\rho^2(\vartheta)\cos\vartheta\,d\vartheta\geqq\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{l^2}{\cos\vartheta}d\vartheta.$$

Dies widerspricht der Annahme $l>0$.

LITERATURVERZEICHNIS

P. M. Pu

[1] Some Inequalities in Certain Nonorientable Riemannian Manifolds. Pacific J. Math. 2 (1952), 55—71.

L. V. Ahlfors

[2] Complex Analysis. New York: McGraw-Hill 1953.

(Oblatum 18-11-60)