COMPOSITIO MATHEMATICA

JEAN-PAUL BERTRANDIAS

Suites pseudo-aléatoires et critères d'équirépartition modulo un

Compositio Mathematica, tome 16 (1964), p. 23-28

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1964__16__23_0>

Suites pseudo-aléatoires et critères d'équirépartition modulo un *

par

Jean-Paul Bertrandias

Le but de ce travail est d'obtenir des généralisations du critère fondamental d'équirépartition de van der Corput en partant de certaines propriétés des fonctions pseudo-aléatoires et des fonctions de type positif associées. Ce travail présente quelques analogies avec celui de J. Cigler [4]; nous sommes partis indépendamment du même point de départ [[1], [2]] et d'idées analogues (utilisation de la représentation des fonctions de type positif) mais avec des orientations un peu différentes.

1. Fonctions pseudo-aléatoires et quasi-pseudo-aléatoires

L'origine de ce travail est la théorie des fonctions pseudo-aléatoires [[1], [3]]. Pour l'étude des suites, on utilisera des fonctions $f(n)$ de la variable discrète $n = 0, 1, 2, \ldots$. On prendra alors comme définition:

DÉFINITION 1: *Une fonction $f(n)$ est pseudo-aléatoire si la fonction de corrélation*

$$\gamma(k) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n+k)\overline{f(n)} = M_n f(n+k)\overline{f(n)} \tag{1}$$

existe pour tous les entiers k et est nulle en moyenne quadratique c'est-à-dire que

$$\lim_{K\to\infty} \frac{1}{2K} \sum_{k=-K}^{K-1} |\gamma(k)|^2 = m_k|\gamma(k)|^2 = 0. \tag{2}$$

Si les limites intervenant dans (1) n'existent pas, on peut dans certains cas définir un ensemble G de "fonctions de corrélation généralisées" $\gamma_G(k)$. On suppose que

* Nijenrode lecture.

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |f(n)|^2 = H^2 \quad \text{et} \quad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} f(N) = 0. \tag{3}$$

L'inégalité de Schwarz donne

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n+k)\overline{f(n)} \leqq H^2. \tag{4}$$

Si on considère un arrangement quelconque $(k_0, k_1, k_2, \ldots)$ de la suite $(0, 1, -1, 2, -2, \ldots)$ on peut trouver d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass au moins une suite de suites croissantes d'entiers

$$\{N_i^{(k_0)}\} \geqq \{N_i^{(k_1)}\} \geqq \ldots > 0 \qquad i = 0, 1, 2, \ldots \tag{5}$$

telle que

$$\lim_{i\to\infty} \frac{1}{N_i^{(k_j)}} \sum_{n=0}^{N_i^{(k_j)}-1} f(n+k_j)\overline{f(n)} = \gamma_G(k_j). \tag{6}$$

Définition 2: Si les fonctions $\gamma_G(k_j)$ obtenues pour tous les arrangements et toutes les suites (5) vérifient toutes la condition (2), on dira que *la fonction $f(n)$ est quasi-pseudo-aléatoire.*

2. Propriétés des fonctions pseudo-aléatoires et quasi-pseudo-aléatoires

Les théorèmes connus sur les fonctions pseudo-aléatoires [[1], [8]] s'adaptent facilement au cas discret et aux fonctions quasi-pseudo-aléatoires. On obtient ainsi:

Théorème 1: *Les fonctions $\gamma_G(k)$ [ou $\gamma(k)$] sont bornées par $\gamma_G(0)$ [ou $\gamma(0)$] et sont de type positif.*

D'après le théorème de Bochner-Herglotz, il existe donc des mesures $\alpha_G(\omega)$ non négatives et bornées sur [0, 1] telles que

$$\gamma_G(k) = \int_0^1 e^{2i\pi\omega k} \quad d\alpha_G(\omega). \tag{7}$$

D'après le théorème de Wiener-Schoenberg, on a:

Théorème 2: *Les mesures spectrales $\alpha_G(\omega)$ sont continues,* c'est-à-dire que ces mesures ne comportent pas de masses ponctuelles. La condition (2) est en effet équivalente à la continuité des mesures $\alpha_G(\omega)$.

Entre les moyennes de $f(n)$ et des fonctions $\gamma_G(k)$ on a l'inégalité

$$(8) \qquad \limsup_{N\to\infty} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \right|^2 \leqq \sup_G m_k \gamma_G(k) = \sup_G \Delta\alpha_G,$$

$\Delta\alpha_G$ étant la masse concentrée au point $\omega = 0$. D'après le théorème 2, on a donc:

Théorème 3: *La moyenne d'une fonction pseudo-aléatoire ou quasi-pseudo-aléatoire existe et est nulle.*

Une autre importante propriété de moyenne est la suivante [3]:

Théorème 4: *Le produit d'une fonction pseudo-aléatoire ou quasi-pseudo-aléatoire par une fonction presque périodique au sens de Besicovitch B^2 (p.p.B^2) a une moyenne nulle.*

3. Suites pseudo-aléatoires et quasi-pseudo-aléatoires

A une suite $\{u(n)\}$ de nombres réels définis modulo un, on peut associer de manière biunivoque la fonction:

$$g(n) = e^{2i\pi u(n)}$$

Définition 3: Si toutes les puissances positives $g^l(n)$ de $g(n)$ sont pseudo-aléatoires (resp. quasi-pseudo-aléatoires) on dira que *la suite $\{u(n)\}$ est pseudo-aléatoire (resp. quasi-pseudo-aléatoire).*

On notera $\gamma^{(l)}(k)$ ou $\gamma_G^{(l)}(k)$ les fonctions de corrélation ordinaires ou généralisées des fonctions $g^l(n)$.

D'après les résultats de E. Hlawka [7], on peut dire que *presque toutes les suites sont pseudo-aléatoires*, presque toutes étant entendu au sens de la mesure de Haar sur le tore infini. Les fonctions de corrélation correspondantes sont de la forme:

$$\gamma(0) = 1 \text{ et } \gamma(k) = 0 \text{ pour } k \neq 0.$$

4. Critères classiques d'equirépartition

Le théorème fondamental de H. Weyl peut s'énoncer de la manière suivante:

Théorème 5: *Une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $\{u(n)\}$ soit équirépartie modulo un est que la fonction associée $g(n)$ soit telle que*

$$(9) \qquad M_n g^l(n) = 0$$

pour tout entier l non nul.

Le théorème 3 montre alors immédiatement qu'une suite pseudo-aléatoire ou quasi-pseudo-aléatoire est équirépartie. Dans les critères classiques d'équirépartition, ce sont de telles suites qui interviennent.

THÉORÈME 6: *(van der Corput) Si $\{u(n+k)-u(n)\}$ est équirépartie modulo un quel que soit l'entier k non nul, la suite $\{u(n)\}$ est équirépartie.*

En effet, d'après le théorème 5,

$$M_n \, e^{2i\pi l[u(n+k)-u(n)]} = 0 \tag{10}$$

donc $\gamma^{(l)}(k) = 0$ pour k et l non nuls. Les fonctions $g^l(n)$ sont pseudo-aléatoires pour l non nul. La suite $\{u(n)\}$ est alors pseudo-aléatoire donc équirépartie.

THÉORÈME 7: *Si $\{u(n+k)-u(n)\}$ est équirépartie pour des valeurs de k de densité naturelle 1, la suite $\{u(n)\}$ est équirépartie.*

L'égalité (10), valable pour une suite de valeurs de k de densité 1, donne ici $\gamma_G^{(l)}(k) = 0$ pour une suite de densité 1. Donc *toutes* les fonctions de corrélation généralisées ont une moyenne quadratique nulle. Les fonctions $g^l(n)$ et donc la suite $\{u(n)\}$ sont quasi-pseudo-aléatoires d'où le résultat.

THÉORÈME 8: *(Korobov-Postnikov) Si $\{u(n+k)-u(n)\}$ est équirépartie pour tous les entiers k non nuls ou plus généralement pour des valeurs de k de densité 1 la suite $\{u(\lambda m+\mu)\}$ est équirépartie, μ et $\lambda \neq 0$ étant des entiers fixes.*

Les fonctions $g^l(n)$ sont quasi-pseudo-aléatoires. On peut appliquer le théorème 4 avec la fonction périodique $\varphi(n) = \varphi^l(n)$ définie par

$$\begin{cases} \varphi(n) = 1 \text{ si } n = \mu \text{ modulo } \lambda, \\ \varphi(n) = 0 \text{ si } n \neq \mu \text{ modulo } \lambda. \end{cases}$$

On a $M_m \, e^{2i\pi l u(\lambda m+\mu)} = 0$
et le théorème 5 donne le résultat.

THÉORÈME 9: *Si la suite $\{u(n)\}$ est telle que pour tout entier $l \neq 0$ et pour tout $a > 0$ les inégalités:*

$$|\gamma_G^{(l)}(k)| \geqq a$$

ou à plus forte raison:

$$\limsup_{N\to\infty} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{2i\pi l[u(n+k)-u(n)]} \right| \geqq a$$

n'ont lieu que pour une suite de valeurs de k de densité nulle, la suite $\{u(n)\}$ est équirépartie.

En effet, d'après les conditions imposées, les moyennes quadratiques des fonctions $\gamma_G^{(l)}(k)$ sont toutes nulles et la suite $\{u(n)\}$ est quasi-pseudo-aléatoire donc équirépartie.

5. Autre critère d'équirépartition

Les critères précédents utilisent tous la moyenne quadratique de la fonction de corrélation: Si celle-ci est nulle, la mesure spectrale $\alpha(\omega)$ est continue. On peut utiliser d'autres conditions de continuité de $\alpha(\omega)$.

Si, étant donné un entier $\nu > 0$, on considère la fonction $\gamma_G(\nu h)$ de l'entier h, on voit facilement qu'elle est de type positif et que, par conséquent,

$$\gamma_G(\nu h) = \int_0^1 e^{2i\pi\omega h} d\beta_G(\omega) = \int_0^{1/\nu} e^{2i\pi\omega\nu h} d\beta_G(\nu\omega),$$

$\beta_G(\omega)$ étant une mesure non négative et bornée sur $[0, 1]$. En comparant avec l'expression de $\gamma_G(\nu h)$ donnée par (7), on obtient:

$$\beta_G(\omega) = \sum_{j=0}^{\nu-1} \alpha_G\left(\frac{\omega+j}{\nu}\right)$$

Comme $\alpha_G(\omega)$ et $\beta_G(\omega)$ sont des mesures non négatives et bornées, la continuité de $\beta_G(\omega)$ est équivalente à la continuité de $\alpha_G(\omega)$. Cette condition de continuité permet d'obtenir le critère suivant dont l'énoncé est dû à H. Delange:

THÉORÈME 10: *Si les suites $\{u(n+k)-u(n)\}$ sont équiréparties pour des valeurs de k multiples d'un même entier positif $\nu : k = \nu$, $2\nu, \ldots, h\nu, \ldots$ (ou même simplement pour une suite de valeurs de h de densité 1), la suite $\{u(n)\}$ est équirépartie (ou plus généralement les suites $\{u(\lambda m+\mu)\}$ sont équiréparties).*

En effet, l'hypothèse entraîne que les fonctions $\gamma_G^{(l)}(\nu h)$ ont une moyenne quadratique nulle (en h) et donc que les mesures $\beta_G^{(l)}(\omega)$ correspondantes sont continues. Les mesures $\alpha_G^{(l)}(\omega)$ sont alors aussi continues ou, ce qui revient au même, les fonctions $\gamma_G^{(l)}(k)$ ont une moyenne quadratique nulle. La suite $\{u(n)\}$ est donc quasi-pseudo-aléatoire et est équirépartie.

6. Généralisations

En suivant les méthodes indiquées par E. Hlawka [6] et J. Cigler [4], on peut généraliser la notion de suites pseudo-aléatoires et quasi-pseudo-aléatoires pour des suites d'éléments d'un groupe compact à base dénombrable. On peut ainsi traduire de manière immédiate le théorème 10 par exemple.

Mais on ne peut pas généraliser facilement cette méthode pour l'étude de la répartition des fonctions réelles de la variable réelle [[5] § 11] car la définition d'une fonction (de l'entier n) ou d'une suite quasi-pseudo-aléatoire fait intervenir d'une manière fondamentale le fait que l'ensemble que parcourt la variable est dénombrable.

RÉFÉRENCES

J. Bass

[1] Suites uniformément denses, moyennes trigonométriques, fonctions pseudo-aléatoires. Bull. Soc. Math. Fr. 87, (1959), p. 1–64.

J. Bass et J. P. Bertrandias

[2] Moyennes de sommes trigonométriques et fonctions d'autocorrélation. C.R. Acad. Sc., 245, (1957), p. 2457–2459.

J. P. Bertrandias

[3] Fonctions pseudo-aléatoires et fonctions presque périodiques. C. R. Acad. Sc., 255 (1962), p. 2226–2228.

J. Cigler

[4] Über eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Theorie der Gleichverteilung. J. reine angew. Math., 210, (1962), p. 141–147.

J. Cigler et G. Helmberg

[5] Neuere Entwicklungen der Theorie der Gleichverteilung. Jahresb. d. D.M.V., 64, (1961), p. 1–50.

E. Hlawka

[6] Zur formalen Theorie der Gleichverteilung in kompakten Gruppen — Rend. Circ. Mat. Palermo, 4, (1955), p. 33–47.

E. Hlawka

[7] Erbliche Eigenschaften in der Theorie der Gleichverteilung. Publ. Math., Debrecen, 7, (1960), p. 181–186.

(Oblatum 29-5-63)