

# COMPOSITIO MATHEMATICA

FRITZ HOMAGK

## **Ein intuitionistischer Beweis für den Graphensatz von D. Koenig**

*Compositio Mathematica*, tome 21, n° 3 (1969), p. 292-294

[http://www.numdam.org/item?id=CM\\_1969\\_\\_21\\_3\\_292\\_0](http://www.numdam.org/item?id=CM_1969__21_3_292_0)

© Foundation Compositio Mathematica, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## Ein intuitionistischer Beweis für den Graphensatz von D. Koenig

von

Fritz Homagk

### DEFINITIONEN:

A) Eine nicht leere, durch eine entscheidbare Relation " $<$ " irreflexiv halbgeordnete Spezies  $G$  heiße Koenigscher Graph oder Baum, wenn folgende Kriterien erfüllt sind:

1.  $G$  enthält genau ein Anfangselement  $a_0$ , so daß für alle anderen Elemente  $x$  die Beziehung  $a_0 < x$  gilt. Jedes Element  $x$  hat genau einen unmittelbaren Vorgänger  $y$ , so daß  $y < x$  gilt und aus  $z < x$  stets  $z < y$  oder  $z = y$  folgt.

2. Unvergleichbare (voneinander verschiedene) Elemente haben auch nur unvergleichbare voneinander verschiedene Nachfolger, d.h. gelten die Beziehungen  $x < x_1$  und  $y < y_1$ , aber weder  $x < y$  noch  $y < x$  noch  $x = y$ , so gilt weder  $x_1 < y_1$  noch  $y_1 < x_1$  noch  $x_1 = y_1$ .

3. Jedes Element hat endlich viele oder gar keine unmittelbaren Nachfolger, d.h. für jedes Element  $x$  ist die Spezies der Elemente  $y$ , für die aus  $x < z$  stets  $y \leq z$  folgt, endlich. ( $y \leq z$  heiße:  $y < z$  oder  $y = z$ .)

4. Alle Ketten von  $G$  besitzen eine endliche Länge. (Eine durch die Relation " $<$ " geordnete Teilspezies  $K$  von  $G$  mit genau einem Anfangselement  $k_0$  heiße Kette, falls sie mit je zwei Elementen  $x$  und  $y$  auch alle Elemente  $z$  von  $G$  mit  $x < z$  und  $z < y$  enthält.<sup>1</sup>)

B) Elemente eines Baums heißen ranggleich, wenn sie gleich viele Vorgänger besitzen. Der Rang eines Elementes  $x$  sei die Anzahl seiner Vorgänger, d.h. die Anzahl derjenigen Elemente  $z$ , für die  $z < x$  gilt.

C) Ein Baum heiße geordnet, falls es für jede natürliche Zahl

<sup>1</sup> Vgl. D. Koenig, "Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Kombinatorische Topologie der Streckenkomplexe", Leipzig 1936.

$n$  eine irreflexive Wohlordnungsrelation " $<_n$ " der Spezies der Elemente des Ranges  $n$  mit folgender Eigenschaft gibt: Stehen ranggleiche Elemente  $x$  und  $y$  in der Relation  $x <_n y$  und gilt für Elemente  $x_1$  und  $y_1$  des Ranges  $n_1$   $x < x_1$  und  $y < y_1$ , so gilt  $x_1 <_{n_1} y_1$ .

(Offenbar kann jeder Koenigsche Graph schrittweise zu einem geordneten Baum gemacht werden.)

**SATZ.** Jeder geordnete Koenigsche Graph enthält mindestens eine Kette maximaler endlicher Länge.

**BEWEIS.**  $G_0$  sei ein geordneter Koenigscher Graph. Zu diesem bilde man die Folge  $(G_n)_{n=0;1;2;\dots}$  von Teilgraphen, so daß gilt:

1. Gibt es Elemente des Ranges  $n$  in  $G_n$ , so soll  $G_{n+1}$  auf folgende Weise aus  $G_n$  entstehen:

Bis auf das kleinste bezüglich " $<_n$ " werden alle vorhandenen Endelemente des Ranges  $n$  in  $G_n$  weggelassen, (d.h. nur solche Elemente, welche in  $G_n$  keine Nachfolger bezüglich " $<$ " haben, insofern mindestens zwei vorhanden sind). Enthält  $G_n$  Elemente des Ranges  $n+1$ , wird auch dieses kleinste Endelement weggelassen. Weiterhin läßt man alle Elemente des Ranges  $n-1$  weg, welche nach dem ersten Schritt Endelemente geworden sind. Danach streicht man alle Elemente des Ranges  $n-2$  die durch die angegebenen Streichungen Endelemente geworden sind. Diese Streichung der Endelemente soll sukzessive für alle Ränge  $n-m$  ( $m = 1; 2; \dots; n-1$ ) durchgeführt werden.  $G_{n+1}$  sei der auf diese Weise entstehende Teilgraph.

2. Gibt es keine Elemente des Ranges  $n$  in  $G_n$ , so soll  $G_{n+1}$  mit  $G_n$  identisch sein.

Die Teilgraphen  $G_n$  sind offenbar entscheidbare Teilmengen von  $G_0$ , da die Anzahl der jeweils auszuführenden Konstruktions-schritte endlich ist.

Es soll gezeigt werden, daß der gemeinsame Durchschnitt  $K$  aller Teilgraphen der Folge  $(G_n)_{n=1;2;\dots}$  eine Kette maximaler Länge ist.

1.  $K$  enthält  $a_0$  als einzigen Anfangspunkt.  $K$  ist also nicht leer.

2. Da man bei jedem Schritt nur Endelemente sukzessive wegläßt, muß mit jedem verbleibenden Element auch jeder Vorgänger in  $K$  liegen.

3. Jedes Element von  $K$  hat höchstens einen unmittelbaren Nachfolger.

(Hätte ein Element  $p$  in  $K$  die beiden voneinander verschiedenen unmittelbaren Nachfolger  $x$  und  $y$ , so betrachte man die folgenden in  $K$  enthaltenen Ketten:

Die von  $a_0$  über  $p$  und  $x$  laufende Kette  $K'$ , die aus den bezüglich " $<_r$ " kleinsten in  $K$  enthaltenen Elementen eines jeden Ranges  $r$  (welcher größer als der Rang von  $x$  ist) besteht, und die von  $a_0$  über  $p$  und  $y$  laufende Kette  $K''$ , die des weiteren aus den bezüglich " $<_r$ " kleinsten Nachfolgern von  $y$  eines jeden Ranges  $r$ , der größer der Rang von  $y$  ist, besteht, welche in  $K$  liegen.

Nach Voraussetzung hätten beide Ketten endliche Längen  $l'$  bzw.  $l''$ . Ist  $m$  der Rang von  $x$  und  $y$ , so kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die Beziehung  $x <_m y$  gilt. Wäre nun  $l''$  kleiner oder gleich  $l'$ , so würde das Endelement von  $K''$  nicht mehr in  $G_{l'}$ , also nicht in  $K$  liegen. Wäre  $l'$  kleiner als  $l''$ , so würde das Endelement von  $K'$  nicht mehr in  $G_{l''}$ , also nicht mehr in  $K$  liegen. Da nach Definition von  $K'$  und  $K''$  beide Endelemente zu  $K$  gehören müßten, wäre dies ein Widerspruch. Daher kann kein Verzweigungselement  $p$  in  $K$  existieren.)

Die auf  $K$  eingeschränkte, entscheidbare Halbordnungsrelation " $<$ " ist also eine Ordnung. Da  $K$  mit je zwei Elementen offenbar auch alle dazwischen liegenden enthält, ist  $K$  eine Kette.

$K$  muß aber dann nach Voraussetzung eine endliche Länge  $l$  haben. Gäbe es in  $G_0$  eine Kette  $H$ , deren Länge die von  $K$  überträfe, würde  $G_{l+1}$  nicht das letzte Element von  $K$  enthalten, da dieses den Rang  $l-1$  hat und die Spezies der Elemente des Ranges  $l$  nicht leer wäre. Dies stünde im Widerspruch zur Definition von  $K$ .

$K$  ist daher eine Kette maximaler Länge in  $G_0$ .

*Anmerkung:*

Dieser Beweis des Graphensatzes von D. Koenig macht keinen Gebrauch von dem allgemeinen logischen Prinzip des "tertium non datur" oder gleichwertigen Sätzen bzw. Regeln der Logik. Der Satz stellt jedoch kein Analogon zum Theorem über finite Spreads (Vgl. A. Heyting, "Intuitionism. Studies in Logic", Amsterdam 1956) dar.