COMPOSITIO MATHEMATICA

KARL SIGMUND

Über Verteilungsmaße von Maßfolgen auf kompakten Gruppen

Compositio Mathematica, tome 21, nº 3 (1969), p. 299-311

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1969__21_3_299_0>

© Foundation Compositio Mathematica, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (http://http://www.compositio.nl/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

COMPOSITIO MATHEMATICA, Vol. 21, Fasc. 3, 1969, pag. 299-311
Wolters-Noordhoff Publishing
Printed in the Netherlands

Über Verteilungsmaße von Maßfolgen auf kompakten Gruppen

von

Karl Sigmund

Ziel dieser Arbeit ist es, Bedingungen für die Existenz des Verteilungsmaßes — also des $(C, 1)$-Mittels — von Folgen normierter Maße anzugeben. Dabei werden Methoden und Fragestellungen aus der Theorie der Gleichverteilung mod 1 übertragen. So spielt in § 2 der Begriff der normalen Zahl und in § 3 der der volständig gleichverteilten Folge eine zentrale Rolle. In § 5 wird eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes von van der Corput bewiesen. Die Ausführungen stützen sich besonders auf drei Artikel von Cigler ([2], [3] und [4]). Für Begriffe und Sätze aus der Theorie der Gleichverteilung sei auf [5] verwiesen: für die maßtheoretischen Grundlagen auf [1] und [7].

Die vorliegende Arbeit ist Teil einer Dissertation, die ich unter Anleitung von Herrn Prof. Dr. L. Schmetterer schrieb.

1

Es sei G eine multiplikativ geschriebene kompakte topologische Gruppe, die das erste (und somit auch das zweite) Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. $C(G)$ sei der Banachraum aller stetigen komplexwertigen Funktionen f auf G mit der Norm $\|f\| = \max_{x \in G} |f(x)|$. Unter einem Maß μ auf G verstehen wir ein positives Radonmaß, also ein positives stetiges lineares Funktional $f \to \mu(f) = \int_G f(x) d\mu(x)$ auf $C(G)$. Wie üblich — vgl. [1] — erweitert man den Definitionsbereich des Maßes μ auf die Menge aller μ-integrierbaren Funktionen. Wenn nicht anders erwähnt, sei μ normiert, d.h. es gelte $\mu(1) = 1$. Unter dem Träger $Tr\mu$ des Maßes μ versteht man die kleinste abgeschlossene Menge $H \subset G$, für die $\mu(H) = 1$ gilt.

Als Topologie im Raum $M(G)$ aller Maße auf G betrachten wir stets die schwache Topologie, die durch das System der Halbnormen $\{\mu \to |\mu(f)| : f \in C(G)\}$ definiert wird. Demnach konvergiert eine Folge $\{\mu_n\}$ aus $M(G)$ genau dann gegen ein Maß μ, wenn

$\lim_{n\to\infty}\mu_n(f) = \mu(f)$ für jedes $f \in C(G)$ gilt. $M(G)$ ist kompakt.

Jedem $\mu \in M(G)$ wird ein Maß μ^* adjungiert mittels

$$\mu^*(f) = \int_G f(x^{-1})d\mu(x) \quad \forall f \in C(G).$$

Als Faltungsprodukt der Maße μ und ν wird das Maß $\mu\nu$ erklart mittels $\mu\nu(f) = \int_G\int_G f(xy)d\mu(x)d\nu(y)$ $\forall f \in C(G)$. Mit dieser Operation wird $M(G)$ zur topologischen Halbgruppe. Es gilt die Beziehung $Tr(\mu\nu) = Tr(\mu)Tr(\nu)$. (Vgl. [7]).

Ein Maß μ heißt Häufungsmaß der Folge $\{\mu_n\}$, wenn es eine monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen $\{N_k\}_k$ gibt, so daß $\lim_{k\to\infty} 1/N_k \sum_{n=1}^{N_k}\mu_n = \mu$ gilt. Da $M(G)$ kompakt ist, besitzt jede Folge $\{\mu_n\}$ in $M(G)$ mindestens ein $(C-1)$-Häufungsmaß μ. Wenn μ das einzige $(C-1)$-Häufungsmaß der Folge ist, heißt μ das Verteilungsmaß der μ_n. In diesem Fall gilt also $\lim_{N\to\infty} 1/N \sum_{n=1}^{N}\mu_n(f) = \mu(f)$ für jedes $f \in C(G)$. Die Folge $\{\mu_n\}$ heißt gleichverteilt, wenn sie das Haarsche Maß ω auf G als Verteilungsmaß besitzt.

Mit ε_x bezeichnen wir das in $x \in G$ konzentrierte Punktmaß ($\varepsilon_x(f) = f(x)$ für jedes $f \in C(G)$). Für alle x und y aus G gilt $\varepsilon_x\,\varepsilon_y = \varepsilon_{xy}$ und $\varepsilon_x^* = \varepsilon_{x^{-1}}$. Die Abbildung $x \to \varepsilon_x$ ist eine topologische Abbildung von G auf die Menge der Punktmaße in $M(G)$. In diesem Sinn läßt sich von einer Punktfolge $\{x_n\}$ in G sagen, daß sie ein $(C-1)$-Häufungsmaß (Verteilungsmaß) besitzt bzw. gleichverteilt ist.

1931 bewies van der Corput in [6] den sogenannten Hauptsatz der Theorie der Gleichverteilung: sei $\{x_n\}$ eine Folge von Punkten in der eindimensionalen Torusgruppe $E = [0,1)$ der reellen Zahlen mod 1. Wenn für $h = 1, 2, 3, \cdots$ die Folgen $\{x_{n+h}-x_n\}_n$ gleichverteilt sind, dann ist die Folge $\{x_n\}$ ebenfalls gleichverteilt. Cigler bewies in [3], [4] eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes: Sei $\{\mu_n\}$ eine Folge in $M(G)$. Für $h = 1, 2, 3, \cdots$ besitze die Folge $\{\mu_n^*\,\mu_{n+h}\}_n$ das Verteilungsmaß ν_h. Wenn die Folge $(\nu_h\}$ gleichverteilt ist, dann ist es auch die Folge der μ_n.

In diesem Zusammenhang sei noch ein Satz von Loynes (vgl. [10]) erwähnt, der besagt, daß die Folge $\{\mu_n\}$ in $M(G)$ ein Verteilungsmaß besitzt, falls (für $h = 0, 1, 2, \cdots$) das Maß $\mu_n^*\,\mu_{n+h}$ nicht von n abhängt.

2

Sei T eine stetige Abbildung von G in sich. T induziert eine Abbildung $\mu \to T\mu$ von $M(G)$ in sich mittels $T\mu(f) = \mu(f \circ T)$

$\forall f \in C(G)$. (Dabei bedeutet $\circ$ die Zusammensetzung von Abbildungen.)

Ein Maß μ heißt invariant bezüglich T, wenn $T\mu = \mu$ gilt. Eine Funktion f heißt invariant bezüglich T und μ, wenn μ-fast überall $f \circ T(x) = f(x)$ gilt. Ein in bezug auf T invariantes Maß μ heißt ergodisch bezüglich T, wenn jede μ-meßbare invariante Funktion μ-fast überall konstant ist.

Definition 1: Ein Maß μ heißt normal in bezug auf die stetige Transformation T von G in sich, wenn die Maßfolge $\{T^n\mu\}_n$ gleichverteilt ist in G.

Wählt man speziell für G die Gruppe E der reellen Zahlen mod 1, für μ ein Punktmaß ε_x und für T die Abbildung $g \to ag$ für natürliches $a > 1$, erhält man die Definition einer normalen Zahl: die reelle Zahl $x \in [0, 1)$ heißt normal zur Basis a, wenn die Folge $\{a^n x\}_n$ gleichverteilt in E ist. Diese Definition ist mit der Borelschen äquivalent. (Vgl. [9]).

Ein Maß ν ist genau dann invariant bezüglich T, wenn es Verteilungsmaß der Folge $\{T^n\nu\}_n$ ist. Das ist eine einfache Folgerung aus

Hilfssatz 1: Jedes $(C-1)$-Häufungsmaß einer Folge $\{T^n\mu\}_n$ ist invariant bezüglich T.

Beweis: Sei π ein beliebiges $(C-1)$-Häufungsmaß von $\{T^n\mu\}_n$. Es gibt also eine monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen $\{N_k\}$, so daß gilt:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{N_k+1} (\mu + T\mu + \cdots + T^{N_k}\mu) = \pi.$$

Für beliebiges $f \in C(G)$ gilt:

$$\begin{aligned} \pi(f) &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{N_k+1} (\mu + T\mu + \cdots T^{N_k}\mu)(f) \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{N_k+1} (T\mu + T^2\mu + \cdots T^{N_k+1}\mu)(f) \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{N_k+1} (\mu + T\mu + \cdots T^{N_k}\mu)(f \circ T) \\ &= \pi(f \circ T) = T\pi(f) \end{aligned}$$

w.z.b.w.

Von Interesse ist die Frage, unter welchen Bedingungen ein x in G existiert, so daß das bezüglich T invariante Maß ν Verteilungsmaß der Folge $\{T^n x\}_n$ ist. Daß dies keineswegs stets der Fall ist, sieht man an folgendem Beispiel: Sei T die Transformation $g \to -g$ in der eindimensionalen Torusgruppe E. Das Haarsche Maß auf E ist invariant bezüglich T, doch verschieden von allen Verteilungsmaßen von Folgen $\{T^n x\}_n$ — denn diese sind der Form $\frac{1}{2}(\varepsilon_x+\varepsilon_{-x})$.

Falls jedoch ν ergodisch bezüglich T ist, so ist für ν-fast alle $x \in G$ das Maß ν Verteilungsmaß der Folge $\{T^n x\}_n$. Das folgt aus dem individuellen Ergodensatz (vgl. [8]). Weiters hat Schapiro-Pjatezkij in [15] gezeigt, daß jedes Maß auf E, das invariant bezüglich einer Translation $g \to ag$ ist, Verteilungsmaß einer Folge der Form $\{a^n x\}_n$ ist, und Cigler hat diesen Satz in [2] auf den mehrdimensionalen Fall verallgemeinert.

Hilfssatz 2. Wenn es eine Konstante $c > 0$ gibt und ein Maß ν, das ergodisch bezüglich T ist, so daß für alle nichtnegativen $f \in C(G)$ die Ungleichung

$$\overline{\lim_n} \frac{1}{n+1} (\mu+T\mu+ \cdots +T^n\mu)(f) \leqq c\nu(f)$$

erfüllt ist, dann besitzt die Folge $\{T^n\mu\}_n$ das Verteilungsmaß ν.

Beweis. Sei π ein beliebiges $(C-1)$-Häufungsmaß der Folge $\{T^n\mu\}_n$. Nach Hilfssatz 1 ist π invariant bezüglich T. Für jedes nichtnegative $f \in C(G)$ gilt auf Grund der Voraussetzung $\pi(f) \leqq c\nu(f)$. Durch Approximation folgt daraus $\pi(A) \leqq c\nu(A)$ für alle Borelschen Mengen $A \subset G$. Aus $\nu(A) = 0$ folgt somit $\pi(A) = 0$, d.h., π ist totalstetig bezüglich ν. Nun haben Postnikow und Pjatezkij in [14] folgenden Satz bewiesen: Falls ν ergodisch ist in bezug auf T, dann gibt es kein invariantes Maß $\mu \neq \nu$, das totalstetig bezüglich ν ist (vgl. auch [2]). Mithin gilt $\pi = \nu$. Also ist ν ein Verteilungsmaß der Folge $\{T^n\mu\}_n$.

Satz 1. Sei k eine beliebige natürliche Zahl $\geqq 2$ und ν ein bezüglich T und T^k ergodisches Maß. Wenn die Folge $\{T^n\mu\}_n$ das Maß ν als Verteilungsmaß besitzt, dann ist ν auch das Verteilungsmaß der Folge $\{T^{kn+l}\mu\}_n$ (für $l = 0, 1, 2, \cdots, k-1$). Wenn ν das Verteilungsmaß der Folge $\{T^{kn}\mu\}_n$ ist, so ist ν auch das Verteilungsmaß der Folge $\{T^n\mu\}_n$.

Beweis. Sei ν das Verteilungsmaß der Folge $\{T^n\mu\}_n$. Für $0 \leqq 1 \leqq k-1$ und jedes nichtnegative $f \in C(G)$ gilt:

$$\begin{aligned} T^l \mu(f)+T^{k+l} \mu(f)+ \cdots +T^{k(n-1)+l} \mu(f) \\ \leqq \mu(f)+T\mu(f)+ \cdots +T^{kn-1}\mu(f). \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\overline{\lim_n} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} T^{kj+l} \mu(f) \leqq \overline{\lim_n}\, k \frac{1}{kn} \sum_{j=0}^{kn-1} T^j \mu(f) = k\nu(f).$$

Auf Grund von Hilfssatz 2 folgt der erste Teil der Behauptung.

Sei nun ν das Verteilungsmaß der Folge $\{T^{kn}\mu\}_n$. Sei f beliebig aus $C(G)$. Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} [\mu(f)+T^k\mu(f)+ \cdots +T^{k(n-1)}\mu(f)] = \nu(f)$$

Für $l = 1, 2, \cdots, k-1$ setzen wir statt f die Funktion $f \circ T^l$ — die natürlich ebenfalls ein Element von $C(G)$ ist — in die obige Gleichung ein und erhalten so:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} [\mu(f\circ T^l)+T^k\mu(f\circ T^l)+ \cdots +T^{k(n-1)}\mu(f\circ T^l)] = \nu(f\circ T^l).$$

Da ν invariant bezüglich T ist, gilt also:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} [T^l\mu(f)+T^{k+l}\mu(f)+ \cdots +T^{k(n-1)+l}\mu(f)] = \nu(f).$$

Durch Addition dieser Gleichungen für $l = 0, 1, \cdots, k-1$ und Division durch k erhalt man:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{kn} [\mu(f)+T\mu(f)+ \cdots +T^{kn-1}\mu(f)] = \nu(f).$$

Damit ist der zweite Teil der Behauptung bewiesen.

Wenn speziell ω bezüglich T und T^k ergodisch ist, so folgt aus der Normalität von μ bezüglich T die Normalität von μ bezüglich T^k und umgekehrt. (Der analoge Satz spielt in der Theorie der normalen Zahlen eine wichtige Rolle — vgl. [5]).

3

Es seien μ_i für $1 \leqq i \leqq k$ (bzw. für $i = 1, 2, 3, \cdots$) Maße auf G. Wir bezeichnen mit $\otimes_{i=1}^k \mu_i$ (bzw. mit $\otimes_{i=1}^\infty \mu_i$) das Produktmaß auf G^k (bzw. G^∞), dem k-fachen (bzw. abzählbar-unendlichen) kartesischen Produkt der Gruppe G (vgl. [1]). Falls alle μ_i gleich μ sind, schreiben wir $\otimes_k \mu$ (bzw. $\otimes_\infty \mu$) statt $\otimes_{i=1}^k \mu_i$ (bzw. $\otimes_{i=1}^\infty \mu_i$). Sei S der (stetige) Translationsendomorphismus in G^∞:

$$S(x_1, x_2, \cdots) = (x_2, x_3, \cdots).$$

Es gilt $S(\otimes_{i=1}^\infty \mu_i) = \otimes_{i=2}^\infty \mu_i$.

Definition 2. Die Folge $\{\mu_n\}$ in $M(G)$ heißt vollständig verteilt zum Maß $\mu \in M(G)$, wenn die Folge $\{S^n(\otimes_{i=1}^{\infty}\mu_i)\}_n$ in $M(G^\infty)$ das Verteilungsmaß $\otimes_\infty \mu$ besitzt. Im Falle $\mu = \omega$, also wenn $\otimes_{i=1}^{\infty}\mu_i$ normal bezüglich S ist, heißt $\{\mu_n\}$ vollständig gleichverteilt.

Im Spezialfall einer Folge $\{x_n\}$ von Punkten in $E = [0, 1)$ erhält man so die übliche Definition der vollständig gleichverteilten Zahlenfolge (vgl. [13]).

Der Begriff der normalen Zahl hängt eng mit dem der vollständig gleichverteilten Folge zusammen. Sei a eine natürliche Zahl > 1. Jede Zahl $x \in [0, 1)$ bezitzt eine — im wesentlichen eindeutige — a-adische Darstellung $x = 0, x_1 x_2 x_3 \cdots$, wobei die x_n ganze Zahlen mit $0 \leqq x_n \leqq a-1$ sind. Nach dem Kriterium von Niven-Zuckermann (vgl. [11]) ist x genau dann normal zur Basis a, wenn die Folge $\{x_n\}$ in der Gruppe G_a der natürlichen Zahlen mod a vollständig gleichverteilt ist.

Da unendlich Produktmaße schon durch die Werte, die sie auf den endlichdimensionalen Zylindermengen annehmen, vollständig bestimmt sind, ist Definition 2 äquivalent mit der folgenden: Eine Folge $\{\mu_n\}$ in $M(G)$ heißt vollständig verteilt zum Maß $\mu \in M(G)$, wenn für jede natürliche Zahl k die Folge $\{\otimes_{i=1}^{k}\mu_{n+i}\}_n$ in $M(G^k)$ das Verteilungsmaß $\otimes_k \mu$ besitzt.

Nach dem Satz von Peter-Weyl (vgl. [12]) existiert ein vollständiges System $\mathfrak{U}$ von stetigen irreduziblen unitären endlichdimensionalen Darstellungen $U = (u_{ik}(x))$ der kompakten Gruppe G. Jedes Maß μ auf G ist eindeutig durch die Matrizen $\mu(U) = (\mu(u_{ik}))$ $(U \in \mathfrak{U})$ bestimmt. Für beliebige μ, ν aus $M(G)$ und alle $U \in \mathfrak{U}$ gilt $\mu\nu(U) = \mu(U)\nu(U)$. Außerdem ist $\mu^*(U)$ die zu $\mu(U)$ adjungierte Matrix. Nach dem Stetigkeitstheorem konvergiert eine Folge $\{\mu_n\}$ aus $M(G)$ genau dann gegen ein Maß μ auf G, wenn für alle $U \in \mathfrak{U}$ die Gleichung $\lim_{n\to\infty}\mu_n(U) = \mu(U)$ in der Operatortopologie gilt. (Vgl. [7]).

Hilfssatz 3. Sei k eine beliebige natürliche Zahl. Wenn die Folge $\{\otimes_{i=1}^{k}\mu_{n+i}\}_n$ in $M(G^k)$ das Verteilungsmaß $\otimes_k \mu$ besitzt, dann besitzt die Folge $\{\prod_{i=1}^{k}\mu_{n+i}\}_n$ in $M(G)$ das Verteilungsmaß μ^k.

Beweis. Sei $U \in \mathfrak{U}$ beliebig. Die Abbildung

$$(x_1, x_2, \cdots, x_k) \to U(x_1)U(x_2)\cdots U(x_k)$$

ist auf G^k stetig. Für $n = 1, 2, 3, \cdots$ gilt auf Grund der Eigenschaften der Darstellung:

$$\bigotimes_{i=1}^{k} \mu_{n+i}[U(x_1)U(x_2)\cdots U(x_k)]$$
$$= \int_G \cdots \int_G U(x_1)U(x_2)\cdots U(x_k)d\mu_{n+1}(x_1)d\mu_{n+2}(x_2)\cdots d\mu_{n+k}(x_k)$$
$$= \int_G \cdots \int_G U(x_1x_2\cdots x_k)d\mu_{n+1}(x_1)d\mu_{n+2}(x_2)\cdots d\mu_{n+k}(x_k)$$
$$= \left[\prod_{i=1}^{k} \mu_{n+i}\right](U).$$

Laut Voraussetzung existiert daher $\lim_{N\to\infty} 1/N \sum_{n=1}^{N}[\prod_{i=1}^{k}\mu_{n+i}](U)$ und es gilt:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left[\prod_{i=1}^{k}\mu_{n+i}\right](U)$$
$$= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\bigotimes_{i=1}^{k}\mu_{n+i}[U(x_1)U(x_2)\cdots U(x_k)]$$
$$= \bigotimes_{k}\mu[U(x_1)U(x_2)\cdots U(x_k)]$$
$$= \int_G \cdots \int_G U(x_1)U(x_2)\cdots U(x_k)d\mu(x_1)d\mu(x_2)\cdots d\mu(x_k)$$
$$= \int_G \cdots \int_G U(x_1\, x_2 \cdots x_k)d\mu(x_1)d\mu(x_2)\cdots d\mu(x_k) = \mu^k(U).$$

Nach dem Stetigkeitstheorem ist die Behauptung damit bewiesen.

Hilfssatz 4 (Ito-Kawada, vgl. [4]). Sei $\mu \in M(G)$. Die Folge $\{\mu^n\}_n$ besitzt als Verteilungsmaß das Haarsche Maß auf der kleinsten abgeschlossenen Untergruppe von G, die $Tr\mu$ enthält.

Satz 2. Sei μ ein Maß auf G, dessen Träger G erzeugt. Wenn die Punktfolge $\{x_n\}$ in G vollständig verteilt zum Maße μ ist, so ist die Folge der $y_n = \prod_{i=1}^{n} x_i$ gleichverteilt in G.

Beweis. Sei k eine beliebige natürliche Zahl. Nach Voraussetzung besitzt die Punktfolge $(x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_{n+k})_n$ in G^k das Verteilungsmaß $\otimes_k \mu$. Daher besitzt nach Hilfssatz 3 die Folge $\{\prod_{i=1}^{k} x_{n+i}\}_n$, also die Folge $\{y_n^{-1}y_{n+k}\}_n$, in G das Verteilungsmaß μ^k. Da $Tr\mu$ die Gruppe G erzeugt, ist laut Hilfssatz 4 die Folge $\{\mu^k\}_k$ gleichverteilt. Auf Grund der Cigler'schen Verallgemeinerung des Hauptsatzes von van der Corput folgt daraus, daß die Folge $\{y_n\}$ gleichverteilt ist.

Ein Spezialfall dieses Satzes wurde in [2] bewiesen. Als Korollar folgt, daß $\{\prod_{i=1}^{n} x_i\}_n$ gleichverteilt ist, falls die Punktfolge $\{x_n\}$ vollständig gleichverteilt ist.

4

Bevor wir die Möglichkeit der Verallgemeinerung dieses Satzes auf Maßfolgen untersuchen, sei bemerkt, daß aus der bloßen Gleichverteilung von $\{x_n\}$ im allgemeinen nicht folgt, daß die Folge $\{\prod_{i=1}^n x_i\}_n$ ein Verteilungsmaß besitzt.

Wir konstruieren in der Gruppe G_2 der natürlichen Zahlen mod 2 eine Punktfolge $\{x_n\}$, die gleichverteilt ist und für die die Folge der $y_n = x_1+x_2+\cdots+x_n$ kein Verteilungsmaß besitzt. Dazu bestimmen wir eine monoton gegen 0 fallende Folge reeller Zahlen $\{e_k\}$ aus dem Intervall $(0, \frac{1}{2})$ und definieren durch Induktion eine monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen: für $k = 1, 2, 3, \cdots$ sei n_k die kleinste natürliche Zahl n, so daß $(1+n_{k-1})/n < e_k$ gilt (und es sei $n_0 = 0$).

Für $n = 1, 2, 3, \cdots$ bezeichnen wir der Einfachheit halber mit $X(n)$ das Quadrupel $(x_{4n-3}, x_{4n-2}, x_{4n-1}, x_{4n})$. Die Folge $\{x_n\}$ in G sei folgendermaßen definiert:

$$X(n_{k-1}+1) = (1, 0, 0, 0)$$
$$X(n_{k-1}+2) = X(n_{k-1}+3) = \cdots = X(n_k) = (1, 1, 0, 0)$$

(für $k = 1, 2, 3, \cdots$). Wie man auf Grund der Eigenschaften von $\{n_k\}$ leicht sieht, ist die Folge $\{x_n\}$ gleichverteilt.

Dagegen besitzt die Folge der $y_n = x_1+x_2+\cdots+x_n$ zwei verschiedene Häufungsmaße, nämlich $\frac{1}{4}\varepsilon_0+\frac{3}{4}\varepsilon_1$ und $\frac{3}{4}\varepsilon_0+\frac{1}{4}\varepsilon_1$. Denn wenn man mit $Y(n)$ das Quadrupel $(y_{4n-3}, y_{4n-2}, y_{4n-1}, y_{4n})$ bezeichnet (für $n = 1, 2, 3, \cdots$), so gilt für $k \geqq 1$:

$$Y(n_{2k-1}+1) = (1, 1, 1, 1)$$
$$Y(n_{2k-1}+2) = Y(n_{2k-1}+3) = \cdots = Y(n_{2k}) = (0, 1, 1, 1)$$
$$Y(n_{2k}\ \ +1) = (0, 0, 0, 0)$$
$$Y(n_{2k}\ \ +2) = Y(n_{2k}\ \ +3) = \cdots = Y(n_{2k+1}) = (1, 0, 0, 0).$$

Durch einfache Abschätzungen folgt daraus die Behauptung.

Ähnlich kann man zeigen, daß es Folgen $\{x_n\}$ gibt, die kein Verteilungsmaß besitzen, obwohl die Folgen $\{x_n^{-1}x_{n+h}\}_n$ fur jede natürliche Zahl h ein Verteilungsmaß besitzen. Hierzu verwendet man wieder die oben definierte Folge $\{n_k\}_k$ und bestimmt in G_2 eine Punktfolge $x(n)$ mittels:

$$x(n_{2k}\ \ +1) = x(n_{2k}\ \ +2) = \cdots = x(n_{2k+1}) = 1$$
$$x(n_{2k+1}+1) = x(n_{2k+1}+2) = \cdots = x(n_{2k+2}) = 0$$

(für $k = 0, 1, 2, \cdots$). Wie man leicht sieht, besitzt für $h = 1, 2, 3, \cdots$ die Folge $\{x(n+h)-x(n)\}_n$ in G_2 das Verteilungsmaß ε_0. Die Folge

$\{x(n)\}_n$ jedoch besitzt zwei verschiedene Häufungsmaße, nämlich ε_0 und ε_1.

Andrerseits aber folgt aus dem Hauptsatz von van de Corput, daß die Folge $\{x_n\}$ sogar gleichverteilt ist, wenn man voraussetzt, daß das Verteilungsmaß der Folgen $\{x_n^{-1}x_{n+h}\}_n$ für $h = 1, 2, 3, \cdots$ gleich dem Haarschen Maß ist.

Setzt man $y_1 = x_1$ und $y_n = x_{n-1}^{-1}x_n$ (für $n > 1$), so sieht man, daß es zwar nicht möglich ist, aus der Existenz des Verteilungsmaßes der Folgen $\{\prod_{i=1}^h y_{n+i}\}_n$ für $h = 1, 2, 3, \cdots$ auf die Existenz des Verteilungsmaßes der Folge $\{\prod_{i=1}^n y_i\}_n$ zu schließen; daß jedoch $\{\prod_{i=1}^n y_i\}_n$ gleichverteilt ist, falls die Folgen $\{\prod_{i=1}^h y_{n+i}\}_n$ für $h = 1, 2, 3, \cdots$ gleichverteilt sind. Diesen Satz wollen wir in § 5 auf Maßfolgen verallgemeinern.

5

Sei $\{\mu_n\}$ eine Folge in $M(G)$. In diesem Paragraphen wollen wir hinreichende Bedingungen für die Existenz des Verteilungsmaßes — bzw. für die Gleichverteilung — der Folge der Faltungsprodukte $\{\prod_{i=1}^n \mu_i\}_n$ angeben.

Für den Fall, daß alle μ_i gleich sind, ist die Frage schon seit langem gelöst. (Vgl. Hilfssatz 4). Weiters zeigt man leicht, daß die Folge $\{\prod_{i=1}^n \mu_i\}$ gleichverteilt ist, wenn die Folge der μ_n gegen ω konvergiert.

Falls die Folge $\{\mu_n\}$ eine Periode der Länge L besitzt, so besitzt die Folge der Faltungsprodukte ein Verteilungsmaß. Wie man auf Grund einer einfachen Überlegung sieht, ist das Verteilungsmaß gleich dem Faltungsprodukt des Maßes $1/L \sum_{n=1}^L (\prod_{i=1}^n \mu_i)$ mit dem Haarschen Maß auf der kleinsten abgeschlossenen Untergruppe von G, die den Träger von $\mu_1\mu_2 \cdots \mu_L$ enthält.

Satz 3. Sei $\{\mu_n\}$ eine Folge von Maßen auf der kompakten abelschen Gruppe G. Für $h = 1, 2, 3, \cdots$ besitze die Folge $\{\prod_{i=1}^h \mu_{n+i}\}_n$ ein Verteilungsmaß σ_h. Falls die Folge der σ_h gleichverteilt ist, so ist die Folge $\{\prod_{i=1}^n \mu_i\}_n$ ebenfalls gleichverteilt.

Dem Beweis schicken wir zwei Hilfssätze voraus.

Hilfssatz 5. Sei $\{u_n\}$ eine beschränkte Folge komplexer Zahlen. Wenn für eine monoton wachsende Folge $\{N'\}$ natürlicher Zahlen und für $h = 1, 2, 3, \cdots$ der Grenzwert $s_h = \lim_{N' \to \infty} 1/N' \sum_{n=1}^{N'} u_{n+h}\bar{u}_n$ existiert, so existiert $\lim_{N\to\infty} 1/N \sum_{h=1}^N s_h$ und ist nichtnegativ.

Der Beweis ist in [3] enthalten und sei daher nur kurz skizziert. Da die Folge $\{s_h\}_h$ — wie man leicht überprüft — positiv definit ist, existiert nach dem Satz von Bochner-Herglotz ein (nicht notwendig normiertes) positives Maß σ auf dem Intervall $[0, 1)$, so daß $s_h = \int_0^1 \exp(2\pi\, ihx) d\sigma(x)$ für $h = 1, 2, 3, \cdots$ gilt. Auf Grund des Satzes über dominierte Konvergenz und der Gleichungen

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{h=1}^{N} \exp(2\pi ihx) = \left\langle \begin{array}{l} 1 \text{ für } x \equiv 0 \pmod 1 \\ 0 \text{ für } x \not\equiv 0 \pmod 1 \end{array} \right.$$

folgt daraus

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{h=1}^{N} s_h = \sigma(\{0\}) \geqq 0.$$

Hilfssatz 6. Sei $\{a_n\}$ eine Folge komplexer Zahlen mit $|a_n| \leqq 1$. Wenn für $h = 1, 2, 3, \cdots$ der Grenzwert

$$t_h = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} a_{n+1} a_{n+2} \cdots a_{n+h}$$

existiert und

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{h=1}^{N} t_h = 0$$

gilt, so folgt

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} a_1 a_2 \cdots a_n = 0.$$

Beweis. Für $n = 1, 2, 3, \cdots$ setzen wir $v_n = a_1 a_2 \cdots a_n$. Jedes v_n läßt sich in der Form $\theta_n \exp(2\pi i x_n)$ darstellen mit $0 \leqq \theta_n \leqq 1$ und $x_n \in [0, 1)$. Die Folge $\{\theta_n\}$ ist monoton fallend und beschränkt, also existiert $\theta = \lim_{n\to\infty} \theta_n$. Falls $\theta = 0$ gilt, ist die Behauptung bewiesen. Wir können uns also auf den Fall $\theta \neq 0$ beschränken. Laut Voraussetzung existiert für jedes natürliche h der Grenzwert

$$t_h = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} v_{n+h} v_n^{-1}.$$

Wie man leicht sieht, gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} v_{n+h} v_n^{-1} &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \theta_{n+h}\, \theta_n^{-1} \exp\big(2\pi i(x_{n+h} - x_n)\big) \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \theta_{n+h}\, \theta^{-1} \exp\big(2\pi i(x_{n+h} - x_n)\big) \\
&= \theta^{-2} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \theta_{n+h}\, \theta \exp\big(2\pi i(x_{n+h} - x_n)\big) \\
&= \theta^{-2} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \theta_{n+h}\, \theta_n \exp\big(2\pi i(x_{n+h} - x_n)\big).
\end{aligned}$$

Also existiert für $h = 1, 2, 3, \cdots$ der Grenzwert

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} v_{n+h}\bar{v}_n$$

und ist gleich $\theta^2 t_h$.

Wegen $|v_n| \leqq 1$ gibt es eine monotone Folge natürlicher Zahlen $\{N'\}$ so daß der Grenzwert $m = \lim_{N'\to\infty} 1/N' \sum_{n=1}^{N'} v_n$ existiert. Es genügt zu beweisen, daß $m = 0$ gilt.

Sei $u_n = v_n - m$. Für $h = 1, 2, 3, \cdots$ gilt

$$u_{n+h}\bar{u}_n = v_{n+h}\bar{v}_n - m\bar{u}_n - u_{n+h}\bar{m} - |m|^2$$

Wegen $\lim_{N'\to\infty} 1/N' \sum_{n=1}^{N'} u_n = 0$ folgt, daß der Grenzwert

$$s_h = \lim_{N'\to\infty} \frac{1}{N'} \sum_{n=1}^{N'} u_{n+h}\bar{u}_n$$

existiert und gleich

$$\lim_{N'\to\infty} \frac{1}{N'} \sum_{n=1}^{N'} v_{n+h}\bar{v}_n - |m|^2,$$

also gleich $\theta^2 t_h - |m|^2$ ist. Auf Grund der Voraussetzung

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} t_h = 0$$

folgt

$$-|m|^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{h=1}^{N} s_h.$$

Da dieser letzte Grenzwert laut Hilfssatz 5 nichtnegativ ist, muß $m = 0$ gelten.

Beweis von Satz 3. Da G kommutativ ist, bilden die Charaktere ein vollständiges System von (eindimensionalen stetigen unitären Darstellungen. Es genügt daher zu beweisen, daß für jeden beliebigen nichttrivialen Charakter χ

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mu_1(\chi)\mu_2(\chi) \cdots \mu_n(\chi) = 0$$

gilt. Wegen $|\chi| = 1$ folgt $|\mu_n(\chi)| \leqq 1$ für $n = 1, 2, 3, \cdots$. Auf Grund der Voraussetzungen und des Stetigkeitstheorems existiert für jede natürliche Zahl h der Grenzwert

$$\sigma_h(\chi) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mu_{n+1}(\chi)\mu_{n+2}(\chi) \cdots \mu_{n+h}(\chi)$$

und es gilt

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{h=1}^{N} \sigma_h(\chi) = 0.$$

Laut Hilfssatz 6 strebt somit

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mu_1(\chi)\mu_2(\chi) \cdots \mu_n(\chi)$$

gegen 0. w.z.b.w.

Satz 4. Sei μ ein Maß auf der kompakten abelschen Gruppe G, dessen Träger G erzeugt. Sei $\{\mu_n\}$ eine Folge in $M(G)$, die vollständig verteilt zum Maß μ ist. Dann ist die Folge der Faltungsprodukte $\{\prod_{i=1}^{n} \mu_i\}_n$ gleichverteilt.

Beweis. Da $\{\mu_n\}$ vollständig gleichverteilt ist, besitzt für jede natürliche Zahl h die Folge $\{\otimes_{i=1}^{h} \mu_{n+i}\}_n$ in $M(G^h)$ das Verteilungsmaß $\otimes_h \mu$. Auf Grund von Hilfssatz 3 folgt, daß für $h = 1, 2, 3, \cdots$ die Folgen $\{\prod_{i=1}^{h} \mu_{n+i}\}_n$ in $M(G)$ das Verteilungsmaß μ^h besitzen. Nun ist laut Voraussetzung und Hilfssatz 4 die Folge $\{\mu^h\}_h$ gleichverteilt. Durch Anwendung von Satz 3 erhält man daher die Behauptung.

Insbesonders ist also die Folge $\{\prod_{i=1}^{n} \mu_i\}_n$ gleichverteilt, wenn die Folge $\{\mu_n\}$ vollständig gleichverteilt ist.

Satz 5. Sei μ ein Maß auf der kompakten abelschen Gruppe G, dessen Träger G erzeugt. Wenn die Maßfolge $\{\mu_n\}$ gegen μ konvergiert, dann ist die Folge der Faltungsprodukte $\{\prod_{i=1}^{n} \mu_i\}_n$ gleichverteilt.

Beweis. Da $M(G)$ eine topologische Halbgruppe ist, gilt für jede natürliche Zahl h die Gleichung $\lim_{n\to\infty} \mu_{n+1} \mu_{n+2} \cdots \mu_{n+h} = \mu^h$, also auch $\lim_{N\to\infty} 1/N \sum_{n=1}^{N} \mu_{n+1} \mu_{n+2} \cdots \mu_{n+h} = \mu^h$. Nach Voraussetzung und Hilfssatz 4 ist die Folge $\{\mu^h\}_h$ in G gleichverteilt; auf Grund von Satz 3 folgt mithin, daß die Folge $\{\prod_{i=1}^{n} \mu_i\}$ gleichverteilt ist.

Wie man leicht sieht, gelten die Sätze 3, 4 und 5 auch dann, wenn man statt der Kommutativität von G nur verlangt, daß für jede Darstellung $U \in \mathfrak{U}$ alle Matrizen $\mu_n(U)$ die gleichen Eigenvektoren besitzen.

LITERATUR

N. Bourbaki

[1] Intégration. Chap. I—IV. Hermann & Cie, Paris (1952).

J. Cigler

[2] Der individuelle Ergodensatz in der Theorie der Gleichverteilung mod 1. J. reine angewandte Math. 215 (1960) 91—100.