COMPOSITIO MATHEMATICA

MANFRED HERRMANN
ULRICH STERZ

Über disjunktheitseigenschaften und reguläre Tensorprodukte

Compositio Mathematica, tome 23, nº 4 (1971), p. 471-477
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1971__23_4_471_0>

COMPOSITIO MATHEMATICA, Vol. 23, Fasc. 4, 1971, pag. 471–477
Wolters-Noordhoff Publishing
Printed in the Netherlands

ÜBER DISJUNKTHEITSEIGENSCHAFTEN UND REGULÄRE TENSORPRODUKTE

von

Manfred Herrmann und Ulrich Sterz

Herrn Professor Dr. O. H. Keller zum 65. Geburtstag gewidmet

1.

In [6] und [7] wurden für Obstruktionsbetrachtungen im Rahmen der Schnittheorie ein stellentheoretisches Maß – die sogenannte φ-Disjunktheit zweier Körper – eingeführt und der Zusammenhang zwischen linearer Disjunktheit und φ-Disjunktheit beschrieben.

Will man die lineare Disjunktheit zweier Körper $K, L \supset k$ als Abbildungseigenschaft des Tensorprodukts $K \otimes_k L$ erfassen, so wird man auf Untersuchungen des Kerns des kanonischen Homomorphismus $\psi : K \otimes_k L \to [K, L]$ ([10], III, § 14) geführt. Auf Grund solcher Betrachtungen soll in dieser Note zunächst ein Ergebnis aus [7] (Satz 4) insofern verschärft werden, als wir einen Überblick über diejenigen Stellen φ_i geben, für die allein man die Bedingungen '$K\ \varphi_i$-disjunkt L' fordern muß, um zusammen mit geeigneten Gradbedingungen die lineare Disjunktheit charakterisieren zu können. In diesem (stellentheoretischen) Rahmen erhalten wir dann in Anlehnung an [4] hinreichende Bedingungen an $K, L \supset k$ für die Regularität des Tensorprodukts $K \otimes_k L$. Diese Bedingungen erzwingen zwar das Verschwinden der globalen homologischen Dimension von $K \otimes_k L$ (vgl. dazu [2], [4]), implizieren jedoch nicht die lineare Disjunktheit von K und L bezüglich k oder die Separabilität von L/k.

2.

Seien K, L Erweiterungskörper eines Körpers k in einem Universalkörper Ω. Mit φ bezeichnen wir eine feste L-Stelle über $k : L \to \{\Omega, \infty\}$.

2.1. Definition. K heißt φ-disjunkt von L über k, wenn eine Stelle ϕ des Kompositums $K \cdot L$ über k existiert, die φ und den identischen Isomorphismus von K fortsetzt.

Erweitert man den identischen Isomorphismus von K zu einer $K \cdot L$-Stelle ϕ, so gilt K φ-disjunkt L über k für $\varphi =: \phi | L$ [6].

2.2. Sei $[K, L]$ der von K, L in Ω erzeugte Integritätsbereich. Mit ψ bezeichnen wir den kanonischen Homomorphismus von $K \otimes_k L$ auf $[K, L]$:

$$\sum_i r_i \otimes s_i \xrightarrow{\psi} \sum r_i s_i; \qquad r_i, s_i \in K, L.$$

Der Kern dieser Abbildung ist genau dann Null, wenn K linear disjunkt von L über k ist [10].

2.3. Lemma. *Sei $L = k(t_1, \cdots, t_r)$ eine rein transzendente Erweiterung von k. Aus der Existenz einer $\bar{k}$-bewerteten L-Stelle φ_0 mit K φ_0-disjunkt L über k folgt* $\ker \psi = 0$.

Beweis. K φ_0-disjunkt L über k bedeutet [5] die Freiheit der beiden Körper über k. Im vorliegenden Fall ist L eine reguläre Erweiterung von k (d.h. L linear disjunkt von $\bar{k}$ über k). Aus beiden Aussagen folgt [8] K linear disjunkt von L über k und somit $\ker \psi = 0$.

Bemerkung. Ist die Stelle φ_0 des Lemmas sogar k-bewertet, dann kann man $\ker \psi = 0$ ohne zusätzliche Voraussetzungen an L folgern.

2.4. Im folgenden sei $L = k(\vartheta)$ eine einfache algebraische Erweiterung mit dem reduzierten Grad d. Seien $f(x)$, $g(x)$ die Minimalpolynome von ϑ bzgl. k bzw. K.

2.4.1. Lemma. *Der Kern von $\psi : K \otimes_k L \to [K, L]$ ist ein Hauptideal*

Beweis. Nach [10], S. 184 (Th. 35) und S. 196 ist

$$k(\vartheta) \underset{k}{\otimes} K \cong K[x]/(f(x)).$$

Sei $\bar{x}$ die Restklasse von x modulo $f(x)$. Dann induziert ψ einen Homomorphismus $\psi^* : K[x]/(f(x)) \to [k(\vartheta), K] \cong K[x]/(g(x))$ mit

$$\sum a_\nu \bar{x}^\nu \xrightarrow{\psi^*} \sum a_\nu \vartheta^\nu,$$

woraus $\ker \psi^* = (g(\bar{x}))$ folgt.

2.4.2. Lemma. *Seien K, L wie in 2.4.1. $K \otimes_k L$ enthält genau dann keine nilpotenten Elemente (außer der Null), wenn in der Zerlegung $f(x) = \prod_{i=1}^r g_i(x)^{p^{e_i}}$ über K mit $g_1(x) = g(x)$ alle e_i verschwinden.*

Beweis. Sind alle $e_i = 0$, so zerfällt $f(x)$ über K in paarweise verschiedene irreduzible Polynome, woraus sofort die Behauptung in einer Richtung folgt (vgl. [10], S. 196).

Bezeichnet e_{i_0} den größten positiven Exponenten unter den e_i, so ist $f(x)$ kein Teiler von $\prod_i g_i(x)$, d.h. $\prod_i g_i(\bar{x}) \neq 0$, jedoch $(\prod_i g_i(\bar{x}) p^{e_{i_0}}) = 0$.

2.4.3. LEMMA. *K, L wie in 2.4.1. Seien $\varphi_1, \cdots, \varphi_d$ die relativen Isomorphismen von L bzgl. k. Gilt K φ_j-disjunkt L über k für alle $j = 1, \cdots, d$, so ist $g(\bar{x})$ nilpotent.*

BEWEIS. Nach Voraussetzung läßt sich jeder relative Isomorphismus von $L = k(\vartheta)$ über k zu einem relativen Isomorphismus von $K \cdot L = K(\vartheta)$ über K fortsetzen, woraus $(g(x))^{p^e} = f(x)$ für geeignetes e folgt.

BEMERKUNG. Ist insbesondere $e = 0$, d.h. die Grade von ϑ über k und K stimmen überein, dann ist $\ker \psi = 0$.

3.

3.1. Seien $K, L \supset k$ und L sei von endlichem Typ über k, so daß L endlich über der rein transzendenten Erweiterung $k(t_1, \cdots, t_r) = k(t)$ ist: $L = k(t)(\vartheta_1, \cdots, \vartheta_s) = k(t, \vartheta)$. Die reduzierten Grade

$$[k(t)(\vartheta_1, \cdots, \vartheta_i) : k(t)(\vartheta_1, \cdots, \vartheta_{i-1})]_{\mathrm{red}}$$

werden für $i = 1, \cdots, s$ mit d_i bezeichnet.

(R) und (G) bedeuten die Relationen:

$$\begin{aligned} (R) \quad & [k(t, \vartheta) : k(t)]_{\mathrm{red}} = [K(t, \vartheta) : K(t)]_{\mathrm{red}}, \\ (G) \quad & [k(t, \vartheta) : k(t)] \quad\; = [K(t, \vartheta) : K(t)]. \end{aligned}$$

3.1.1. SATZ. K, L wie in 3.1. Es gelten die folgenden Voraussetzungen:

(i) K ϕ_0-disjunkt L über k für eine L-Stelle ϕ_0, deren Einschränkung auf $k(t)$ eine $\bar{k}$-bewertete Stelle φ_0 ergibt.

(ii) Für alle $i = 1, \cdots, s$ existieren jeweils d_i Stellen $\Phi_j^{(i)}$ von L mit K $\Phi_j^{(i)}$-disjunkt L über $k(t)(\vartheta_1, \cdots, \vartheta_{i-1})$, wobei die Einschränkungen $\Phi_j^{(i)}|k(t)(\vartheta_1, \cdots, \vartheta_i)$ die d_i relativen Isomorphismen $\varphi_j^{(i)}$ von $k(t)$ $(\vartheta_1, \cdots, \vartheta_i)$ über $k(t)(\vartheta_1, \cdots, \vartheta_{i-1})$ ergeben mögen.

(iii) Aus (R) folgt (G).

Dann gilt für den durch 2.2. gegebenen Homomorphismus $\psi : \ker \psi = 0$.

BEWEIS. Seien $\Delta_0 =: k(t)$ und $\Delta_i =: k(t)(\vartheta_1, \cdots, \vartheta_i)$ für $i = 1, \cdots, s$. Nach (i) gilt K φ_0-disjunkt Δ_0 über k, woraus nach Lemma 2.3 die Aussage folgt:

$$K \underset{k}{\otimes} \Delta_0 \cong [K, \Delta_0]. \tag{1}$$

Nach (ii) ist $K \cdot \Delta_{i-1}$ $\varphi_j^{(i)}$-disjunkt Δ_i über Δ_{i-1} für alle i, wonach (vgl. Lemma 2.4.3)

$$[\Delta_{i-1}(\vartheta_i) : \Delta_{i-1}]_{\mathrm{red}} = [K \cdot \Delta_{i-1}(\vartheta_i) : K \cdot \Delta_{i-1}]_{\mathrm{red}}$$

und somit (R) gilt. Hieraus folgt nach (iii) die Aussage (G); das bedeutet insbesondere (vgl. [7], S. 270)

$$[\Delta_{i-1}(\vartheta_i) : \Delta_{i-1}] = [K \cdot \Delta_{i-1}(\vartheta_i) : K \cdot \Delta_{i-1}],$$

woraus (vgl. Bemerkung zu Lemma 2.4.3.)

$$(2) \qquad K \cdot \Delta_{i-1} \underset{\Delta_{i-1}}{\otimes} \Delta_i \cong [K \cdot \Delta_{i-1}, \Delta_i] = K \cdot \Delta_i$$

folgt.

Mit (1) erhält man:

$$(3) \qquad K \underset{k}{\otimes} L = K \underset{k}{\otimes} \Delta_s \cong (K \underset{k}{\otimes} \Delta_0) \underset{\Delta_0}{\otimes} \Delta_s \cong [K, \Delta_0] \underset{\Delta_0}{\otimes} \Delta_s .$$

Die sukzessive Anwendung von (2) ergibt:

$$(4) \qquad (K \cdot \Delta_0) \underset{\Delta_0}{\otimes} \Delta_s \cong K \cdot \Delta_s ,$$

woraus

$$(5) \qquad [K, \Delta_0] \underset{\Delta_0}{\otimes} \Delta_s \cong [[K, \Delta_0], \Delta_s] = [K, \Delta_s] = [K, L]$$

folgt. q.e.d.

Bemerkung. Nach Satz 4 in [7] sind die Bedingungen (i), (ii), (iii) auch notwendig.

3.2. Sei L (endlich) algebraisch über dem Körper $\Delta_0 = k(t)$ mit der Charakteristik p. S bezeichne die separable Hülle von Δ_0 in L mit $L = S(\theta_1, \cdots, \theta_r)$ rein inseparabel über S, wobei man sich θ_{i+1} jeweils als p-te Wurzel des Elements $a_i \in S_i = : S(\theta_1, \cdots, \theta_i)$ bei $S_0 = : S$ gegeben denkt $(i = 0, \cdots, r-1)$. Sei $\mathfrak{p}_i$ der Kern der kanonischen Abbildung von

$$K \cdot \Delta_0 \underset{\Delta_0}{\otimes} S_i \to [K \cdot \Delta_0, S_i] = K \cdot S_i .$$

3.2.1. Satz. Mit den Bezeichnungen von 3.2. gelten für $i = 0, \cdots, r-1$ die folgenden Voraussetzungen:

(i) $\theta_{i+1} \notin K \cdot S_i$,

(ii) $1, a_i, \cdots, a_i^{p-1}$ sind (nach Identifizierung mit $1 \otimes 1, \cdots, 1 \otimes a_i^{p-1}$) linear unabhängig über $\mathfrak{p}_i^p \subset K \cdot \Delta_0 \otimes_{\Delta_0} S_i$.

Dann enthält $K \cdot \Delta_0 \oplus_{\Delta_0} L$ keine nilpotenten Elemente.

3.2.2. Bemerkungen. 1. (i) ist äquivalent mit der Forderung, daß das Minimalpolynom von θ_{i+1} bzgl. S_i über dem Körper $K \cdot S_i$ entweder unzerlegbar ist oder in paarweise verschiedene irreduzible Polynome zerfällt (vgl. Lemma 2.4.2.).

2. (i) und (ii) bedeuten i.a. nicht die Nullteilerfreiheit von $K \cdot \Delta_0 \otimes_{\Delta_0} L$.

BEWEIS VON SATZ 3.2.1. (Indutkion). Die Behauptung ist richtig für $i = 0$ (vgl. [10], S. 196).

Nach Induktionsvoraussetzung habe $K \cdot \Delta_0 \otimes_{\Delta_0} S_i$ keine nilpotenten Elemente. Sei $\alpha \in K \cdot \Delta_0 \otimes_{\Delta_0} S_{i+1}$,

$$\alpha = \sum_{j=1}^{m} k_j^{(0)} \otimes s_j + \sum_{j=1}^{m} k_j^{(1)} \otimes s_j \theta_{i+1} + \cdots + \sum_{j=1}^{m} k_j^{(p-1)} \otimes s_j \theta_{i+1}^{p-1},$$

wo $s_1, \cdots, s_m$ eine Basis von S_i über Δ_0 bilden. Ist α nilpotent, so liegt α im Kern $\mathfrak{p}_{i+1}$ des kanonischen Homomorphismus

$$\psi_{i+1} : K \cdot \Delta_0 \underset{\Delta_0}{\otimes} S_{t+1} \to [K \cdot \Delta_0, S_{i+1}], \text{ d.h.}$$

$$\psi_{i+1}(\alpha) = \sum_{j=1}^{m} k_j^{(0)} s_j + \sum_{j=1}^{m} k_j^{(1)} s_j \theta_{i+1} + \cdots + \sum_{j=1}^{m} k_j^{(p-1)} s_j \theta_{i+1}^{p-1} = 0.$$

Daraus folgt wegen (i)

$$\sum_{j=1}^{m} k_j^{(\nu)} s_j = 0,$$

also $$\sum_{j=1}^{m} k_j^{(\nu)} \otimes s_j \in \mathfrak{p}_i \text{ für alle } \nu = 0, \cdots, p-1.$$

Aus α nilpotent folgt $\alpha^{p^e} = 0$ für geeignetes $e > 0$, und da

$$\alpha^p = \sum_{j=1}^{m} k_j^{(0)p} \otimes s_j^p + \sum_{j=1}^{m} k_j^{(1)p} \otimes s_j^p a_i + \cdots + \sum_{j=1}^{m} (k_j^{(p-1)})^p \otimes s_j^p a_i^{p-1} \in K \cdot \Delta_0 \underset{\Delta_0}{\otimes} S_i,$$

ist nach Induktionsvoraussetzung

$$\alpha^p = (\sum_{j=1}^{m} k_j^{(0)} \otimes s_j)^p (1 \otimes 1) + \cdots + (\sum_{j=1}^{m} k_j^{(p-1)} \otimes s_j)^p (1 \otimes a_i^{p-1}) = 0.$$

Wegen (ii) gilt $$(\sum_{j=1}^{m} k_j^{(\nu)} \otimes s_j)^p = 0,$$

also – nach Induktionsvoraussetzung –

$$\sum_{j=1}^{m} k_j^{(\nu)} \otimes s_j = 0,$$

für alle $\nu = 0, \cdots, p-1$, das heißt $\alpha = 0$.

3.2.3. BEMERKUNG. Man könnte Voraussetzung (ii) in 3.2.1 ersetzen durch die Forderung: Enthält $K \cdot \Delta_0 \otimes_{\Delta_0} S_i$ keine nilpotenten Elemente, so enthält das Erweiterungsideal $\Gamma(\mathfrak{p}_i)$ in

$$K\Delta_0 \underset{\Delta_0}{\otimes} S_{i+1} \cong (K \cdot \Delta_0 \underset{\Delta_0}{\otimes} S_i) \underset{S_i}{\otimes} S_{i+1}$$

($\mathfrak{p}_i$ wie in 3.2) keine nilpotenten Elemente. In diesem Fall erhält man die Aussage des Satzes, wenn man zeigt, daß

$$R =: K \cdot \Delta_0 \underset{\Delta_0}{\otimes} S_{i+1}/\Gamma(\mathfrak{p}_i)$$

ohne nilpotente Elemente ist. Nun gilt

$$R \cong (K \cdot \Delta_0 \underset{\Delta_0}{\otimes} S_i/\mathfrak{p}_i) \underset{S_i}{\otimes} S_{i+1} \cong K \cdot S_i \underset{S_i}{\otimes} S_i(\theta_{i+1}),$$

und nach (i) (vgl. 3.2.2. Bemerkung 1 und Lemma 2.4.2) besitzt R keine nilpotenten Elemente.

4.

4.1. Seien $K, L \supset k$ und L von endlichem Typ über k mit $L = \Delta_0(\vartheta_1, \cdots, \vartheta_s)$ wie in 3.1. In Analogie zu [4] betrachten wir die Spektren von $A = K \otimes_k \Delta_0$ und $B = K \otimes_k L$.

B ist ein flacher A-Modul; demzufolge [3], 0.6.3.3 ist der Morphismus f: Spec $B \to$ Spec A insbesondere flach in jedem *abgeschlossenen* Punkt von Spec B. Ferner ist A ein regulärer Ring (vgl. [4], 6.7.4.1). Nach [4], 6.5.2. kann in diesem Fall die Regularität von B aus Regularitätsforderungen an die Fasern $f^{-1}(y) =$ Spec $(B \otimes_A \kappa(y))$ mit $y \in$ Spec A und $\kappa(y) =$ Residuenkörper von A_y gewonnen werden.

Da $B \otimes_A \kappa(y) = \kappa(y) \otimes_A (A \otimes_{\Delta_0} L) \cong \kappa(y) \otimes_{\Delta_0} L =: F(y)$ ist (Isomorphismus von $\kappa(y)$-Moduln), werden wir im folgenden durch geeignete Beziehungen [1] zwischen $\kappa(y)$ und L die Regularität von B erhalten.

4.2.1. Satz. Ist L von endlichem Typ über k und erfüllen $\kappa(y)$ und L die gleichen Forderungen (ii), (iii) wie K und L in 3.1.1, (wobei y die f-Bilder der abgeschlossenen Punkte von Spec B durchläuft), dann ist $K \otimes_k L$ regulär.

Beweis. a) Da L von endlichem Typ über k, ist $F(y)$ nach [10], S. 184 eine endlich erzeugte $\kappa(y)$-Algebra und damit [1], S. 25 und [4], 6.4.4 ein artinscher Ring.

b) Nach Satz 3.1.1 ist $F(y)$ nullteilerfrei. Wegen a) und b) ist $F(y)$ nach [1], S. 70 endliche direkte Summe gewisser Körper und besitzt daher als halbeinfacher Ring die globale homologische Dimension 0 [2], Cor. 2.7, S. 111. Also ist [9], IV-35 $F(y) = \kappa(y) \otimes_{\Delta_0} L$ regulär. Analog zu [4], 6.7.4.1 erhält man hieraus nach [4], 6.5.2 die Regularität der Lokalisierungen von B nach allen maximalen Idealen dieses Ringes. Das bedeutet nach [9], IV-42 die Regularität von $B = K \otimes_k L$. q.e.d.

[1] die u.a. auf Aussagen über die Fortsetzbarkeit gewisser Stellen beruhen.

BEMERKUNG. Aus den Bedingungen (ii), (iii) aus 4.2.1 folgt i.a. nicht die lineare Disjunktheit von K und L über k. Beispiel: Sei $L = \Delta_0$ und K so gewählt, daß K nicht linear disjunkt von L über k. In diesem Fall ist $\kappa(y)$ trivialerweise linear disjunkt von L über Δ_0, und die beiden Tensorprodukte $\kappa(y) \otimes_{\Delta_0} L \cong \kappa(y)$ und $K \otimes_k L$ sind nach [4], 6.7.4.1 regulär. Ferner bedeuten unsere Forderungen nicht die Separabilität von L über k (vgl. [7]).

4.2.2. SATZ. Ist L von endlichem Typ über k und erfüllt $\kappa(y)$ die gleichen Voraussetzungen wie K in Satz 3.2.1, (wobei y die f-Bilder der abgeschlossenen Punkte von Spec B durchläuft), dann ist $K \otimes_k L$ regulär.

BEWEIS. Nach Satz 3.2.1 besitzt $F(y)$ keine nilpotenten Elemente. Nach [1], S. 70 genügt diese Aussage anstelle der Nullteilerfreiheit von $F(y)$ für die Schlüsse im Beweis von Satz 4.2.1.

LITERATUR

N. BOURBAKI
[1] Eléments de mathématique. Livre II. Algèbre. Chapitre VIII. Paris 1967.

H. CARTAN AND S. EILENBERG
[2] Homological algebra. Princeton 1956.

A. GROTHENDIECK
[3] Eléments de géométrie algébrique. I. Le langage des schémas. Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. No. 4 (1960).

A. GROTHENDIECK
[4] Eléments de géométrie algébrique. IV. Etude locale des schémas et de morphismes de schémas. II. Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. No. 24 (1965).

M. HERRMANN
[5] Eine Charakterisierung freier Körper durch den Stellenbegriff. Math. Ann. 159, (1965) 271–272.

M. HERRMANN
[6] Zur Erweiterung algebraischer Spezialisierungen. Math. Ann. 179 (1968) 47–52.

M. HERRMANN UND U. STERZ
[7] Über Obstruktionen bei Spezialisierungserweiterungen. Math. Ann. 182 (1969) 263–272.

S. LANG
[8] Introduction to algebraic geometry. New York: Interscience Publ. 1958.

J.-P. SERRE
[9] Algèbre locale. Multiplicités. Lecture Notes in Mathematics 11. Berlin–New York. Springer 1965.

O. ZARISKI AND P. SAMUEL
[10] Commutative algebra. Vol. I. New York. D. v. Nostrand Comp., Inc. 1958.

(Oblatum 22–VII–70)

M. Herrmann
U. Sterz
Sektion Mathematik
Univ. Halle (Saale)
DDR