Y. COLIN DE VERDIÈRE

Spectre du laplacien et longueurs des géodésiques périodiques. I

Compositio Mathematica, tome 27, nº 1 (1973), p. 83-106
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1973__27_1_83_0>

COMPOSITIO MATHEMATICA, Vol. 27, Fasc. 1, 1973, pag. 83-106
Noordhoff International Publishing
Printed in the Netherlands

SPECTRE DU LAPLACIEN ET LONGUEURS DES GÉODÉSIQUES PÉRIODIQUES I

Y. Colin de Verdière

Introduction

Mac-Kean et Singer ([1] p. 67) posent le problème d'existence d'un analogue de la formule de Poisson pour d'autres variétés que le tore $\boldsymbol{R}^n/\Gamma$, pour lesquel cette formule est

$$\sum_{k\in \boldsymbol{N}} e^{-\lambda_k/t} = \left(\frac{t}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}n} (\mathrm{vol}\, M)\cdot \sum_{\omega\in\Gamma} e^{-|\omega|^2 t/4}$$

où $(\lambda_k)_{k\in \boldsymbol{N}}$ désigne le spectre du laplacien.

On peut remarquer que les $|\omega|$ pour ω dans Γ sont les longueurs des géodésiques périodiques du tore $\boldsymbol{R}^n/\Gamma$. Pour obtenir dans un cas plus général une formule analogue, il est difficile de prendre t réel, $t\to\infty$, à cause de la petitesse des termes $e^{-|\omega|^2 t/4}$, et du développement de Minakshisundaram-Pleijel ([3] p. 215) qui s'écrit pour $t\to\infty$:

$$\sum_{k\in \boldsymbol{N}} e^{-\lambda_k/t} \sim \left(\frac{t}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}n} \left(\mathrm{vol}\, M + \frac{a_1}{t} + \frac{a_2}{t^2} + \dots\right).$$

Nous sommes donc amenés à chercher un développement approché pour t complexe avec $\mathrm{Im}\,(t)\to\infty$. Nous démontrons dans cet article (voir 2-4) le:

THÉORÈME: *Soit M une variété riemannienne compacte de dimension* 2 *à courbure sectionnelle $\sigma < 0$. Soit $(\lambda_k)_{k\in \boldsymbol{N}}$ le spectre de son laplacien* ([3] *p.* 14 *et suivantes*). *Soit $\mathscr{L}$ l'ensemble des classes d'homotopie libre de M et si a est un élément de $\mathscr{L}$, L_a la longueur de l'unique géodésique périodique de a* ([4] *p.* 10 *et suivantes*). *On a*

$$\sum_{k\in \boldsymbol{N}} e^{-\lambda_k/z} = \left(\frac{z}{4\pi}\right) \mathrm{vol}\, M + \left(\frac{z}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{a\in\mathscr{L}-\{\mathrm{Id}\}} u_a e^{-\frac{1}{4}L_a^2} + 0^+(1)$$

où les u_a sont des réels > 0 et $0^+(1)$ est une fonction de z bornée dans les régions $Re(z) \geqq \xi_0 > 0$.

Ce théorème admet le corollaire suivant qu'il est intéressant de rapprocher des résultats d'Huber ([5]).

COROLLAIRE: *Si deux variétés vérifient les hypothèses du théorème précédent et ont même spectre, elles ont même ensemble des longueurs des géodésiques périodiques.*

La méthode utilisée ici repose sur deux points:

(i) Une approximation de la solution fondamentale E de l'équation de la chaleur où l'on prend des temps complexes. Cette approximation utilise une construction faite sur le revêtement riemannien universel de M qui ici est difféomorphe à $\boldsymbol{R}^n$. Ici on suppose seulement $\sigma \leqq 0$ et le raisonnement vaut en dimension quelconque sauf dans 1.3.

(ii) On part ensuite de l'identité

$$\sum_{k \in N} e^{-\lambda_k/z} = \int_M E\left(\frac{1}{z}\ ;\ x, x\right) v_M(x)$$

dans laquelle on reporte l'approximation de (i). L'évaluation quand $\operatorname{Im}(z) \to \infty$ se fait alors par une méthode d'intégrale oscillante qui ressemble à celle utilisée par Balian et Bloch ([2] p. 84 et suivantes). On suppose dans ce 2 que la dimension est 2 et $\sigma < 0$.

Notations: $\boldsymbol{C}^+$ est l'ensemble des nombres complexes z tels que $Re(z) > 0$. Pour tout réel $\xi_0 > 0$, $\boldsymbol{C}_{\xi_0}$ est l'ensemble des nombres complexes tels que $Re(z) \geqq \xi_0$. L'application $z \mapsto z^\alpha$ est définie sur $\boldsymbol{C}^+$ pour α réel comme prolongement holomorphe de l'application $t \mapsto t^\alpha$ définie sur $\boldsymbol{R}^+$ à valeur dans $\boldsymbol{R}^+$. L'écriture $g(z) = 0^+(f(z))$ signifie: pour tout $\xi_0 > 0$, le rapport $|g(z)/f(z)|$ est borné dans $\boldsymbol{C}_{\xi_0}$.

M est une variété riemannienne, C^∞ et de dimension n; σ est la courbure sectionnelle de M. $\tilde{M}$ est le revêtement riemannien universel de M et Γ le groupe des automorphismes de ce revêtement qui est isomorphe au groupe $\pi_1(M)$.

1. Approximation de la solution fondamentale de l'équation de la chaleur

1.1. *Cas d'une variété complète simplement connexe à courbure sectionnelle négative ou nulle bornée.*

M étant une telle variété, on sait que l'application $\exp_m : T_m M \to M$ est un difféomorphisme pour tout m. Nous noterons $\vartheta(m, x)$ le déterminant de l'application tangente à $\exp_m$ au point $\exp_m^{-1}(x)$ et nous introduirons les fonctions $u_i : M \times M \to \boldsymbol{R}$ définies par:

$$u_0(x, y) = \vartheta^{-\frac{1}{2}}(x, y)$$

$$u_i(x, y) = \vartheta^{-\frac{1}{2}}(x, y) \int_0^1 \vartheta^{\frac{1}{2}}(x, \exp_x(\tau \exp_x^{-1}(y)) \times \Delta_2 u_{i-1}(x, \exp_x(\tau \exp_x^{-1}(y))\tau^{i-1} d\tau$$

qui sont utilisées dans [3] p. 204 à 215. On sait que ces fonctions u_i sont C^∞ et que, de plus, si on pose pour $(z; x, y)$ dans $\boldsymbol{C}^+ \times M \times M$

$$(1) \quad S_k(z; x, y) = (4\pi z)^{-\frac{1}{2}n} e^{-d^2(x,y)/4z}(u_0(x, y) + \ldots + z^k u_k(x, y))$$

on a:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \Delta_y\right) S_k(z; x, y) = (4\pi)^{-\frac{1}{2}n} z^{k-\frac{1}{2}n} e^{-d^2(x,y)/4z} \Delta_y u_k(x, y).$$

DÉFINITION: *Une application* $E : \boldsymbol{C}^+ \times M \times M \to \boldsymbol{C}$ *sera dite solution fondamentale complexe de l'équation de chaleur (S.F.C.E.C) si:*

(i) *E est holomorphe par rapport à z, C^2 au moins par rapport à x et y, et vérifie:*

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \Delta_y\right) E = 0$$

(ii) *Pour toute fonction continue à support compact f sur M et tout α, avec $|\alpha| < \pi/2$, on a:*

$$\lim_{\substack{|z| \to 0 \\ |\mathrm{Arg}\, z| \leqq \alpha}} \left(\int_M E(z; x, y) f(y) v_M(y)\right) = f(x)$$

Nous supposerons dans la suite de ce 1.1 que la condition (E) suivante est vérifiée:

(E) *il existe des nombres réels C et h tels que pour tout entier i, $i \leqq n$, et pour tout (x, y) dans $M \times M$ on ait:*

$$|u_i(x, y)| \leqq C e^{hd(x,y)}$$
$$|\Delta_y u_i(x, y)| \leqq C e^{hd(x,y)}.$$

Nous démontrerons en 1.3 cette condition si M est le revêtement riemannien universel d'une variété compacte de dimension $n = 2$.

Soient $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B} : \boldsymbol{C}^+ \times M \times M \to \boldsymbol{C}$, on pose quand cela a un sens:

$$\mathscr{A} * \mathscr{B}(z; x, y) = \int_0^z du \int_M \mathscr{A}(u; x, \xi) \mathscr{B}(z-u; \xi, y) v_M(\xi)$$

où l'intégrale en u est prise sur le segment $(0, z)$ dans $\boldsymbol{C}$.

Nous allons montrer que la série:

$$(2) \quad E(z; x, y) = S_n(z; x, y) - \left\{\sum_{\lambda=1}^{\infty} \left(\left(\frac{\partial}{\partial z} + \Delta_y\right) S_n(z; x, y)\right)^{*\lambda} * S_n(z; x, y)\right\} (-1)^{\lambda+1}$$

définit une S.F.C.E.C sur M et donner une majoration de $|E - S_{[(n-1)/2]}|$.

LEMME 1: *Soit δ la distance euclidienne dans $T_m M$ et d la distance riemannienne dans M; pour tout a, b dans $T_m M$, on a*: $d(\exp_m(a), \exp_m(b) \geqq \delta(a,b)$.

DÉMONSTRATION: Soit γ un chemin C^1 dans $T_m M$ tel que $\gamma(0) = a, \gamma(1) = b$, on a:

$$\delta(a, b) \leqq \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt$$

On sait ([6] p. 253 à 255) que $T_x \exp_m$ augmente la longueur des vecteurs, on a donc:

$$\int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt \leqq \int_0^1 \|T_{\gamma(t)} \exp_m (\dot{\gamma}(t))\| \, dt$$

Si on pose $\varepsilon(t) = \exp_m(\gamma(t))$, cette dernière intégrale est égale à la longueur du chemin ε et comme tout chemin C^1 de $\exp_m(a)$ à $\exp_m(b)$ est de la forme $\exp_m \circ \gamma$ pour un γ C^1 de a à b, on en déduit

$$\delta(a, b) \leqq \inf_{\varepsilon \text{ chemin } C^1 \text{ de } \exp_m(a) \text{ à } \exp_m(b)} (\text{longueur de } \varepsilon) = d(\exp_m(a), \exp_m(b)).$$

LEMME 2: *Soient a et b des réels > 0 et supposons $-A^2 \leqq \sigma \leqq 0$, alors il existe C_1 ne dépendant que de n, h et A tel que*:

$$\begin{aligned}\int_M & e^{-d^2(x,m)/a} \cdot e^{-d^2(y,m)/b} \cdot e^{h(d(x,m)+d(y,m))} v_M(m) \\ & \leqq C_1 \cdot e^{hd(x,y)} \cdot e^{-d^2(x,y)/(a+b)} \cdot e^{\frac{1}{4}(2h+(n-1)A)^2 \cdot ab/(a+b)} \\ & \quad \times \left(\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^{-\frac{1}{2}n} + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^{-n+\frac{1}{2}} \right)\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION: Soit 0 le point du segment géodésique $[x, y]$ tel que $d(x, 0)/a = d(y, 0)/b$ et considérons l'espace Π tangent en 0 à M. Soit ω, ξ, η et μ les images réciproques de 0, x, y et m par l'exponentielle en 0, on a:

$$\frac{\delta^2(\mu, \xi)}{a} + \frac{\delta^2(\mu, \eta)}{b} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \delta^2(\omega, \mu) + \frac{\delta^2(\xi, \eta)}{a+b}$$

Donc en appliquant l'exponentielle en 0 et le lemme 1, il vient:

$$\frac{d^2(m, x)}{a} + \frac{d^2(m, y)}{b} \geqq \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) d^2(0, m) + \frac{d^2(x, y)}{a+b}$$

Posons $r = d(x, y)$; $t = d(0, m)$.

L'intégrale I est majorée par

$$\int_M e^{-r^2/(a+b)} \cdot e^{hr} \cdot e^{2ht} \cdot e^{-(1/a+1/b)t^2} v_M(m)$$

De plus ([6] p. 253) pour toute fonction $f: \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}$

$$\left| \int_M f(t) v_M(m) \right| \leqq n\omega_n \int_0^{+\infty} |f(t)| \left(\frac{shAt}{A} \right)^{n-1} dt$$

où ω_n est le volume de la boule unité euclidienne de dimension n. Donc:

$$I \leqq n\omega_n e^{hr} e^{-r^2/(a+b)} \int_0^{+\infty} e^{-(1/a+1/b)t^2} e^{(2h+(n-1)A)t} \cdot t^{n-1} dt$$

$$(\text{car } shAt \leqq Ate^{At})$$

Cette intégrale se majore bien:

$$J = \int_{\boldsymbol{R}^+} e^{-\alpha t^2} \cdot e^{\beta t} t^{n-1} dt = \int_{\boldsymbol{R}^+} e^{-\alpha(t-\beta/2\alpha)^2} \cdot e^{\beta^2/4\alpha} \cdot t^{n-1} dt$$

$$J = \int_{-\beta/2\alpha}^{+\infty} e^{-\alpha u^2} \cdot e^{\beta^2/4\alpha} \cdot \left(\frac{\beta}{2\alpha} + u \right)^{n-1} du$$

$$J \leqq 2^{n-1} e^{\beta^2/4\alpha} \left[\left(\frac{\beta}{2\alpha} \right)^{n-1} \int_{\boldsymbol{R}} e^{-\alpha u^2} du + \int_{\boldsymbol{R}^+} e^{-\alpha u^2} \cdot u^{n-1} du \right]$$

$$J \leqq C'(n, \beta) e^{\beta^2/4\alpha} (\alpha^{\frac{1}{2}-n} + \alpha^{-\frac{1}{2}n})$$

On en déduit le lemme 2.

LEMME 3: *Soient $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}: \boldsymbol{C}^+ \times M \times M \to \boldsymbol{C}$ tels que*

$$|\mathscr{A}(z; x, y)| \leqq K|z|^\alpha e^{-\frac{1}{4}r^2 \operatorname{Re}(1/z)} \cdot e^{hr}$$

$$|\mathscr{B}(z; x, y)| \leqq L|z|^\beta e^{-\frac{1}{4}r^2 \operatorname{Re}(1/z)} \cdot e^{hr}$$

où α et β sont $\geqslant -n/2$, on a pour tout z tel que $1/z \in \boldsymbol{C}_{\xi_0}$:

$$|\mathscr{A} * \mathscr{B}(z; x, y)| \leqslant KLC_2 e^{hr} \cdot e^{-\frac{1}{4}r^2 \operatorname{Re}(1/z)} |z|^{\alpha+\beta+1} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{2}n+\sup(\alpha, \beta)}$$

où C_2 est un nombre réel qui ne dépend que de n, h, A et ξ_0.

DÉMONSTRATION: On utilise le lemme 2 avec

$$\phi = \operatorname{Arg} z; \quad a = \frac{4|u|}{\cos\phi}, \quad b = \frac{4(|z|-|u|)}{\cos\phi}$$

Donc:

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)^{-1} = \frac{4|z|}{\cos\phi} \vartheta(1-\vartheta) \quad \text{où} \quad \vartheta = \left| \frac{u}{z} \right|$$

$$\frac{1}{a+b} = \frac{\operatorname{Re}(1/z)}{4}$$

$$|\mathscr{A} * \mathscr{B}(z; x, y)| \leqq KL\int_0^{|z|} dv \cdot \int_M e^{-(d^2(x,m)/a + d^2(m,y)/b)} \cdot e^{h[d(x,m)+d(y,m)]} \cdot v^{\alpha}(|z|-v)^{\beta} v_M(m)$$

Il vient donc:

$$|\mathscr{A} * \mathscr{B}(z; x; y)| \leqq KLC_1 e^{hr} \cdot e^{-\frac{1}{4}r^2 \operatorname{Re}(1/z)} \cdot e^{(2h+(n-1)A)^2/2\xi_0} |z|^{\alpha+\beta+1} \cdot \rho(\alpha, \beta)$$

avec:

$$\rho(\alpha, \beta) = \int_0^1 \left\{ \vartheta^{\alpha+\frac{1}{2}n} \cdot (1-\vartheta)^{\beta+\frac{1}{2}n} \cdot \left(\frac{4}{\xi_0}\right)^{\frac{1}{2}n} + \vartheta^{\alpha+n-\frac{1}{2}}(1-\vartheta)^{\beta+n-\frac{1}{2}} \left(\frac{4}{\xi_0}\right)^{n-\frac{1}{2}} \right\} d\vartheta$$

Il suffit donc d'utiliser le fait que

$$\int_0^1 \vartheta^p (1-\vartheta)^q d\vartheta \leqq \frac{1}{1+\sup(p, q)}$$

et que $n/2 \leqq n-\frac{1}{2}$ pour voir le résultat du lemme 3.

Nous pouvons maintenant démontrer le:

THÉORÈME 1: *M étant une variété riemannienne simplement connexe complète de courbure sectionnelle σ négative ou nulle bornée, et vérifiant la condition (E), M admet une S.F.C.E.C. E qui vérifie pour tout z tel que $1/z$ soit dans $\boldsymbol{C}_{\xi_0}$:*

$$(3) \qquad |E(z; x, y) - S_{[\frac{1}{2}(n-1)]}(z; x, y)| \leqq C_3 \cdot e^{hd(x,y)} e^{-\frac{1}{4}\xi_0 d^2(x,y)}$$

où C_3 ne dépend que de la variété M et de ξ_0, mais non de z, x et y.

DÉMONSTRATION: Puisque $1/z$ est dans $\boldsymbol{C}_{\xi_0}$, $|z|$ est borné, nous avons donc, en utilisant la condition (E):

$$|S_n| < K|z|^{-\frac{1}{2}n} e^{-\frac{1}{4}r^2 \operatorname{Re}(1/z)} e^{hr}$$

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial z} + \Delta_2\right) S_n \right| < L|z|^{\frac{1}{2}n} e^{-\frac{1}{4}r^2 \operatorname{Re}(1/z)} e^{hr}$$

L'application du lemme 3 montre donc que si on pose $T_n = (\partial/\partial z + \Delta_y) S_n$, on a:

$$|T_n^{*\lambda} * S_n| \leqq \frac{KL^{\lambda} C_2^{\lambda}}{(n+1)(n+1)(1+2(1+n/2)) \cdots (1+(\lambda-1)(1+n/2))} \times |z|^{1+(\lambda-1)(1+n/2)} e^{hr} \cdot e^{-\frac{1}{4}r^2 \operatorname{Re}(1/z)}$$

Donc

$$\left|\sum_{\lambda=1}^{\infty} (-1)^{\lambda} T_n^{*\lambda} * S_n\right| \leqq KLC_2 |z| e^{LC_2|z|^{1+\frac{1}{2}n}} \cdot e^{hr} \cdot e^{-\frac{1}{4}\xi_0 r^2}.$$

De plus on a:

$$S_n - S_{[\frac{1}{2}(n-1)]} = \frac{e^{-r^2/4z}}{(4\pi)^{\frac{1}{2}n}} (z^{\frac{1}{2}n} u_n + z^{\frac{1}{2}n-1} u_{n-1} + \cdots + z^{[\frac{1}{2}(n-1)]+1-\frac{1}{2}n} u_{[\frac{1}{2}(n-1)]+1})$$

D'après la condition (E), on voit que:

$$|S_n - S_{[\frac{1}{2}(n-1)]}| \leqq C_4 e^{hr} \cdot e^{-\frac{1}{4}\xi_0 r^2}$$

Donc le seul problème est de montrer que la somme de la série (2) définit bien une S.F.C.E.C sur M. Pour cela, nous aurons besoin des deux lemmes:

LEMME 4: *Soit x_0 dans M, α un réel inférieur à $\pi/2$ et $f: M \to \boldsymbol{C}$ continue telle que $|f(y)| \leqq Ce^{hd(x,y)}$ on a*:

$$\lim_{\substack{|z|\to 0 \\ |\operatorname{Arg} z| \leqq \alpha}} \int_M S_k(z; x, y) f(y) v_M(y) = f(x_0)$$

D'après la condition (E) et la majoration du volume déjà utilisée plus haut, il suffit de montrer que, si $\phi: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{C}$ continue vérifie $|\phi(\xi)| \leqq C' e^{h'\|\xi\|}$, on a:

$$\lim_{\substack{|x|\to 0 \\ |\operatorname{Arg} z| \leqq \alpha}} \frac{1}{(4\pi z)^{\frac{1}{2}n}} \int_{\boldsymbol{R}^n} e^{-\|\xi\|^2/4z} \phi(\xi) d\xi = \phi(0).$$

Cela résulte des deux faits suivants:

(i) $$\frac{1}{(4\pi z)^{\frac{1}{2}n}} \int_{\boldsymbol{R}^n} e^{-\|\xi\|^2/4z} d\xi = 1,$$

ce qui est connu pour z réel et donc par prolongement holomorphe pour z dans $\boldsymbol{C}^+$.

(ii) La limite est nulle si $\phi(0) = 0$. En effet

$$|I(z)| \leqq \frac{1}{(4\pi|z|)^{\frac{1}{2}n}} \int_{\boldsymbol{R}^n} e^{-\frac{1}{4}\|\xi\|^2 \cdot \cos\alpha/|z|} \cdot |\phi(\xi)|\, d\xi.$$

et en posant $\xi = |z|^{\frac{1}{2}} u$

$$|I(z)| \leqq \frac{1}{(4\pi)^{\frac{1}{2}n}} \int_{\boldsymbol{R}^n} e^{-\frac{1}{4}(\cos\alpha \|u\|^2)} |\phi(|z|^{\frac{1}{2}} u)|\, du$$

et le théorème de Lebesgue permet de conclure car, pour tout u,

$$\lim_{|z|\to 0} \phi(|z|^{\frac{1}{2}} u) = \phi(0)$$

et que la fonction

$$C' e^{-\frac{1}{4}\cos\alpha \|u\|^2} e^{h'\|u\|}$$

est intégrable dans R^n.

LEMME 5: *Soit* $P : \mathbf{C}^+ \times M \times M$ *vérifiant les hypothèses du lemme* 3 *avec* $\alpha \geqq 0$, *on a*:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \Delta_y\right)(P * S_n) = P + P * \left[\left(\frac{\partial}{\partial z} + \Delta_y\right) S_n\right].$$

DÉMONSTRATION:

$$(P * S_n)(z; x, y) = \int_0^z \left[\int_M P(u; x, m) S_n(z-u; m, y) v_M(m)\right] du$$

Donc:

$$\frac{\partial}{\partial z}(P * S_n)(z; x, y) = \lim_{\substack{u \to z \\ u \in [0, z]}} \int_M P(u; x, m) S_n(z-u; m, y) v_M(m)$$
$$+ \int_0^z du \int_M P(u; x, m) \frac{\partial S_n}{\partial z}(z-u; m, y) v_M(m)$$

La 1ère limite s'obtient avec le lemme 4: elle vaut $P(z; x, y)$. On a d'autre part

$$\Delta_y(P * S_n) = P * \Delta_y S_n$$

Donc:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \Delta_y\right)(P * S_n) = P + P * \left(\left(\frac{\partial}{\partial z} + \Delta_y\right) S_n\right).$$

On en déduit que la somme de la série (2) vérifie $(\partial/\partial z + \Delta_y)E = 0$.

Il reste à vérifier la condition:

$$\lim_{\substack{|z| \to 0 \\ |\mathrm{Arg}\, z| \leqq \alpha}} \int_M E(z; x, y) f(y) v_M(y) = f(x)$$

qui résulte facilement du lemme 4 et de la majoration de $E - S_n$. Le théorème 1 est ainsi démontré.

1.2. *Cas d'une variété compacte à courbure sectionnelle négative ou nulle.*

Nous allons appliquer la construction du paragraphe 1.1 au revêtement riemannien universel $\tilde{M}$ de la variété compacte M.

Nous noterons maintenant $\tilde{E}$, $\tilde{S}_k$ les fonctions que nous avons construites au paragraphe 1.1.

Nous aurons besoin du:

THÉORÈME 2: *Soit* Γ *le groupe des automorphismes du revêtement* $\tilde{M}$, *la famille*

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-\frac{1}{4}\xi_0 d^2(x, \gamma y)} \cdot e^{h d(x, \gamma y)}$$

est uniformément sommable sur tout compact de $\tilde{M} \times \tilde{M}$.

On utilise le lemme suivant ([8])

LEMME 6: *Si on pose, pour x dans $\tilde{M}$: $\phi(\lambda) = Card\{\gamma \in \Gamma / d(x, \gamma x) < \lambda\}$ on a*:

$$\phi(\lambda) \leqq Ce^{(n-1)A\lambda}$$

où C est indépendant du choix de x dans $\tilde{M}$.

DÉMONSTRATION: Soit D un domaine fondamental dans $\tilde{M}$ contenant x et de diamètre inférieur à 2 diam $(M) = 2\Delta$

$$\bigcup_{d(x,\gamma x)\leqq\lambda} \gamma(D) \subset B(x, \lambda+2\Delta)$$

D'après la majoration des volumes on en déduit:

$$\phi(\lambda)\cdot(\mathrm{vol}\, M) \leqq n\omega_n \int_0^{\lambda+2\Delta} \left(\frac{shAt}{A}\right)^{n-1} dt$$

D'où le lemme 6.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2: Soit K un compact de $M\times M$ et

$$B = \operatorname*{Sup}_{(x,y)\in K} d(x, y)$$

De Card $\{\gamma \in \Gamma | d(x, \gamma y) \leqq \lambda\} \leqq \phi(\lambda+B)$, on déduit:

$$\sum_{\substack{\gamma\in\Gamma \\ j-1<d(x,\gamma y)\leqq j}} e^{-\frac{1}{4}\xi_0 d^2(x,\gamma y)}\cdot e^{hd(x,\gamma y)} \leqq Ce^{(n-1)A(j+B)}\cdot e^{-\frac{1}{4}\xi_0(j-1)^2}\cdot e^{hj}$$

Ce qui démontre le théorème.

THÉORÈME 3: *Les familles $\sum_{\gamma\in\Gamma}\tilde{E}(z; x, \gamma y)$ et $\sum_{\gamma\in\Gamma}\tilde{S}_{[\frac{1}{2}(n-1)]}(z; x, \gamma y)$ sont uniformément sommables dans tout domaine $\{z||z| \geqq \varepsilon$ et $1/z \in \mathbf{C}_{\xi_0}\}$ $\times$ compact de $(\tilde{M}\times\tilde{M})$ et on a sur tout domaine $\{z|1/z \in \mathbf{C}_{\xi_0}\}\times$ compact de $(\tilde{M}\times\tilde{M})$*

$$\left|\sum_{\gamma\in\Gamma}\tilde{E}(z; x, \gamma y) - \sum_{\gamma\in\Gamma}\tilde{S}_{[\frac{1}{2}(n-1)]}(z; x, \gamma y)\right| \leqq C(\xi_0)$$

DÉMONSTRATION: Cela résulte facilement du théorème 1, de la condition (E) et du théorème 2.

Posons

$$\bar{E}(z; x, y) = \sum_{\gamma\in\Gamma}\tilde{E}(z; x, \gamma y) \text{ et de même } \bar{S}_{[\frac{1}{2}(n-1)]}$$

La construction des u_i étant invariante par les isométries de $\tilde{M}$, on a:

$$u_i(\gamma x, \gamma y) = u_i(x, y)$$

Donc, pour tout k:

$$\tilde{S}_k(z; \gamma x, \gamma y) = \tilde{S}_k(z; x, y)$$

et donc

$$\tilde{E}(z; \gamma x, \gamma y) = \tilde{E}(z; x, y)$$

On en déduit facilement que pour tout couple (γ_1, γ_2) de $\Gamma \times \Gamma$, on a:

$$\bar{S}_k(z; \gamma_1 x, \gamma_2 y) = \bar{S}_k(z; x, y)$$
$$\bar{E}(z; \gamma_1 x, \gamma_2 y) = \bar{E}(z; x, y)$$

Donc les fonctions $\bar{E}$ et $\bar{S}_k$ définissent par passage au quotient des fonctions E et S_k sur $\boldsymbol{C}^+ \times M \times M$.

THÉORÈME 4: *Le noyau E obtenu sur M par passage au quotient est la S.F.C.E.C sur M.*

DÉMONSTRATION: L'unicité résulte de [3] par prolongement analytique. Pour montrer que $(\partial/\partial z + \Delta_y)E = 0$, il suffit de le montrer pour $\bar{E}$ et donc pour $\bar{S}(z; x, \gamma y) = \tilde{E}(z; \gamma^{-1}x, y)$; c'est donc clair. L'autre condition peut se démontrer en utilisant un domaine fondamental D, en effet, soit $f : M \to \boldsymbol{C}$ continue, on a:

$$\int_M E(z; x', y')f(y')v_M(y') = \int_D \bar{E}(z; x, y)f(\pi(y))v_{\tilde{M}}(y)$$

c'est-à-dire:

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \int_D \tilde{E}(z; x, \gamma y)f(\pi(y))v_M(y) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_{\gamma D} \tilde{E}(z; x, \eta)f(\pi\gamma^{-1}(\eta))v_M(\eta)$$

Donc comme les γD font une partition de $\tilde{M}$

$$\int_M E(z; x', y')f(y')v_M(y') = \int_{\tilde{M}} \tilde{E}(z; x, \eta)f(\pi(\eta))v_M(\eta)$$

Comme $\tilde{E}$ est S.F.C.E.C sur $\tilde{M}$ et que $f \circ \pi$ est bornée, on en déduit que la limite quand $z \to 0$ avec $|\mathrm{Arg}\,(z)| \leqq \alpha$ est $f(\pi(x)) = f(x')$.

1.3. *Condition (E) pour le revêtement universel d'une variété riemannienne de dimension 2 à courbure sectionnelle négative ou nulle*

DÉFINITION 1: *Un nombre réel C sera dit universel s'il ne dépend que de la variété M; $(C_i)_{i \in \boldsymbol{N}}$ désigneront de tels nombres.*

DÉFINITION 2: *Une application $f : \boldsymbol{R}^+ \times X \to \boldsymbol{R}$ sera dite de type exponentiel en t* (E.t en abrégé) *s'il existe des réels universels C et h tels que pour tout (t, x) de $\boldsymbol{R}^+ \times X$, on on ait:*

$$|f(t, x)| \leqq C e^{ht}$$

PROPOSITION 1: *Soit $y(t, x)$ la solution du système:*

$$D_{2,0}\, y(t, x) + \sigma(t, x)y(t, x) = f(t, x),\ y(0, x) = a,\ y'(0, x) = b$$

où $-A^2 \leqq \sigma \leqq 0$ et f de type E.t., alors y est de type E.t.

DÉMONSTRATION: Elle se fait par comparaison de l'équation sans second membre avec l'équation $y'' - A^2 y = 0$ et par la méthode de variations des constantes.

Pour démontrer la condition (E), on utilise une carte en m fabriquée à l'aide de coordonnées polaires (t, α) dans $T_m \tilde{M}$, soit:

$$\Psi : (t, \alpha) \rightsquigarrow \exp_m (tu_\alpha)$$

où u_α désigne le vecteur unitaire d'angle polaire α.

Pour toute fonction g sur $\tilde{M}$, on note $\bar{g}$ la fonction $g \circ \Psi$. Soit y la solution du système

$$D_{2,0}\, y(t, \alpha) + \bar{\sigma}(t, \alpha) y(t, \alpha) = 0$$
$$y(0, \alpha) = 0; D_{1,0}\, y(0, \alpha) = 1$$

On a

$$\theta(m, \psi(t, \alpha) = \frac{1}{t} y(t, \alpha) = \int_0^1 D_{1,0}\, y(ts, \alpha)\, ds$$

Evaluons l'expression du laplacien dans la carte ψ:

$$\Delta f = -\frac{1}{y}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(y \frac{\partial f}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{y} \frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)\right]$$

On a donc:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} = -y^2 \Delta f - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - y \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \frac{\partial f}{\partial \alpha} \tag{4}$$

et on a:

$$\frac{1}{y} D_{0,1}\, y(t, \alpha) = \left(\frac{y}{t}\right)^{-1} \times \int_0^1 D_{1,1}\, y(ts, \alpha) ds$$
$$\frac{1}{y} D_{0,1}\, y(t, \alpha) = \left(\int_0^1 D_{1,0}\, y(ts, \alpha)\, ds\right)^{-1} \left(\int_0^1 D_{1,1}\, y(ts, \alpha)\, ds\right)$$

On en déduit la proposition ci-dessous.

Notations: $((f, p))$ signifiera que toutes les dérivées $D_{i,j} f$ pour i quelconque et $j \leqq p$ sont de type E.t.

PROPOSITION 2: *Si on a* $((f, k+1))$, $((\Delta f, k))$ et $((y, k+1))$, *on a* $((f, k+2))$.
Cela résulte de (4) où l'on fait opérer $D_{p,k}$.

PROPOSITION 3: *Si on a* $((\sigma, k))$ *on a* $((y, k))$
Cela résulte de la proposition 1.

PROPOSITION 4: *On a* $((\sigma, k))$ *et* $((y, k))$ *pour tout* k.

Démontrons par récurrence la propriété (P_k)

(P_k) Pour tout i; $((\Delta^i\sigma, k))$ et $((y, k))$

(P_0) est clair

(u, v) désigne un repère orthonormé au point $\psi(t, \alpha)$, $u = \psi'(\partial/\partial t)$ et $v = \psi'(1/t \cdot \partial/\partial\alpha)$

$$D_{p,0}(\Delta^i\sigma) = d^p(\Delta^i\sigma)(u, \cdots, u)$$

et les dérivées covariantes de $\Delta^i\sigma$ sont bornées car elles proviennent d'un relèvement de M qui est compacte.

On en déduit la majoration des $D_{p,0}y$.

On a: $D_{0,1}(\Delta^i\sigma) = d(\Delta^i\sigma)(tyv)$.

On obtient (P_1) en dérivant cette formule par rapport à t et en utilisant (P_0) pour y. De (P_1) pour σ, on le déduit pour y.

(P_k) implique (P_{k+1}) d'après la proposition 2.

Cette dernière proposition, l'expression de θ et du laplacien permettent de montrer la condition (E) pour une variété de dimension 2 qui est le revêtement universel d'une variété compacte.

2. Calcul d'intégrale oscillante

On supposera M compacte, de dimension 2, et $\sigma < 0$. Les deux applications

$$z \rightsquigarrow \int_M E\left(\frac{1}{z}\,;\; x, x\right) v_M(x) \text{ et } z \rightsquigarrow \sum_{k\in N} e^{-\lambda_k/z}$$

étant holomorphes dans C^+ et coincidant pour z réel positif d'après [3] p. 206, sont égales. Nous déduisons alors des théorèmes 3 et 4, la formule:

$$\sum_{k\in N} e^{-\lambda_k/z} = \int_M S_0\left(\frac{1}{z}\,;\; x, x\right) v_M(x) + 0^+(1). \tag{1}$$

Pour évaluer cette intégrale, nous remontons à $\tilde{M}$ à l'aide du lemme de régularisation suivant:

LEMME 1: *Il existe une fonction $\phi : \tilde{M} \to [0, 1]$, C^∞ à support compact telle que, pour toute fonction continue $f : M \to C$ on ait*:

$$\int_M f(x')v_M(x') = \int_{\tilde{M}} f(\pi(x))\phi(x)v_{\tilde{M}}(x)$$

De plus, pour toute sous-variété N de M, on a:

$$\int_{\pi^{-1}(N)} f(\pi(x))\phi(x)v_{\pi^{-1}(N)}(x) = \int_N f(x')v_N(x')$$

De plus, on peut prendre ϕ telle que d_0 = diamètre (Supp ϕ) $\leqq$ 2 diam $(M)+1$ donc d_0 majoré par un nombre universel.

DÉMONSTRATION: Soit $\psi : \tilde{M} \to [0, 1]$ une fonction C^∞ à support compact telle que, pour tout x' de M, il existe au moins un point de x de $\pi^{-1}(x')$ vérifiant $\psi(x) > 0$. Posons $\phi(x) = \psi(x)(\sum_{\gamma \in \Gamma} \psi(\gamma x))^{-1}$. La somme $\sum_{\gamma \in \Gamma} \psi(\gamma x)$ est localement finie à cause de la compacité du support de ψ et du fait que Γ agit sur $\tilde{M}$ de facon proprement discontinue et sans points fixes. Soit $f : M \to C$ continue et D un domaine fondamental du revêtement, on a:

$$\int_{\tilde{M}} f(\pi(x))\phi(x)v_{\tilde{M}}(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_{\gamma D} f(\pi(x))\phi(x)v_{\tilde{M}}(x).$$

Soit, en posant $x = \gamma y$

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \int_{\gamma D} f(\pi(x))\phi(x)v_{\tilde{M}}(x) = \int_D f(\pi(y)) \cdot \sum_{\gamma \in \Gamma} \phi(\gamma y)v_{\tilde{M}}(y)$$

et d'après la définition de ϕ : $\sum_{\gamma \in \Gamma} \phi(\gamma y) = 1$, ce qui démontre le premier résultat. Pour le deuxième, soit $V_\varepsilon = \{x \in M | d(x, N) \leqq \varepsilon\}$. On a:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} [\mathrm{vol}\,(B_{n-d}(\varepsilon))]^{-1} \int_{V_\varepsilon} g(x)v_M(x) = \int_N g(x)v_N(x)$$

où $B_{n-d}(\varepsilon)$ désigne la boule euclidienne de dim $n-d$ et rayon ε, et $d =$ dim N. On en déduit le résultat en utilisant le fait que $\pi^{-1}(V_\varepsilon(N)) = V_\varepsilon(\pi^{-1}(N))$.

Pour la condition supplémentaire de support, on remarque que Supp (ϕ) = Supp (ψ) et qu'on peut prendre ψ à support dans un voisinage de rayon 1 d'un domaine fondamental de diamètre inférieur à 2 diam(M). On déduit alors de (1) et de l'expression de $S_0(z; \pi(x), \pi(x))$ (1.2) la formule (2)

$$(2) \quad \sum_{k \in N} e^{-\lambda_k/z} = \frac{z}{4\pi} \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_{\tilde{M}} e^{-\frac{1}{4}zd^2(x, \gamma x)} \cdot \theta^{-\frac{1}{2}}(x, \gamma x)\phi(x)v_{\tilde{M}}(x) + 0^+(1)$$

le problème est maintenant d'évaluer l'intégrale

$$(3) \qquad I_\gamma(z) = \int_{\tilde{M}} e^{-\frac{1}{4}zd^2(x, \gamma x)}\theta^{-\frac{1}{2}}(x, \gamma x)\phi(x)v_{\tilde{M}}(x)$$

2.1. *Désintégration de $v_{\tilde{M}}$ par rapport à l'axe de γ*

Le calcul de (3) pour Im $z \to \infty$ fait intervenir les valeurs critiques de l'application $x \mapsto d^2(x, \gamma x)$. Les résultats suivants sont démontrés dans [4] p. 10 et suivantes: l'ensemble des points critiques de cette application f_γ est une géodésique A_γ de $\tilde{M}$. De plus, on sait qu'il existe une bijection canonique de l'ensemble des classes de conjugaison de Γ sur l'ensemble $\mathscr{L}$ des classes d'homotopie libre de M; soit a l'élément de $\mathscr{L}$ que l'on associe ainsi à la classe de γ dans Γ. Alors il existe une géodésique périodique unique dans a, soit L_a sa longueur; γ translate A_γ d'une longueur égale à L_a et la valeur critique de f_γ est L_a^2. Nous allons utiliser pour le calcul de I_γ une carte liée à γ de la façon suivante: on paramètre A_γ proportionnellement à l'arc par $s \rightsquigarrow m_s$ de façon que $\gamma(m_s) = m_{s+L_a}$; on considère un repère orthonormé (u_s, v_s) de $T_{m_s}\tilde{M}$ variant parallèlement avec s et tel que u_s soit le vecteur vitesse de m_s. On pose alors $\Phi(s, t) = \exp_{m_s}(tv_s)$. Φ est un difféomorphisme de $\mathbf{R}^2$ sur $\tilde{M}$; soit $j(s, t)$ le déterminant de son application tangente au point (s, t) et $Y_s(t)$ le champ de Jacobi le long de $\exp_{m_s}(\mathbf{R} \cdot v_s) = G_s$ tel que: $Y_s(0) = u_s$; $Y_s'(0) = 0$, on a: $j(s, t) = |Y_s(t)|$. On a donc pour toute f intégrable sur $\tilde{M}$:

$$\int_{\tilde{M}} f v_{\tilde{M}} = \int_{\mathbf{R}^2} f(\Phi(s, t)) j(s, t)\, ds\, dt. \tag{4}$$

2.2. *Un lemme sur les intégrales oscillantes*

Nous nous ramènerons à l'aide de la formule (4) au cas du:

LEMME 2: *Soit $\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction C^5, convexe, et ayant l'origine pour seul point critique. Soit $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction C^2 nulle pour $|t| \geqq R$. Etant donné un réel $\xi_0 > 0$, il existe un polynôme P de $\mathbf{R}[X_1, X_2, X_3, X_4]$ tel que, en posant $b = \alpha''(0)/2$, on ait, pour tout z de $\mathbf{C}_{\xi_0}$:*

$$\int_{\mathbf{R}} e^{-z\alpha(t)} h(t)\, dt = \left\{ \left(\frac{\pi}{bz}\right)^{\frac{1}{2}} h(0) + \frac{1}{z} R(z) \right\} e^{-z\alpha(0)} \text{ et}$$

$$|R(z)| \leqq P\left(\frac{1}{b}, \|\alpha\|_{C^5([-R,R])}, \|h\|_{C^2([-R,+R])}, R\right)$$

Pour évaluer, par exemple, l'intégrale sur $\mathbf{R}^+$, on peut faire le changement de variables $\theta = (\alpha(t) - \alpha(0))^{\frac{1}{2}} = \beta(t)$. On a:

$$\int_{\mathbf{R}^+} e^{-z\alpha(t)} h(t)\, dt = e^{-z\alpha(0)} \left[\int_{\mathbf{R}^+} e^{-z\theta^2} \cdot \left(\frac{h}{\beta'} \circ \beta^{-1}\right)(\theta)\, d\theta \right]$$

Nous appliquerons le

LEMME 2bis: *Soit $\psi : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ une fonction C^2 à support compact, on a:*

$$\int_{\mathbf{R}^+} e^{-z\theta^2} \psi(\theta)\, d\theta = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{z}\right)^{\frac{1}{2}} \psi(0) + \frac{1}{z} S(z) \text{ Avec } |S(z)| \leqq C\|\psi\|_{C^2}.$$

DÉMONSTRATION DU LEMME 2 bis:

$$\int_{\mathbf{R}^+} e^{-z\theta^2} \psi(\theta)\, d\theta = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{z}\right)^{\frac{1}{2}} \psi(0) + \int_{\mathbf{R}^+} e^{-z\theta^2} \theta \psi_1(\theta)\, d\theta$$

où

$$\psi_1(\theta) = \frac{\psi(\theta)-\psi(0)}{\theta}$$

$$\int_{\mathbf{R}^+} e^{-z\theta^2}\theta\psi_1(\theta)\,d\theta = \left[\frac{e^{-z\theta^2}}{-2z}\cdot\psi_1(\theta)\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2z}\int_{\mathbf{R}^+} e^{-z\theta^2}\psi_1'(\theta)\,d\theta.$$

De plus:

$$\psi_1(\theta) = \int_0^1 \psi'(\theta s)\,ds$$

Donc $|\psi_1'(\theta)| \leqq ||\psi||_{C^2}$.

On en déduit facilement le lemme 2bis.

Démonstration du Lemme 2: D'après le lemme 2 bis, il nous suffit de majorer $||h/\beta'\,{}_0\beta^{-1}||_{C^2}$.

(1) Minoration de

$$\beta'(t) = \frac{\alpha'(t)}{2\sqrt{\alpha(t)-\alpha(0)}}.$$

Si

$$0 \leqq t \leqq \frac{2b}{\operatorname{Sup}_{[0,R]}|\alpha'''|},\ \text{on a: } |\alpha'(t)| \geqq bt \text{ et } |\alpha(t)-\alpha(0)| \leqq \tfrac{4}{3}bt^2$$

donc:

$$\beta'(t) \geqq \frac{\sqrt{b}}{4}$$

et si

$$\frac{2b}{\operatorname{Sup}|\alpha'''|} \leqq t \leqq R,\ |\alpha'(t)| \geqq \frac{2b^2}{\operatorname{Sup}_{[0,R]}|\alpha'''|}\ \text{(car } \alpha \text{ est convexe)}$$

$$|\alpha(t)-\alpha(0)| \leqq R \sup_{[0,R]}|\alpha'|\,.$$

Finalement il existe un polynôme P_1 tel que:

$$\left|\frac{1}{\beta'(t)}\right| \leqq P_1\left(\frac{1}{b},\ ||\alpha||_{C^3(0,R)},\ R\right).$$

(2) Majoration des dérivées de β: elles se font en partant de

$$\beta(t) = t\left(\int_0^1 (1-u)\alpha''(tu)\,du\right)^{\frac{1}{2}}$$

et de

$$\left|\frac{\beta(t)}{t}\right| \geqq \min_{u\in[0,R]}(\beta'(u)).$$

On en déduit que les dérivées jusqu'à l'ordre 3 de β sont majorées à l'aide des dérivées jusqu'à l'ordre 5 de α et de la majoration de $1/\beta'(t)$ vue au § 1).

On en déduit finalement le lemme 2.

2.3. *Calcul de $I_\gamma(z)$*

Partant de la formule (3), il vient en utilisant la désintégration de 2.1.

$$(5)\qquad I_\gamma(z) = \int_{\mathbf{R}} ds \int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{1}{4}zd^2(\Phi(s,t),\,\gamma\Phi(s,t))}\theta^{-\frac{1}{2}}(\Phi(s,t), \gamma\Phi(s,t)) \times \phi(\Phi(s,t))j(s,t)\,dt$$

Nous allons appliquer le lemme 2.2. pour évaluer l'intégrale en t.

(a) *Notations et définitions préliminaires*

Dans la suite des calculs de 2.3 nous supposons γ et s fixés.

Nous introduisons les paramètres réels t_1 et t_2 et posons:

$$p(t_1) = \Phi(s, t_1); \quad q(t_2) = \gamma(p(t_2)) = \Phi(s+L_a, \varepsilon t_2)$$

($\varepsilon = +1$ si γ conserve l'orientation de $\tilde{M}$, $\varepsilon = -1$ sinon).

D_{t_1,t_2} désignera le segment géodésique $(p(t_1), q(t_2))$ paramétré par τ de 0 à 1; (u, v) sera un repère orthonormé variant parallèlement le long de ce segment, tel que u soit tangent à D_{t_1,t_2} et orienté de $p(t_1)$ vers $q(t_2)$, et que (u, v) et $(u, p'(t_1))$ définissent la même orientation au point $p(t_1)$. On pose:

$$p'(t_1) = \cos\theta_1 \cdot u + \sin\theta_1 \cdot v \quad (\sin\theta_1 > 0)$$
$$q'(t_2) = \cos\theta_2 \cdot u + \sin\theta_2 \cdot v.$$

On introduit aussi $\delta(t_1, t_2) = d(p(t_1), q(t_2))$ et pour toute fonction $\phi(t_1, t_2)$, on note $\tilde{\phi}$ l'application diagonale $t \rightsquigarrow \phi(t, t)$.

Nous introduisons aussi les trois champs de Jacobi Y, Z et W sur D_{t_1,t_2} satisfaisant aux conditions aux limites:

$$\begin{aligned} Y(0) &= p'(t_1); & Y(1) &= q'(t_2)\\ Z(0) &= 0; & Z(1) &= q'(t_2)\\ W(0) &= p'(t_1); & W(1) &= 0. \end{aligned}$$

On a évidemment $Y = Z + W$.

Nous décomposons un tel champ, par exemple Y, suivant u et v:

$$Y = \bar{y} \cdot u + y \cdot v.$$

Donc y et $\bar{y}$ vérifient les systèmes (les $\dot{}$ et $\ddot{}$ désignant des dérivés par rapport à τ)

$$\begin{cases} \bar{y}(0) = \cos\theta_1; \bar{y}(1) = \cos\theta_2 \\ \ddot{\bar{y}} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y(0) = \sin\theta_1; y(1) = \sin\theta_2 \\ \ddot{y} + \sigma\delta^2 y = 0 \end{cases}$$

où σ désigne la courbure sectionnelle au point de paramètre τ de D_{t_1,t_2}. Pour un tel champ nous posons:

$$E(Y) = \int_0^1 (\dot{y}^2 - \sigma\delta^2 y^2)\, d\tau.$$

Les formules de variation première et seconde nous donnent les résultats suivants:

$$D_{1,0}\delta = -\cos\theta_1; \quad D_{0,1}\delta = \cos\theta_2; \quad \tilde{\delta}' = \widetilde{\cos\theta_2} - \widetilde{\cos\theta_1}$$

$$D_{2,0}\delta = \frac{1}{\delta}E(W); \quad D_{0,2}\delta = \frac{1}{\delta}E(Z); \quad \tilde{\delta}'' = \frac{1}{\delta}E(Y)$$

Les calculs qui vont suivre reposent en grande partie sur le lemme suivant de calcul des variations:

Lemme 3: *Soient a et b deux réels, f_1 et f_2 : $[0, 1] \to R$ continues et vérifiant $f_2 \leqq f_1 \leqq 0$. Considérons les solutions y_1 et y_2 uniques les systèmes suivants*:

$$\begin{cases} y_1(0) = a; \quad y_1(1) = b \\ y_1'' + f_1 y_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_2(0) = a; \quad y_2(1) = b \\ y_2'' + f_2 y_2 = 0 \end{cases}$$

Alors on a:

$$\int_0^1 (y_1'^2 - f_1 y_1^2)\, d\tau \leqq \int_0^1 (y_2'^2 - f_2 y_2^2)\, d\tau.$$

Utilisant ce lemme et le fait que M est compacte et $\sigma < 0$, et donc $-A^2 \leqq \sigma \leqq -B^2 < 0$, on a les majorations suivantes:

$$(6) \quad \frac{B\delta}{thB\delta}\left(\sin^2\theta_1 + \sin^2\theta_2 - \frac{2}{chB\delta}\sin\theta_1\sin\theta_2\right)$$
$$\leqq E(Y) \leqq \frac{A\delta}{thA\delta}\left(\sin^2\theta_1 + \sin^2\theta_2 - \frac{2}{chA\delta}\sin\theta_1\sin\theta_2\right)$$

et des majorations analogues pour Z et W en faisant $\sin\theta_i = 0$ dans les inégalités précédentes.

Rappelons qu'on a dit qu'un nombre réel universel s'il ne dépend que de M (et donc pas de s, t et γ).

(b) *Majoration* $|t| \leqq C\tilde{\delta}(t) + C'$

Lemme 4: *Il existe des nombres C et C' universels tels que*

$$|t| \leqq C\tilde{\delta}(t) + C'$$

Démonstration: L'expression de $\tilde{\delta}''$ montre la convexité de δ. Comme $\tilde{\delta}'(0) = 0$, il suffit de montrer qu'il existe des nombres t_0 et a strictement positifs universels tels que: pour tout t, avec $|t| \leqq t_0$, on ait $\tilde{\delta}''(t) \geqq a$. γ étant supposée distincte de l'identité, on a $\delta \geqq \rho_0 > 0$ (ρ_0 rayon d'injectivité de M). Donc $\tilde{\delta}''(0) \geqq 2B(1-1/chB\rho_0) > 0$, c'est-à-dire $\tilde{\delta}''(0) \geqq b > 0$ où b est un nombre universel. Il suffit donc de trouver des nombres t_1 et c universels tels que, si $|t| \leqq t_1$, on ait $|\tilde{\delta}'''(t)| \leqq c$. Or $|\tilde{\delta}'''(t)| \leqq 4B/thB\rho_0(\tilde{\theta}_1' + \tilde{\theta}_2')$. Il suffit donc de montrer que $(\widetilde{\cos\theta_i})'$ sont majorées par des nombres universels. On a:

$$D_{1,0}\delta = -\cos\theta_1$$

Donc:

$$-(\widetilde{\cos\theta_1})' = D_{2,0}\delta + D_{1,1}\delta = \frac{1}{2\delta}(E(Y)+E(W)-E(Z))$$

Donc:

$$|(\widetilde{\cos\theta_1})'| \leqq \frac{A}{2thA\delta}\left(2\sin^2\theta_1 + \sin^2\theta_2 + \frac{2}{chA\delta}|\sin\theta_1|\cdot|\sin\theta_2|\right)$$

cette expression est majorée par un nombre universel.

(c) *Un lemme de majoration de dérivées diagonales*

Pour majorer les dérivées de $\tilde{\delta}$ nous utiliserons uniquement des majorations de $D_{p,0}\delta$ et $D_{0,q}\delta$ à l'aide du:

LEMME 5: *Soit* $\psi : \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}^+$, *tel qu'il existe* $a > 0$ *avec* $\psi(t) \geqq at+b$, *et soit* $\phi : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ *une application* C^∞ *vérifiant*:

$$\operatorname*{Sup}_{\substack{|x|\leqq A\\ |y|\leqq A}} |D_{p,0}\phi(x,y)| \leqq c_p e^{\alpha_p\psi(A)}$$

$$\operatorname*{Sup}_{\substack{|x|\leqq A\\ |y|\leqq A}} |D_{0,q}\phi(x,y)| \leqq c_q e^{\alpha_q\psi(A)}$$

Alors si $f(t) = \phi(t,t)$ *il existe des réels* d_k *et* β_k *tels que pour tout* t:

$$|f^{(k)}(t)| \leqq d_k e^{\beta_k\psi(2t)}$$

(d_k *et* β_k *ne dépendant que de* a, b, c_p *et* α_q)

DÉMONSTRATION: Soit g une fonction C^∞ à support dans $[-A, A]^2$ et $\hat{g}$ sa transformée de Fourier. On a:

$$2|X^pY^q\hat{g}(X,Y)| \leqq |X^{2p}\hat{g}(X,Y)| + |Y^{2q}\hat{g}(X,Y)|$$

Soit en utilisant le fait que la transformation de Fourier est une isométrie pour les normes L^2:

$$||D_{p,q}g||_{L^2} \leqq c(p,q)(||D_{2p,0}g||_{L^2} + ||D_{0,2q}g||_{L^2}$$

Or

$$D_{p,q}g(x, y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} D_{p+1,q+1}\, g(t, s)\, dt\, ds$$

$$|D_{p,q}g(x, y)| \leqq 2Ac(p+1, q+1)(\|D_{2p+2,0}\, g\|_{L^2} + \|D_{0,2q+2}\, g\|_{L^2}$$

$$|D_{p,q}g(x, y)| \leqq 4A^2c(p+1, q+1)(\sup |D_{2p+2,0}\, g| + \sup |D_{0,2q+2}\, g|)$$

Soit maintenant α une fonction C^∞ nulle pour $|t| \geqq 2$ et égale à 1 pour $|t| \leqq 1$, posons $\phi_R(x, y) = \phi(x, y)\alpha(x/R)\alpha(y/R)$ et supposons $R \geqq R_0 > 0$. On a:

$$\sup_{[-A,A]^2} |D_{p,q}\phi| \leqq \sup_{[2A,2A]^2} |D_{p,q}\phi_R| \leqq 16R^2C(p+1, q+1)(\sup |D_{2p+2,0}\,\phi_R| + \sup |D_{0,2q+2}\,\phi_R|).$$

Utilisant le fait que $f^{(k)}(t) = \sum_{r=0}^{k} C_k^r D_{r,k-r}\phi(t, t)$ on en déduit le lemme.

REMARQUE: Pour majorer la dérivée d'ordre k de f, il faut prendre les couples (p, q) tels que $p+q = k$, $p = 1, \cdots, k-1$, donc majorer les $D_{p,0}\phi$ et $D_{0,q}\phi$ jusqu'à l'ordre $2k$.

(d) *Majoration des dérivées de la distance d'un point à une géodésique.*

On se donne ici un point a de $\tilde{M}$ et une droite géodésique Γ telle que dist $(a, \Gamma) \geqq C > 0$ où C est un nombre universel. On paramètre Γ par la longueur de l'arc s à partir de la projection b de a sur Γ. On note $\beta(s) = d(a, p(s))$.

DÉFINITION: *Une famille d'applications* $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *sera dite de type exponentiel en distance* (E.d) *s'il existe des nombres* C *et* C' *universels tels que*: $|f(s)| \leqq Ce^{C'\beta(s)}$.

LEMME 6: *Les dérivées de* $\beta(s)$ *sont de type E.d.*

DÉMONSTRATION: Nous noterons $Y(\tau)$ le champ de Jacobi sur le segment géodésique $(a, p(s))$ paramétré par τ de 0 à 1 tel que $Y(0) = 0$, $Y(1) = p'(s)$. On définit un repère (u, v) comme en 2.3(a), alors $Y = \bar{y}u + yv$. y et $\bar{y}$ vérifiant les équations suivantes:

$$\bar{y}(0) = 0, \quad \bar{y}(1) = \cos\theta, \quad \ddot{\bar{y}} = 0$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = \sin\theta, \quad \ddot{y} + \sigma\beta^2 y = 0.$$

On a: $\beta'(s) = \cos\theta$; $\beta''(s) = 1/\beta(s)$; $E(Y_s) = -\sin\theta \cdot \theta'(s)$.

Faisons les remarques suivantes:

(i) On peut montrer à l'aide d'un calcul de variation que

$$|\sin\theta| \geqq \frac{shAd(a, b)}{shA\beta(s)},$$

donc $1/\sin\theta$ est de type E.d.

$$\text{(ii)} \qquad \frac{B}{thB\beta}\sin^2\theta \leqq \frac{1}{\beta}E(Y) \leqq \frac{A}{thA\beta}\sin^2\theta$$

Donc β, β', β'' et θ' sont de type E.d.

NOTATION: Soit $f: \boldsymbol{R}\times[0, 1] \to \boldsymbol{R}$ une fonction de s et τ, (f, k) signifie que f et ses dérivées par rapport à s jusqu'à l'ordre k compris sont de type E.d.

Pour démontrer le lemme il suffit evidemment d'établir par récurrence la propriété (P_k) suivante:

$$(P_k) \quad (\beta, k+1),\ (\theta, k),\ \forall p \in \boldsymbol{N}(D_{0,p}, k) \text{ et } y\ (D_{0,p}\bar{y}, k)$$
$$\forall (p, i) \in \boldsymbol{N}\times \boldsymbol{N}(D_{0,p}(\Delta^i\sigma), k)$$

(P_0) et (P_1) se démontre comme dans 1, proposition 4.

Montrons que (P_k) implique (P_{k+1}). L'expression de β'' montre que (β, k), $(D_{0,p}y, k)$ et (σ, k) impliquent $(\beta, k+2)$ et il est clair d'après la remarque (i) que cela implique $(\theta, k+1)$. Vus les systèmes vérifiés par y et $\bar{y}$ (β, k), (θ, k) et $(D_{0,p}\sigma, k)$ impliquent $(D_{0,p}y, k)$ et $(D_{0,p}\bar{y}, k)$.

Il reste donc à montrer que $(\beta, k+2)$, $(\theta, k+1)$, $(D_{0,p}y, k)$, $(D_{0,p}\bar{y}, k)$ et $(D_{0,p}(\Delta^i\sigma), k)$ impliquent $(D_{0,p}(\Delta^i\sigma), k+1)$.

Suivant la méthode utilisée pour la condition (E), nous introduisons la carte Ω : $(s, \tau) \rightsquigarrow$ le point de paramètre τ de $(a, p(s))$.

L'expression du laplacien d'une fonction $f(s, \tau)$ est:

$$\Delta f = -\frac{1}{\beta y}\left(D_{1,0}\left(\frac{\beta}{y}\cdot D_{1,0}f - \frac{\bar{y}}{y}D_{0,1}f\right)\right)$$
$$+D_{0,1}\left(-\frac{\bar{y}}{y}D_{1,0}f - \frac{y^2+\bar{y}^2}{\beta y}D_{0,1}f\right)$$

Donc:

$$D_{2,0}f = -y^2\Delta f + \frac{2\bar{y}}{\beta}D_{1,1}f - \frac{y^2+\bar{y}^2}{\beta^2}D_{0,2}f - \frac{a}{\beta}D_{1,0}f - \frac{b}{\beta}D_{0,1}f$$

Avec

$$a = y\left(D_{1,0}\left(\frac{\beta}{y}\right) - D_{0,1}\left(\frac{\bar{y}}{y}\right)\right) \ ; \ b = y\left(D_{1,0}\left(\frac{\bar{y}}{y}\right) - D_{0,1}\left(\frac{y^2+\bar{y}^2}{\beta y}\right)\right)$$

Montrons que (P_k) implique pour tout $p \in \boldsymbol{N}(D_{0,p}a$ et $D_{0,p}b, k-1)$. Vu la forme de a et b et que $y \geqq \sin\theta\cdot A\beta t/shA\beta$, il suffiit de montrer que y/τ et ses dérivées par rapport à τ vérifient $(D_{0,p}(\bar{y}/\tau), k)$.

Cela résulte du fait que:

$$\frac{y(\tau)}{\tau} = \int_0^1 D_{0,1}\,y(u\tau)\,du$$

et de la propriété (P_k). Si on applique à $\Delta^i\sigma$ l'expression de $D_{2,0}$ écrite ci-dessus et que l'on dérive p fois par rapport à τ et $k-1$ fois par rapport à s, on aura montré que $D_{k+1,p}\Delta^i\sigma$ est de type E.d. Ce qui démontre le lemme.

(e) *Majoration des dérivés de* $t \rightsquigarrow \frac{1}{4}d^2(\Phi(s,t), \gamma\Phi(s,t))$

Si on pose

$$\psi(t) = \sup_{\substack{|t_1|\leqq t\\ |t_2|\leqq t}} \delta(t_1, t_2),$$

il est clair que les dérivées $\tilde{\delta}$, $\tilde{\delta}'$ et $\tilde{\delta}''$ sont majorées par des exponentielles $\psi(t)$. Il résulte de (b) que ψ vérifie l'hypothèse du lemme 5, en utilisant (d) il vient que les dérivées $\tilde{\delta}^{(k)}$ sont majorées par des exponentielles à coefficients universels de $\psi(2t)$.

(f) *Majoration des dérivées de* $\theta^{-\frac{1}{2}}(\Phi(s,t), \gamma\Phi(s,t), \phi(\Phi(s,t))$ *et* $j(s,t)$ *par rapport à* t.

Ces majorations jusqu'à l'ordre 2 ne présente pas de difficultés. Les dérivées ce ces trois fonctions sont majorées par des exponentielles à coefficients universels de $\psi(t)$.

(g) *Calcul de* $I_\gamma(z)$

Nous sommes amenés à distinguer les trois cas suivants:

1*er Cas*: $\gamma = Id$

La formule (3) donne alors:

$$I_{\mathrm{Id}}(z) = \int_{\tilde{M}} \phi(x) v_{\tilde{M}}(x).$$

D'après le lemme 1, on a donc:

$$I_{\mathrm{Id}}(z) = \mathrm{vol}\,(M).$$

2ème Cas: *distance* $(Supp\ \phi, A_\gamma) \geqq t_0$ (t_0 *est le nombre universel déjà défini en b*))

Pour ce cas et le troisième, on pose:

$$\alpha(t) = \tfrac{1}{4}d^2(\Phi(s,t), \gamma\Phi(s,t))$$
$$h(t) = \theta^{-\frac{1}{2}}(\Phi(s,t), \gamma\Phi(s,t))\phi(\Phi(s,t)j(s,t)$$

et on suppose que z est dans C_{ξ_0}. Pour majorer

$$\int_{\boldsymbol{R}} e^{-z\alpha(t)} h(t)\,dt$$

on remarque que α est monotone sur $\boldsymbol{R}^+$ et sur $\boldsymbol{R}^-$. Sur $\boldsymbol{R}^+$ par exemple, on pose $\alpha(t) = u$ et une intégration par parties utilisant le fait que $h(0) = 0$ donne:

$$\int_{\boldsymbol{R}^+} e^{-z\alpha(t)} h(t)\,dt = \int_{L_a^2/4}^{+\infty} e^{-zu} \left(\frac{h}{\alpha'}\, {}_0\alpha^{-1}\right)(u)\,du$$

$$\int_{\boldsymbol{R}^+} e^{-z\alpha(t)} h(t)\,dt = \frac{1}{z}\int_{L_a^2/4}^{+\infty} e^{-zu} \left(\frac{\alpha' h' - \alpha'' h}{\alpha'^3}\, {}_0\alpha^{-1}\right)(u)\,du$$

Soit y_0 un point de Supp ϕ, on a pour tout x dans Supp ϕ:

$$|d(x, \gamma x) - d(y_0, \gamma y_0)| \leqq 2d_0$$

De plus, le choix de t_0 implique que, sur le support de h, $|\alpha'(t)|$ est minoré par un nombre universel. Des majorations des dérivées de h et α jusqu'à l'ordre 2(e) et (f), on déduit l'inégalité suivante:

$$\left|\int_{\boldsymbol{R}^+} e^{-z\alpha(t)} h(t)\,dt\right| \leqq \frac{1}{|z|}\,\frac{(d(y_0, \gamma y_0) + 2d_0)^2}{4} \cdot e^{-\frac{1}{4}\xi_0 (d(y_0, \gamma y_0) - 2d_0)^2} \cdot C_1\, e^{C_2 (d(y_0, \gamma y_0) + d_0)}$$

Donc, en faisant de même pour l'intégrale sur $\boldsymbol{R}^-$, et en intégrant par rapport à s sur une longueur utile ne dépassant pas d_0, on a:

$$|(I_\gamma(z))| \leqq \frac{1}{|z|}\, C_3\, e^{C_4(y_0, \gamma y_0)} \cdot e^{-\frac{1}{4}\xi_0 d^2(y_0, \gamma y_0)}$$

3ème cas: distance (Supp ϕ, A_γ) $< t_0$

Ici $h(0)$ n'est pas nécessairement nul, on se sert du lemme 2. Le calcul de $\alpha''(0)$ utilise, pour chaque valeur de s, un champ de Jacobi Y_s sur A_γ tel que:

$$Y_s(s) = v_s;\ Y_s(s + L_a) = \gamma'(v_s)$$

$(\gamma'(v_s) = \varepsilon v_{s+L_a}$, avec $\varepsilon = +1$ ou -1 selon que γ conserve ou non l'orientation).

Ce champ de Jacobi reste colinéaire à v, on peut poser:

$$Y_s(\omega) = y_s(\omega) \cdot v_\omega.$$

On a alors d'après la formule de la variation seconde:

$$\alpha''(0) = \frac{L_a}{2}\int_s^{s+L_a} ((y_s'(\omega))^2 - \sigma(\omega)(y_s(\omega))^2)\,d\omega$$

$$\alpha''(0) \geqq \frac{BL_a}{th(BL_a)}\left(1 - \frac{1}{chBL_a}\right).$$

Donc $\alpha''(0)$ est minoré par une constante universelle C_5 strictement positive. Le lemme 2 s'écrit alors:

$$\int_{\boldsymbol{R}} e^{-z\alpha(t)} h(t)\,dt = \left\{\left(\frac{2\pi}{\alpha''(0) z}\right)^{\frac{1}{2}} \theta^{-\frac{1}{2}}(m_s, m_{s+L_a})\phi(m_s) + \frac{1}{z} R(z)\right\} e^{-\frac{1}{4} z L_a^2}$$

avec

$$|R(z)| \leqq P\left(\frac{2}{C_5}\ ;\ C_6\, e^{C_7\psi(2(t_0+d_0))};\ C_8\, e^{C_9\psi(t_0+d_0)};\ t_0+d_0\right)$$

on en déduit:

$$|R(z)| \leqq C_{10}\, e^{C_{11}d(y_0,\,\gamma y_0)}.$$

De ces deux derniers cas, on déduit le

THÉORÈME 5: *Soit y_0 un point de Supp ϕ, y_s la fonction décrite plus haut, et supposons z dans C_{ξ_0}, on a, pour $\gamma \neq Id$:*

$$I_\gamma(z) = \left(\frac{4\pi}{z}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{4}zL_a^2} \cdot \int_{\boldsymbol{R}} \left[L_a\left(\int_s^{s+L_a} (y_s'(\omega))\right)^2 - \sigma(\omega)(y_s(\omega))^2 d\omega)\theta(m_s, m_{s+L_a})\right]^{-\frac{1}{2}} \phi(m_s)\, ds + \frac{1}{z} R_\gamma(z)$$

Avec

$$|R_\gamma(z)| \leqq De^{Ed(y_0,\,\gamma y_0)} \cdot e^{-\frac{1}{4}\xi_0 d^2(y_0,\,\gamma y_0)}$$

D et E désignant des nombres universels. En effet dans le deuxième cas $\phi(m_s)$ est nul pour tout s et $I_\gamma(z) = 1/z\, R_\gamma(z)$.

2.4. *Conclusion*

Utilisant l'égalité (2) et le théorème 5, il vient:

$$\sum_{k\in\boldsymbol{N}} e^{-\lambda_k/z} = \frac{z}{4\pi}(\operatorname{vol} M) + \left(\frac{z}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\gamma\in\Gamma-\{\mathrm{Id}\}} C_\gamma\, e^{-\frac{1}{4}zL_a^2} + \frac{1}{4\pi}\sum_{\gamma\in\Gamma} R_\gamma(z) + 0^+(1)$$

D'après le théorème 2 et la majoration de R_γ du théorème 5, on a:

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} R_\gamma(z) = 0^+(1).$$

En posant $\sum_{\gamma\in a} C_\gamma = u_a$, on obtient:

$$\sum_{k\in\boldsymbol{N}} e^{-\lambda_k/z} = \frac{z}{4\pi}\operatorname{vol} M + \left(\frac{z}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{a\in\mathscr{L}-\{\mathrm{Id}\}} u_a\, e^{-\frac{1}{4}zL_a^2} + 0^+(1)$$

Ce qui est exactement le théorème énoncé dans l'introduction. Son corollaire se déduit immédiatement en fixant ξ_0 et en prenant la transformation de Fourier par rapport à $\eta = \mathrm{Im}(z)$.

Il rest à donner une expression des u_a qui ne dépende pas du choix de ϕ. Soit G_a la géodésique périodique de la classe a, on a: $\bigcup_{\gamma\in a} A_\gamma = \pi^{-1}(G_a)$; choisissant un γ de a et utilisant le lemme 1, il vient:

$$u_a = \int_0^{L_a} \left[L_a\left\{\int_s^{s+L_a} (y_s'^2(\omega) - \sigma(\omega)y_s^2(\omega))\, d\omega\right\} \theta(m_s, m_{s+L_a})\right]^{-\frac{1}{2}} ds.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. P. Mc Kean & I. M. Singer: Curvature and the eigenvalues of the Laplacien. *J. of diff. geom., 1* (1967) 43-69.

[2] R. Balian & Bloch: Distributions of Eigenfrequencies for the wave equation in a finite domaine III. Eigenfrequencies density oscillations. *Ann. of Physics, 69, vol. 1* 76–160.

[3] M. Berger, P. Gauduchon & E. Mazet: Le spectre d'une variété riemannienne. *Lecture Notes in Mathematics, 194* (1971) Springer Verlag.

[4] M. Berger: Séminaire 1970–1971. Variétés a courbure négative.

[5] H. Huber: Zur analytischen Theorie hyperbolischer Raumformen and Bewegungsgruppen. *Math. Annalen, 138* (1959) 1–26.

[6] R. L. Bishop & R. J. Crittenden: *Geometry of Manifolds* (1964) Academic Press.

[7] Y. Colin de Verdiere: Spectre du laplacien et longueurs des géodésiques périodiques. C.R.A.S. Paris – t 275 A, 805–808.

[8] A. Avez: Géodésiques fermées des variétés compactes à courbure négative. C.R.A.S. Paris – t 270 A, 1512–1514.

(Oblatum 23–I–1973)

67, rue Croulebarbe,
75013 PARIS