FRIEDRICH W. BAUER

# Die homotopiekategorie der Boardman-Spektren ist zur Homotopiekategorie der Kan-Spektren Äquivalent

*Compositio Mathematica*, tome 28, nº 1 (1974), p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1974__28_1_1_0>

COMPOSITIO MATHEMATICA, Vol. 28. Fasc. 1, 1974, pag. 1–8
Noordhoff International Publishing
Printed in the Netherlands

# DIE HOMOTOPIEKATEGORIE DER BOARDMAN-SPEKTREN IST ZUR HOMOTOPIEKATEGORIE DER KAN-SPEKTREN ÄQUIVALENT

Friedrich W. Bauer

## Einleitung

Der im Titel angegebene Satz (Satz 2.3.) wird mit den Hilfsmitteln von [2] bewiesen. Eine wesentliche Rolle spielt dabei der Satz von C. M. Ringel [8] (§ 1 (3)) und die Charakterisierung der Homotopiekategorie der Boardman-Spektren aus [2] (Sstz 2.1.).

Beim Begriff des Praespektrums bedienen wir uns der Ergebnisse von [3], wo die Kategorie der Praespektren sich als eine Funktorkategorie $\boldsymbol{K}^G$ von Operatorfunktoren E: $(A, G) \to (A, \boldsymbol{K})$ herausstellt. Bezüglich der Definition einer Operatorkategorie und eines Operatorfunktors verweisen wir auf [1] oder [2]; den Begriff einer Quotientenkategorie $\boldsymbol{K}/\boldsymbol{M}$ (wo $\boldsymbol{M}$ eine Klasse von Morphismen in $\boldsymbol{K}$ ist) entnehmen wir Z.B. [4]. Wir erinnern daran, dass unter $\boldsymbol{K}/\phi$ wo $\phi : \boldsymbol{K} \to \boldsymbol{L}$ ein Funktor ist, die Kategorie $\boldsymbol{K}/\boldsymbol{M}$ mit $\boldsymbol{M} = \{f/\phi(f) = \text{Isomorphismus}\}$ verstanden wird.

Obwohl sich kein Beweis in der Literatur zu finden scheint, ist Satz 2.3. keineswegs neu. In [6] wird ein Beweis angekündigt; auch gibt es unveröffentlichte Beweise dieses Satzes (Z.B. von D. Burghelea). Ein anderer als der hier durchgeführte Beweisgedanke wird in [5] angedeutet. Uber ihn wird in § 3 etwas gesagt.

Allerdings ist unser Anliegen nicht nur einen Beweis für einen bekannten Satz zu liefern, sondern darüberhinaus die damit verbundene Analyse der Kategorien der Boardman-bezw. Kan-Spektren zu einer kritischen Untersuchung ihrer Stellung in der Theorie der Operatorkategorien und der kategorischen Stabilisierung zu nutzen.

## 1. Praespektren und adjungierte Funktoren

In [1], [3] haben wir Praespektren für beliebige Operatorkategorien definiert. Ist $\boldsymbol{K} = (A, \boldsymbol{K}) \in \boldsymbol{Wop}$. So ist $\boldsymbol{K}^G$ die Kategorie der Praespektren (über $\boldsymbol{K}$), wo $(A,\ G)$ die Operatorkategorie mit diskreter Grundkategorie $G = \bar{A}$ (der gruppentheoretischen Vervollständigung von $A$) ist. Ein Objekt $E \in \boldsymbol{K}^G$ ist ein Operatorfunktor $E = (1, E, \omega) : (A, G \to (A,\ \boldsymbol{K})$ und eine Abbildung in $\boldsymbol{K}^G$ eine Operatortransformation. In [3] wird erklärt, wie man aus $\boldsymbol{K}^G$ (durch Definition einer Operation von $\boldsymbol{A}$ auf $\boldsymbol{K}^G$) eine Operatorkategorie macht. Wir wollen, wo es nötig wird, abweichend von der dortigen Terminologie, auch diese Operatorkategorie einfach mit $\boldsymbol{K}^G$ (und nicht mit $O(G, \boldsymbol{K})$ bezw. $O'(G, \boldsymbol{K})$) bezeichnen.

Nennen wir $\boldsymbol{Wop}_A \subset \boldsymbol{Wop}$ die Kategorie aller Operatorkategorien mit fester Halbgruppe $A$ und Funktoren $T = (1, T, \omega) : (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{K}) \to (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{L})$, kann man feststellen:

1.1. SATZ: *Es ist die Zuordung*

$$(\ )^G : \boldsymbol{Wop}_A \to \boldsymbol{Wop}_A.$$

*ein 2-Funktor.*

BEWEIS: Sei $T = (1, T, \omega) : K \to L$ ein Funktor, so ist durch

$$T^G(E) = TE, \quad E \in K^G$$

und durch

$$\zeta^G_E = \zeta E: \quad T^G(E) = TE \longrightarrow S^G(E) = SE, \ T, S \in \boldsymbol{Wop}_A\,(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{L}),$$

für $\zeta \in \boldsymbol{Wop}_A(T, S)$ ein 2-Funktor definiert. Der Nachweis der Eigenschaften für einen 2-Funktor im Einzelnen sei dem Leser überlassen.

1.2. KOROLLAR: *Ist*

(1)
$$\boldsymbol{K} \underset{T}{\overset{S}{\rightleftarrows}} \boldsymbol{L}$$

*in $\boldsymbol{Wop}_A$ ein Paar adjungierter Funktoren, so ist auch das Paar*

(2)
$$\boldsymbol{K}^G \underset{T^G}{\overset{S^G}{\rightleftarrows}} \boldsymbol{L}^G$$

*adjungiert.*

Nach einem Satz von C. M. Ringel [8] gibt es zu einem Paar adjungierter Funktoren (1) mit natürlichen Transformationen $\alpha : 1_{\boldsymbol{K}} \to ST$, $\beta : TS \to 1_L$ äquivalente Homotopiekategorien

(3)
$$\boldsymbol{K}_h = \boldsymbol{K}/\{\alpha\} \approx \boldsymbol{L}/\{\beta\} = \boldsymbol{L}_h.$$

Seien nun $\Pi : \boldsymbol{K} \to \boldsymbol{M}$, $P : \boldsymbol{L} \to \boldsymbol{M}$ zwei Funktoren in $\boldsymbol{Wop}$ (in den Anwendungen wird immer $\boldsymbol{M} \in \boldsymbol{Sop}$ (= Kategorie der stabilen Operatorkategorien sein) die mit $S$, $T$ verträglich sind. D.h. es gibt natürliche Isomorphismen

(4)
$$\Pi S \approx P$$
$$PT \approx \Pi$$

dann gilt:

1.3. Lemma: *Sinc $\Pi$ und $P$ homotopieinvariant (d.h. faktorisieren sie über $\eta_K : K \to K_h$ bezw. $\eta_L : L \to L_h$) so induzieren* (3) *und* (4) *eine Äquivalenz der Kategorien:*

(5) $$K/_{\Pi} \approx L/_{P}.$$

Beweis: Aus (4) folgt, dass es ein Paar adjungierter Funktoren

$$\begin{tikzcd} K/_{\Pi} \arrow[r, shift left, "S'"] & L/_{P} \arrow[l, shift left, "T'"] \end{tikzcd}$$

(die durch das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} K \arrow[d, "\theta_{\Pi}"'] \arrow[r, shift right, "T"'] & L \arrow[l, shift right, "S"'] \arrow[d, "\theta_P"] \\ K/_{\Pi} \arrow[r, shift right, "T'"'] & L/_{P} \arrow[l, shift right, "S'"'] \end{tikzcd}$$

eindeutig bestimmt sind) gibt. Nun haben wir aber folgendes kommutative Diagramm:

(6) $$\begin{tikzcd} K_h \arrow[r, phantom, "\approx"] \arrow[d, "\tau_K"'] & L_h \arrow[d, "\tau_L"] \\ K/_{\Pi} \arrow[d] \arrow[r, shift right, "T'"'] & L/_{P} \arrow[l, shift right, "S'"'] \arrow[d] \\ (K/_{\Pi})_h \arrow[r, phantom, "\approx"] & (L/_{P})_h \end{tikzcd}$$

Hier ist z.B. $\tau_K$ durch die Kommutativität von

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\tau_K"] \arrow[dr, "\theta_\eta"'] & K_h \arrow[d, "\tau_K"] \\ & K/_{\Pi} \end{tikzcd}$$

($\theta_\Pi$ = natürliche Projektion) eindeutig bestimmt. Es ist aber jedes $\alpha'_K : K \to S'T'K (\beta'_L : T'S'L \to L)$ nach Voraussetzung bereits in $K/\Pi$ (bezw. in $L/_{\rho}$) ein Isomorphismus. Also sind $S'$, $T'$ Äquivalenzen von Kategorien. Zu unserem Funktor $\Pi : K \to M$ gibt es einen Funktor $\Pi^G$ : $K^G \to M^G$, ebenso wie zu $P$ einen Funktor $P^G$. Es sei ferner ein fester Funktor lim: $M^G \to M$ in ***Sop*** vorgegeben (die Bezeichnung "lim" hat im Moment noch nichts mit Limites zutun, sie wird erst in den Anwendungen einen Sinn bekommen). Wir nennen

$$\lim \Pi^G = \Pi, \lim P^G = \rho.$$

Wir setzen voraus, dass $S$, $T$ adjungierte Funktoren in ***Wop*** und $\Pi$, $P$ mit $S$, $T$ verträgliche und homotopieinvariante Funktoren sind. Es gilt:

1.4. SATZ: *Die Funktoren $S^G$, $T^G$ vermitteln Äquivalenzen der Kategorien*

$$K^G/\pi \approx L^G/\rho. \tag{7}$$

BEWEIS: Nach Korollar 1.2. und Lemma 1.3. gibt es eine Äquivalenz

$$K^G/\Pi^G \approx L^G/P^G, \tag{8}$$

da auch $\Pi^G$, $P^G$ mit $S^G$, $T^G$ verträglich sind und, wie man sofort nachrechnet, über die Homotopiekategorie faktorisieren: Es ist z.B. $\Pi^G(\alpha_E) = \Pi(\alpha E)$ für alle $E \in K^G$ ein Isomorphismus. Aus (8) folgt aber sofort (7).

## 2. Boardman- und Kan-Spektren

Sei $\boldsymbol{CW} = (Z^+, \boldsymbol{CW})$ die Kategorie der CW-Räume mit Basispunkt. Die Halbgruppe $Z^+$ operiert durch die iterierte reduzierte Einhängung $\Sigma^0 = 1, \Sigma, \Sigma^2, \cdots$ Wir nennen $\boldsymbol{CW}^{\mathbf{Z}}$ auch $\mathscr{P}$. Es ist $\mathbf{Z} = \bar{\mathbf{Z}}^+$. – Entsprechend nennen wir $\mathscr{P}^s$ die Kategorie $\mathscr{S}_E^{\mathbf{Z}}$, wo $\mathscr{S}_E$ die Kategorie der Kan-Komplexe mit Baispunkt ist. Sei $\boldsymbol{M}$ die Kategorie der graduierten Gruppen, so gibt es für beide Kategorien (mit dem gleichen Buchstaben bezeichnete) Homotopiefunktoren

$$\pi : \mathscr{P} \to \boldsymbol{M}, \pi : \mathscr{P}^s \to \boldsymbol{M}, \tag{9}$$

die durch

$$\pi_n(E) = \varinjlim \pi_{n+K}(E(k)) \tag{10}$$

erklärt sind. In [2] wird folgender Satz bewiesen:

2.1. SATZ: *Es gibt eine Äquivalenz der Operatorkategorien*

$$\mathscr{P}/_\pi \approx \mathfrak{B}_h$$

wo $\mathfrak{B}_h$ die Boardmansche Homotopiekategorie ist. Eine Definition von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_h$ findet der Leser z.B. in [6]. Man kann unter Zuhilfenahme von [7] den Beweis von Satz 2.1. (theorem 3.7. in [2]) zu einem Beweis des folgenden Satzes modifizieren:

2.2. SATZ: *Es gibt eine Äquivalenz der Kategorien*

$$\mathscr{P}^s/_\pi \approx \mathscr{S}\mathscr{p}_{Eh}$$

wo $\mathscr{S}\mathscr{p}_{Eh}$ die Homotopiekategorie der Kan-Spektren ist. Ziel dieses Abschnittes ist der Beweis des folgenden Satzes:

2.3. SATZ: *Die Kategorien* $\mathfrak{B}_h$ *und* $\mathcal{S}\!\not{p}_{Eh}$ *sind (sogar als Operatorkategorien) äquivalent.*

Nach Satz 2.1., 2.2 genügt es hierzu folgendes zu zeigen:

2.4. LEMMA: *Es gibt eine Äquivalenz der Operatorkategorien*

$$\mathcal{P}^s/_\pi \approx \mathcal{P}/_\pi.$$

Da aber $\mathcal{P} = \boldsymbol{CW}^Z$, $\mathcal{P}^s = \mathcal{S}_E^Z$ ist, die Funktoren

$$\mathcal{S}_E \underset{R}{\overset{S}{\rightleftarrows}} \boldsymbol{CW}$$

($S$ = Singularisierung, $R$ = geometrische Realisierung) zueinander adjungiert sind und man die jeweiligen Homotopiefunktoren (die wir jetzt $\tilde{\pi}: \mathcal{S}_E \to \boldsymbol{M}$, bezw. $\tilde{\pi}: \boldsymbol{CW} \to \boldsymbol{M}$ nennen wollen) zur Verfügung haben, genügt es zu zeigen, dass es einen Funktor

$$\lim : \boldsymbol{M}^Z \longrightarrow \boldsymbol{M}$$

in *Sop* gibt, so dass

$$\lim \tilde{\pi}^Z = \pi \tag{11}$$

(für beide Funktoren $\pi: \mathcal{P} \to \boldsymbol{M}$ bezw. $\pi: \mathcal{P}^s \to \boldsymbol{M}$) gilt. Offenbar erfüllt $\tilde{\pi}$ alle Forderungen aus Lemma 1.3. Zur Konstruktion von lim und damit zum Beweis von (11) sehen wir uns $\boldsymbol{M}$ und $\boldsymbol{M}^Z$ etwas genauer an: Die Objekte von $\boldsymbol{M}$ sind Folgen $\{M_n | \, n \in Z\}$ von Gruppen. Wir erklären

$$\Sigma^k\{M_n\} = \{M_{n-k}\}$$

und erhalten so die Operatorkategorie $(Z^+, \boldsymbol{M})$. Ein Objekt $E \in \boldsymbol{M}^Z$ ist nun ein Funktor, den man auch als

$$E(n) = \{E_{n,k}\} \quad n \in Z, k \in Z$$

schreiben kann. Es ist eine Abbildung $\omega : \Sigma E(n) \to E(n+1)$ gegeben, also eine Schar von Abbildungen

$$\omega_{n,k} : E_{n,k-1} \longrightarrow E_{n+1,k}$$

Wir setzen

$$\lim E = \{\varinjlim E_{k,n+k}\}.$$

2.4. LEMMA: *Es ist* lim: $\boldsymbol{M}^Z \to \boldsymbol{M}$ *ein stabiler Funktor.*

Der Beweis besteht im unmittelbaren Nachrechnen.

2.5. LEMMA: *Es ist*

$$\lim \tilde{\pi}^Z = \pi.$$

Beweis: Ist $F \in \boldsymbol{CW}^Z$, so ist

$$\tilde{\pi}^Z(F)(n) = \{\pi_k(F(n))\}$$

und

$$\lim \tilde{\pi}^Z(F)_n = \varinjlim_k \pi_{n+k}(F(k)),$$

was mit (10) übereinstimmt.

Damit ist Lemma 2.5. und Satz 2.3. bewiesen.

### 3. Satz 2.3. und die kategorische Stabilisierung

In [5] wird auf einen anderen Weg zum Beweis von Satz 2.3. verwiesen, der sich der in [1] entwickelten Methode der kategorischen Stabilisierung bedient. Wir wollen uns hier kurz und ohne auf technische Einzelheiten einzugehen mit diesem Beweis gedanken beschäftigen. Ist ***Sop*** die 2-Kategorie der stabilen ***Wop*** die 2-Kategorie der Operatorkategorien, $i : \boldsymbol{Sop} \subset \boldsymbol{Wop}$ der Inklusions-2 Funktor, so besagt ein Satz aus [1]:

3.1. Satz: *Es gibt zu i einen 2-linksadjungierten 2-Funktor*

$$\wedge : \boldsymbol{Wop} \to \boldsymbol{Sop}.$$

*Wir nennen* $\wedge$ *den 'Stabilisierungsfunktor'.*

*Da* $\wedge$ *ein Paar adjungierter Funktoren in ein ebensolches Paar überführt, kann man das Paar adjungierter Funktoren*

$$\mathscr{S}_E \underset{S}{\overset{R}{\leftrightarrows}} \boldsymbol{CW} \tag{12}$$

*zu einem Paar adjungierter Funktoren*

$$\hat{\mathscr{S}}_E \underset{\hat{S}}{\overset{\hat{R}}{\rightleftarrows}} \widehat{\boldsymbol{CW}} \tag{13}$$

*stabilisieren. Wendet man auf* (13) *den Satz von Ringel an, so erhält man eine Äquivalenz der Homotopiekategorien*:

$$(\hat{\mathscr{S}}_E)_h \approx (\widehat{\boldsymbol{CW}})_h \tag{14}$$

Es stellt sich heraus, dass der über den Satz von Ringel gewonnene Homotopiebegriff mit der kanonischen Stabilisierung des Homotopiebegriffes aus [2] in $\mathscr{S}_E$, $\boldsymbol{CW}$ übereinstimmt. Das alles ist aber trotzdem kein Beweis von Satz 2.3., denn es ist weder $(\mathscr{S}_E)_h \approx \mathscr{S}\mathit{p}_{Eh}$ noch $(\widehat{\boldsymbol{CW}})_h \approx \mathfrak{B}_h$.

Es gilt allerdings Folgendes: Man ersetze ***Wop*** durch ***Wopl***, die 2-Kategorie der Operatorkategorien mit beliebigen (kleinen) Kolimites (in Zukunft kurz 'Limites' genannt) und limeserhaltenden Funktions. als 1-Morphismen. Ebenso verfahre man mit ***Sop*** und kommt zu ***Sopl***. Sodann gilt analog zu Satz 3.1.:

3.2. Satz: *Es gibt zur Inklusion i: **Sopl** $\subset$ **Wopl** einen 2-links adjungierten 2-Funktor*

$$\hat{} : \boldsymbol{Wopl} \longrightarrow \boldsymbol{Sopl}.$$

Dieser Satz wird in [2] (theorem 4 2.) bewiesen, wo sich auch folgende Aussage findet (theorem 4.3.):

3.3. Satz: *Sei ${}_IC$ die kategorie der CW-Komplexe mit Basispunkt und zellulären Inklusionen, so ist*

$${}_I\hat{C}_h \approx \mathfrak{B}_h$$

*(jetzt wird ^ im Sinne von Satz 3.2. verstanden$_g$).*

Ohne Mühe lässt sich ein entsprechender Satz für ${}_I\mathscr{S}_E$ zeigen (${}_I\mathscr{S}_E = \mathscr{S}_E$ mit Inklusionen als Morphismen):

3.3. Satz: *Es ist*

$${}_I\mathscr{S}_{Eh} \approx \mathscr{S}\not{p}_{Eh}.$$

Man kann jetzt das Funktorpaar

$$(15) \qquad {}_I\mathscr{S}_E \overset{R}{\rightleftarrows} {}_IC$$

(die Beschränkungen von $R$ und $S$ auf die entsprechenden Unterkategorien existieren tatsächlich!) so modifizieren, dass es zu einem adjungierten Paar in ***Wopl*** wird. Es ist (15) kein adjungiertes Paar, denn die Transformation $\beta : RS \to 1$ ist nicht mehr in ${}_IC$ (im Gegensatz zu $\alpha : 1 \to SR$, das in ${}_I\mathscr{S}_E$ liegt). Ausserdem ist $S \notin$ *Wopl.* Diese Modifikation geschieht, indem man zu den Inklusionen noch weitere Morphismen hinzu nimmt (alle Retraktionen für ${}_I\mathscr{S}_E$ bezw. alle Retraktionen und alle $\beta_X : RSX \to X$ für ${}_I$C). Auch der Funktor $S$ lässt sich (durch Übergang zu einer Art 'zellulärem singulären Komplex') so verändern, dass er in ***Wopl*** liegt. Für diese neuen Kategorien gelten dann Sätze analog zu Satz 3.3., Satz 3.4. und man kann ohne Mühe in einer Reihe von Einzelschritten beweisen, dass sich auf das so modifizierte Paar (15) nach einer Stabilisierung (im Sinne von Satz 3.2.) der Satz von Ringel anwenden lässt und man die Äquivalenz aus Satz 2.3. erhält.

Wir geben die Einzelschritte nicht an und benutzen diese Andeutung eines Beweisgedankens für Satz 2.3. nur zur Erläuterung folgenden Tatbestandes:

Wie schon in in [2] festgestellt wurde, passen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_h$ in die Theorie der kategorischen Stabilisierung nur über Satz 3.2. Dieser schliesst aber alles von einer kategorischen Stabilisierung aus, was nicht limestreu ist. Nun liegen zwar alle interessanten Funktoren der Topologie in ***Wop*** aber eben sehr viele nicht in ***Wopl***. Sie werden damit von einer kategorischen Stabilisierung im Sinne der Boardman-Kategorie ausgeschlossen. Um sie dennoch zu stabilisierten bedarf es jeweils zusätzlicher Betrachtungen, die klären sollen, warum ein gegebener Funktor das Recht hat, sich Stabilisierung eines anderen zu nennen.

Aus diesen Gründen scheint die Stabilisierung $\widehat{CW}$ (bezw. $\mathscr{S}_E$) der Kategorie der $CW$-Räume (bezw. Kan-Komplexe) im Sinne von Satz 3.1. der Boeardman-Kategorie $\mathfrak{B}$ (bezw. $\mathscr{S}\not{p}_E$) überlegen zu sein, denn erstere hat alle Vorteile der letzteren, ohne gleichzeitig ihre eben deutlich gemachten Nachteile aufzuweisen.

## REFERENZES

[1] F. W. BAUER: Stabile Kategorien. *Math. Z. 123* (1971) 139–167.
[2] F. W. BAUER: Boardman's category and the process of categorical stabilization. *Math. Z.* Bd. 130 (1973) 95–106.
[3] F. W. BAUER: Tensor products of operator categories. *Math. Annalen* (im Druck).
[4] F. W. BAUER: Homotopietheorie. *BI-Hochshultaschenbücher Bd. 475* Mannheim (1971)
[5] F. W. BAUER: Stable Categories: *Vortrag vor dem 6. All-Unionskongress für Topologie in Tiflis* (1972)
[6] J. M. BOARDMAN: Stable homotopy theory. *Mimeographed Notes.* The Johns Hopkins Univ. (1970).
[7] D. KAN: Semi-simplicial spectra. *Ill. J. Math. 7* (1963) 463–478.
[8] C. M. RINGEL: Eine Charakterisierung der Homotopiekategorie der $CW$-Komplexe. *Math. Z. 115* (1970) 359–365.

(Oblatum: 26–III–1973)

Mathematisches seminar
Der Johann Wolgang Goethe-Universität
Institut für Reine Mathematik
6 Frankfurt am Main
Robert-Mayer-Straße 6-10, Gräfstraße 38