Geir Ellingsrud
Tor Skjelbred

Profondeur d’anneaux d’invariants en caractéristique p

Compositio Mathematica, tome 41, n° 2 (1980), p. 233-244
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1980__41_2_233_0>

COMPOSITIO MATHEMATICA, Vol. 41, Fasc. 2, 1980, pag. 233–244

PROFONDEUR D'ANNEAUX D'INVARIANTS EN CARACTERISTIQUE p

Geir Ellingsrud et Tor Skjelbred

Introduction

Soit $G \cong \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ un groupe d'automorphismes d'un espace vectoriel V de dimension finie sur un corps algébriquement clos k de caractéristique $p > 0$. G opère en tant que groupe d'automorphismes de la k-varieté affine $\mathbf{V}$ correspondant à V et on note $\mathbf{V}/G$ la varieté quotient. Soit $V^G \subset V$ le sous-espace des vecteurs invariants par G. La varieté $\mathbf{V}/G$ est singulière quand $\dim_k V^G \leq \dim_k V - 2$ et nous montrons qu'elle n'est pas de Cohen–Macaulay lorsque $\dim_k V^G < \dim_k V - 2$. En fait, si $x \in \mathbf{V}/G$ est un point fermé provenant d'un élément de V^G, on a la formule

$$\operatorname{prof} \mathcal{O}_{\mathbf{V}/G,x} = \min(2 + \dim_k V^G, \dim_k V).$$

Dans certains cas particuliers, on sait déjà que $\mathbf{V}/G$ n'est pas de Cohen–Macaulay. Bertin [1] l'a demontré pour $G = \mathbf{Z}/9\mathbf{Z}$ quand V est le kG-module indécomposable de dimension 4 sur k; Fossum et Griffith, dans [2], le démontrent pour $G = \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ et $\dim_k V \geq p^{n-1} + 3$, où V est également un kG-module indécomposable.

Soit $V^\vee$ le kG-module $\operatorname{Hom}_k(V, k)$, alors $\mathbf{V}/G = \operatorname{Spec}(\operatorname{Sym}_k(V^\vee)^G)$, et la profondeur de l'anneau gradué d'invariants est $\min(2 + \dim_k V^G, \dim_k V)$. On utilise ce résultat pour trouver un anneau gradué factoriel A avec un groupe d'automorphismes $G \cong \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ tel que $\operatorname{prof} A^G > \operatorname{prof} A$. En fait on a $\dim A = \dim A^G = 6$ et, pour $p \geq 3$, $\operatorname{prof} A = 4$, $\operatorname{prof} A^G = 6$. (En caractéristique 2 on a $\operatorname{prof} A = 5$ et $\operatorname{prof} A^G = 6$.) On montre également que lorsque $G = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ et V est un kG-module de type fini tel que $\dim_k V^G < \dim_k V - 2$, l'anneau d'invariants

0010-437X/80/05/0233-12$00.20/0

$\mathrm{Sym}_k(V^\vee)^G$ satisfait à la condition S_2 de Serre, mais pas aux conditions S_r, $r>2$.

D'une façon plus générale, soit G un groupe fini et V un kG-module de type fini. Alors on a

$$\mathrm{prof}\ \mathrm{Sym}_k(V^\vee)^G \geq 2+\dim_k V^G$$

lorsque $\dim_k V \geq 2+\dim_k V^G$.

Les démonstrations utilisent les suites spectrales reliant la cohomologie de G à valeurs dans $\mathrm{Sym}_k(V^\vee)$ et la cohomologie locale à support dans l'idéal d'augmentation $\mathfrak{n}$ de $\mathrm{Sym}_k(V^\vee)^G$. Le point essentiel est d'estimer la profondeur des modules de cohomologie de G à valeur dans $\mathrm{Sym}_k(V^\vee)$ en degré positif. On utilise pour cela l'action par translation du groupe additif Γ de V^G sur $\mathbf{V}$. Cette action munit les modules $H^i(G, \mathrm{Sym}_k(V^\vee))$ d'une structure de $\mathcal{O}_{\mathbf{V}/G}-\Gamma$-modules cohérents, lorsque $i\geq 0$. Comme toutes les orbites de Γ dans $\mathbf{V}/G$ sont de dimension égale à $\dim_k V^G$ on montre pour tout point fermé $x\in \mathbf{V}/G$ que $\mathrm{prof}\ H^i(G, \mathrm{Sym}_k(V^\vee))_x \geq \dim_k V^G$. En caractéristique p, si $G=\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ et $i>0$, le support du module $H^i(G, \mathrm{Sym}_k(V^\vee))$ est une seule orbite de Γ; c'est donc un module de Cohen–Macaulay.

Au paragraphe 2 on étudie l'action de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ sur les anneaux locaux noethériens A de Cohen–Macaulay, de caractéristique $p>0$. Soit I_F l'idéal engendré par $\{\sigma a - a \mid a\in A,\ \sigma\in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}\}$, c'est-à-dire l'idéal du schéma des points fixes dans $\mathrm{Spec}\ A$. Pour tout idéal premier associé $\mathfrak{p}\in \mathrm{Ass}_{A^{\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}}} H^1(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}, A)$, on a

$$\mathrm{prof}\ A^{\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}} \leq \dim(A/\mathfrak{p}A)+2.$$

Comme $\mathrm{Supp}_{A^{\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}}} H^1(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}, A) \simeq \mathrm{Supp}_A(A/I_F)$, on a, pour toute composante irréductible F_i de $\mathrm{Spec}(A/I_F)$:

$$\mathrm{prof}\ A^{\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}} \leq \dim F_i + 2.$$

§1. Notations. Lemmes techniques

Dans tout ce qui suit, k est un corps de caractéristique $p>0$.

Soit G un groupe cyclique d'ordre p, et σ un générateur de G. L'algèbre de groupe de G sur k, kG, est isomorphe à $k[\sigma]/(\sigma-1)^p$. Soient ∂ et Tr les deux éléments de kG définis par $\partial=\sigma-1$ et $\mathrm{Tr}=\Sigma_{i=0}^{p-1}\sigma^i$. Ils vérifient $\mathrm{Tr}=\partial^{p-1}$.

Soit M un kG-module. Les groupes de cohomologie de G à valeurs dans M, $H^i(G,M)$, $i\geq 0$, peuvent être calculés à partir du complexe

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\partial} M \xrightarrow{\mathrm{Tr}} M \xrightarrow{\partial} M \xrightarrow{\mathrm{Tr}} \cdots.$$

Soit A une k-algèbre. Supposons que G opère sur A en tant que k-algèbre. On appelle AG-module la donnée d'un A-module M et d'une action de G sur M, telle que $g(am) = g(a)g(m)$ pour tout $g \in G$, $a \in A$ et $m \in M$.

Si M est un AG-module, les groupes de cohomologie $H^i(G, M)$ sont des A^G-modules.

L'action de G sur A induit une action de G sur le k-schéma $X = \operatorname{Spec} A$. On a $X/G = \operatorname{Spec} A^G$.

On appellera $\pi : X \to X/G$ le morphisme canonique.

Soit I_F l'idéal de A engendré par ∂A. On désignera le sous-schéma fermé $V(I_F)$ de $\operatorname{Spec} A$ par $F(G, \operatorname{Spec} A)$, ou par F s'il n'y a pas d'équivoque possible. C'est le plus grand sous-schéma de $\operatorname{Spec} A$ sur lequel G opère trivialement, autrement dit le sous-schéma des points fixes de G.

Le G-homomorphisme $\mathrm{Tr} : A \to A^G$ est un A^G-homomorphisme, son image est donc un idéal de A^G, noté $I_{F'}$. Le sous-schéma fermé de $\operatorname{Spec} A^G$ qu'il définit sera noté $F'(G, \operatorname{Spec} A)$, ou simplement F'. Comme ensemble, c'est l'image de $F(G, \operatorname{Spec} A)$ par π, d'après 1.3(i).

Nous allons démontrer quelques lemmes techniques.

LEMME 1.1: *Soient M un AG-module, $a \in A$, et $m \in M$.*

(i) $\partial(am) = \sigma(a)\partial(m) + \partial(a)m = a\partial(m) + \partial(a)\sigma(m)$.

(ii) $a \,\mathrm{Tr}(m) - \mathrm{Tr}(a)m \in \partial M$.

(iii) *Supposons que $\partial a = 0$ et qu'il existe $b \in A$ tel que $\partial b = a$. Alors, pour tout $i \in \mathbf{N}$, $\partial^i(b^i) = i!a^i$.*

DÉMONSTRATION: On vérifie facilement (i). Pour démontrer (ii), on écrit

$$\begin{aligned} a \,\mathrm{Tr}(m) - \mathrm{Tr}(a)m &= a \sum_{i=0}^{p-1} \sigma^i(m) - \sum_{i=0}^{p-1} \sigma^{-i}(a)m \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} (\sigma^i - 1)(\sigma^{-i}(a)m) \in \partial M. \end{aligned}$$

On démontre (iii) par récurrence sur i, le cas $i = 1$ étant l'hypothèse de (iii). Pour tout $i \in \mathbf{N}$, il résulte de (i) l'égalité suivante, $\mu : A \otimes_k A \to A$ étant le morphisme de multiplication.

$$\mu(\partial \otimes id_A + \sigma \otimes \partial)^i(a \otimes b) = \partial^i(ab).$$

Supposons que l'on a $\partial^i(b^i) = i!a^i$. Il vient:

$$\partial^{i+1}(b^{i+1}) = \mu(\partial \otimes id + \sigma \otimes \partial)^{i+1}(b \otimes b^i)$$
$$= (i+1)a\partial^i(b^i) + \sigma^{i+1}(b)\partial^{i+1}(b^i) = (i+1)!a^{i+1}.$$

REMARQUE: Pour $i > 0$, les A^G-modules $H^i(G, A)$ sont des $A^G/I_{F'}$-modules. Pour i impair c'est une conséquence de (ii). Pour i pair, on a même $H^i(G, A) = A^G/\mathrm{Im}\,\mathrm{Tr} = A^G/I_{F'}$.

LEMME 1.2: *Supposons que A soit réduit et que l'application $\mathrm{Tr}: A \to A$ soit nulle. Alors l'opération de G sur A est triviale.*

DÉMONSTRATION: Si l'opération n'était pas triviale, il existerait un élément non nul $a \in A^G \cap \partial A$. Choisissons $b \in A$ tel que $\partial b = a$. D'après le lemme 1.1 on a

$$0 = \mathrm{Tr}\, b^{p-1} = \partial^{p-1}(b^{p-1}) = (p-1)!a^{p-1} = -a^{p-1}.$$

Comme A est réduit on en déduit $a = 0$.

LEMME 1.3: *Si $\pi: \mathrm{Spec}\, A \to \mathrm{Spec}\, A^G$ désigne le morphisme canonique, on a:*

(i) $\pi^{-1}(F') = F$

(ii) $\mathrm{Supp}\, H^1(G, A) = \mathrm{Supp}\, H^2(G, A) = F'$

où $F = F(G, \mathrm{Spec}\, A)$ et $F' = F'(G, \mathrm{Spec}\, A)$.

DÉMONSTRATION: On a évidemment $I_{F'}A \subset I_F$. Il suffit donc de montrer que $\pi^{-1}(F') \subseteq F$. Soit $\mathfrak{p} \in \pi^{-1}(F')$ et supposons que $\mathfrak{p}$ ne soit pas invariant par G. Les idéaux $\mathfrak{p}_i = \sigma^i\mathfrak{p}$, $i = 0, \ldots, p-1$ sont alors tous distincts. Soit $\mathfrak{q} = A^G \cap \mathfrak{p}$. L'anneau $A_\mathfrak{q}$ est un anneau semi-local d'idéaux maximaux $\mathfrak{p}_iA_\mathfrak{q}$, $i = 0, \ldots, p-1$. On a donc un G-isomorphisme $A_\mathfrak{q}/\cap\, \mathfrak{p}_iA_\mathfrak{q} \xrightarrow{\sim} \Pi_{i=0}^{p-1} A_\mathfrak{q}/\mathfrak{p}_iA_\mathfrak{q}$, G opérant sur le produit en permutant les facteurs. L'élément $(1, 0, \ldots, 0)$ est alors de trace non nulle, ce qui contredit l'hypothèse $\mathrm{Tr}\, A \subset \mathfrak{q} \subset \cap_{i=0}^{p-1} \mathfrak{p}_i$. On en conclut que $\mathfrak{p}$ est invariant. Comme $I_{F'} = \mathrm{Tr}\, A \subset \mathfrak{p}$, l'application Tr sur $A/\mathfrak{p}$ est nulle. D'après le lemme 1.2 l'action de G sur $A/\mathfrak{p}$ est alors triviale, c'est-à-dire $I_F \subset \mathfrak{p}$.

Quant à (ii), c'est un cas particulier du lemme suivant:

LEMME 1.4: *Soit M un AG-module de type fini sur A. Supposons que M soit engendré par M^G. Alors*

$$\mathrm{Supp}\, H^i(G, M) = \mathrm{Supp}\, M \cap F' \quad \textit{pour } i > 0.$$

DEMONSTRATION: D'après le lemme 1.1(ii), on a $\operatorname{Supp} H^i(G, M) \subseteq \operatorname{Supp} M \cap F'$. Soit alors $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M \cap F'$. Pour $i \geq 0$, on a une application canonique $M^G \to H^i(G, M)$ pouvant s'insérer dans le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} M_{\mathfrak{p}}^G \otimes_k A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} \arrow[r, "\alpha"] & M_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}M_{\mathfrak{p}} \arrow[r, "\beta", "\simeq"'] & H^i(G, M_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}M_{\mathfrak{p}}) \\ & M_{\mathfrak{p}}^G \arrow[ul] \arrow[r] & H^i(G, M)_{\mathfrak{p}}. \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Comme M^G engendre M, l'application α est surjective. G opérant trivialement sur $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$, il opère trivialement sur $M_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}M_{\mathfrak{p}}$, d'où l'isomorphisme β. $H^i(G, M)_{\mathfrak{p}} = 0$ entraînerait $M_{\mathfrak{p}}^G \subset \mathfrak{p}M_{\mathfrak{p}}$, ce qui est impossible (lemme de Nakayama).

§2. Le foncteur $H_{\mathfrak{n}}^*(G, \cdot)$

Soit A un anneau commutatif unitaire où agit un groupe fini G par automorphismes de A. Soit $\mathfrak{m}$ un idéal G-invariant, et soit $\mathfrak{n} = \mathfrak{m} \cap A^G$ sa trace dans A^G. Supposons que A^G soit noethérien, et que A soit un A^G-module de type fini. Notre but est de calculer la $\mathfrak{n}$-profondeur de A^G, c'est-à-dire le plus petit entier i tel que $H_{\mathfrak{n}}^i(A^G) \neq 0$. Ces modules apparaissent comme éléments d'une suite spectrale (E_r) dont l'aboutissement est $H_{\mathfrak{n}}^*(G, A)$ que nous allons définir ci-dessous. La seconde suite spectrale de $H_{\mathfrak{n}}^*(G, A)$ fait intervenir le module $H_{\mathfrak{n}}^*(A)$ et donc l'entier $\operatorname{prof}_{\mathfrak{m}} A = \operatorname{prof}_{\mathfrak{n}} A$. Cela nous permet sous certains hypothèses, d'évaluer $\operatorname{prof}_{\mathfrak{n}} A^G$ quand on connaît $\operatorname{prof}_{\mathfrak{n}} A$. Dans la catégorie des A^GG-modules, soient $H_{\mathfrak{n}}^i(G, M)$ les foncteurs dérivés du foncteur $H_{\mathfrak{n}}^0(M^G) = (H_{\mathfrak{n}}^0(M))^G$. $H_{\mathfrak{n}}^*(G, M)$ est alors un module gradué sur l'anneau $H^*(G, A^G)$. De [3, th. 2.4.1] on déduit l'existence de deux suites spectrales d'aboutissement $H_{\mathfrak{n}}^*(G, M)$. (E_r) désigne la première suite spectrale, où $E_2^{ij} = H_{\mathfrak{n}}^i(H^j(G, M))$, et $(\mathscr{E}_r)$ la seconde suite spectrale où, $\mathscr{E}_2^{ij} = H^i(G, H_{\mathfrak{n}}^j(M))$. Pour $r \geq 2$ ces suites spectrales sont des $H^*(G, A^G)$-modules.

LEMME 2.1: *Soient G un groupe fini et M un A^GG-module. Posons $f = \operatorname{prof}_{\mathfrak{n}} H^1(G, M)$ et supposons que $\operatorname{prof}_{\mathfrak{n}} H^{1+i}(G, M) \geq f - i$ pour $i \geq 1$. Si $\operatorname{prof}_{\mathfrak{n}}(M) \geq f + 2$, alors $\operatorname{prof}_{\mathfrak{n}} M^G = f + 2$ et si $\operatorname{prof}_{\mathfrak{n}} M = f + 1$, alors $\operatorname{prof}_{\mathfrak{n}} M^G \geq f + 1$. Si e est un entier tel que $\operatorname{prof}_{\mathfrak{n}} H^{1+i}(G, M) \geq e - i$ pour $i \geq 0$ et $\operatorname{prof}_{\mathfrak{n}} M \geq e + 2$, alors $\operatorname{prof}_{\mathfrak{n}} M^G \geq e + 2$.*

DÉMONSTRATION: Comme $E_2^{ij} = H^i_{\mathfrak{n}}(H^j(G, M))$ on a $(d_r(E_r))^{ij} = 0$ pour $r \geq 2$ et $i + j \leq f + 1$. A l'aide de la suite spectrale $(\mathscr{E}_r)$ où $\mathscr{E}_2^{ij} = H^i(G, H^j_{\mathfrak{n}}(M))$, on montre que $H^i_{\mathfrak{n}}(G, M) = 0$ pour $i \leq f + 1$ quand $\operatorname{prof}_{\mathfrak{n}} M \geq f + 2$. Cela entraîne que la différentielle de E_2, $d_2 : H^f_{\mathfrak{n}}(H^1(G, M)) \to H^{f+2}_{\mathfrak{n}}(M^G)$ est injective et que $H^i_{\mathfrak{n}}(M^G) = 0$ pour $i \leq f + 1$, d'où $\operatorname{prof}_{\mathfrak{n}}(M^G) = f + 2$. Les autres assertions du lemme se montrent de façon analogue.

Dans ce qui suit on suppose que A est un anneau semi-local de radical $\mathfrak{m}$ et contient le corps $\mathbf{F}_p$ d'ordre p, et que $G = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. On supposera en outre que l'idéal $I_F = ((1 - \sigma)A)A$ est contenu dans $\mathfrak{m}$ et que l'anneau A^G est noethérien de dimension de Krull finie; A^G est alors un anneau semi-local de radical $\mathfrak{n} = \mathfrak{m} \cap A^G$.

LEMME 2.2: *Soit M un AG-module de type fini engendré par M^G. Si $M \neq 0$, alors $H^j(G, M) \neq 0$ pour tout $j \geq 0$.*

DÉMONSTRATION: Pour $j > 0$ on sait par (1.4) que $\operatorname{Supp} H^j(G, M) = F' \cap \operatorname{Supp}(M) \supset \operatorname{Supp}(M/\mathfrak{m}M)$. Comme $M/\mathfrak{m}M \neq 0$, on a bien $H^j(G, M) \neq 0$.

COROLLAIRE 2.3: *Soit M un AG-module de type fini engendré par M^G. Si F est isolé et* $\operatorname{prof}_{\mathfrak{n}} M \geq 2$, alors $\operatorname{prof}_{\mathfrak{n}}(M^G) = 2$.

DÉMONSTRATION: On dit que F est isolé si $\mathfrak{m}$ est le radical de I_F. Il suffit de montrer que les conditions du lemme (2.1) sont remplies avec $f = 0$. D'après (1.4) le support de $H^j(G, M)$ est contenu dans F' pour $j > 0$. Comme $H^j(G, M) \neq 0$ pour $j > 0$, on en déduit $\operatorname{prof}_{\mathfrak{n}} H^j(G, M) = 0 = f$.

COROLLAIRE 2.4: *Supposons que A vérifie la condition S_2 de Serre alors*
(i) *A^G vérifie la condition S_2*
(ii) si codim $F > 2$, *A^G ne vérifie pas la condition S_r pour $r > 2$.*

DÉMONSTRATION: On vérifie facilement (i) à l'aide des suites spectrales (E_r) et $(\mathscr{E}_r)$. Pour (ii) soit $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A^G$ un point générique de F' et soit $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ tel que $\mathfrak{p} \cap A^G = \mathfrak{q}$. On a bien $(A_{\mathfrak{p}})^G = (A^G)_{\mathfrak{q}}$ et $\dim(A^G)_{\mathfrak{q}} = \dim A_{\mathfrak{p}} \geq 3$, donc $\operatorname{prof} A_{\mathfrak{p}} \geq 2$. Le corollaire (2.3) implique alors que $\operatorname{prof}(A^G)_{\mathfrak{q}} = 2$, et A^G ne vérifie pas S_r pour $r > 2$.

THÉORÈME 2.5: *Soit G un groupe fini, et M un A^GG-module de type* *fini. Si* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_{A^G} H^1(G, M)$ *est tel que* $\operatorname{prof} M \geq \dim(A^G/\mathfrak{p}) + 2$, *on a*

$$\operatorname{prof} M^G \leq \dim(A^G/\mathfrak{p}) + 2.$$

DÉMONSTRATION: Pour tout A^G-module N de type fini et tout idéal premier $\mathfrak{p} \subset A^G$, on a

$$\operatorname{prof} N \leq \operatorname{prof} N_{\mathfrak{p}} + \dim(A^G/\mathfrak{p}).$$

Si $\operatorname{prof} M \geq \dim(A^G/\mathfrak{p}) + 2$, on a donc $\operatorname{prof} M_{\mathfrak{p}} \geq 2$. Comme $\operatorname{prof} H^1(G, M_{\mathfrak{p}}) = 0$, les conditions de (2.1) sont remplies avec $f = 0$. Il en résulte que $\operatorname{prof} M_{\mathfrak{p}}^G = 2$, et donc que $\operatorname{prof} M^G \leq \dim(A^G/\mathfrak{p}) + 2$.

COROLLAIRE 2.6: *Soit* $G = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ *et soit* M *un* AG*-module de type fini, engendré par* M^G*. Si* M *est de Cohen–Macaulay, on a*:

$$\operatorname{prof} M^G \leq \dim(F' \cap \operatorname{Supp} M) + 2.$$

Si $\mathfrak{p} \subset A^G$ *est un idéal premier associé de* $H^1(G, M)$, *on a* $\operatorname{prof} M^G \leq \dim(A^G/\mathfrak{p}) + 2$.

DÉMONSTRATION: Comme $\operatorname{Supp} H^1(G, M) = F' \cap \operatorname{Supp} M$, on a $\dim(A^G/\mathfrak{p}) \leq \dim(F' \cap \operatorname{Supp} M)$. Si $\operatorname{prof} M \geq \dim(A^G/\mathfrak{p}) + 2$, ce résultat est une conséquence de (2.5). Si $\operatorname{prof} M \leq \dim(A^G/\mathfrak{p}) + 2$, on a également $\operatorname{prof} M^G \leq \dim M^G = \dim M = \operatorname{prof} M \leq \dim(A^G/\mathfrak{p}) + 2$.

§3. Le cas linéaire

Nous allons ici calculer le profondeur en tout idéal maximal de l'anneau des invariants d'un groupe cyclique d'ordre p^n opérant linéairement sur un anneau de polynômes sur k.

Soit $G = \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$. Supposons que G opère linéairement sur l'espace vectoriel V de dimension finie sur le corps algébriquement clos k. Alors G opère sur $\operatorname{Sym}_k(V^\vee)$ l'algèbre symétrique de l'espace dual $V^\vee$ de V, et donc sur $\mathbf{V} = \operatorname{Spec}(\operatorname{Sym}_k(V^\vee))$.

Le sous-schéma des points de $\mathbf{V}$ stabilisés par un sous-groupe $p^i\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ est noté F_i. C'est un sous-espace linéaire de V. On désigne par F_i' son image ensembliste dans $\mathbf{V}/(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$.

Les F_i' forment une suite croissante de sous-ensembles fermés de $\mathbf{V}/(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$. Nous allons démontrer:

THÉORÈME 3.1: *Si* $x \in F'_i - F'_{i-1}$ *est un point fermé, on a*

$$\operatorname{prof} \mathcal{O}_{V/(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}),x} = \min(\dim F_i + 2, \dim V).$$

Soit V_α le $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$-module indécomposable de dimension $\alpha \leq p^n$.

COROLLAIRE 3.2: *Supposons que* $V = V_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus V_{\alpha_\ell}$ *en tant que* $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$*-module, où* $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_\ell$. *Alors*:

$$\operatorname{prof} \operatorname{Sym}_k(V)^{\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}} = \begin{cases} \ell + \alpha_1 - 1 & \text{lorsque } \alpha_1 \leq 2 \text{ et } \alpha_2 = \cdots = \alpha_\ell = 1 \\ \ell + 2 & \text{sinon} \end{cases}$$

où la profondeur est calculée en l'idéal engendré par V.

Si V est indécomposable, le corollaire ci-dessous répond à une question posée par Fossum et Griffith dans [2].

COROLLAIRE 3.3: *Soit* V *un* $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$*-module indécomposable. Supposons que* $\dim V \geq 3$. *Alors,*

$$\operatorname{prof} \operatorname{Sym}_k(V)^{\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}} = 3$$

où la profondeur est calculée en l'idéal engendré par V.

COROLLAIRE 3.4: $\operatorname{Sym}_k(V)^{\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}}$ *est de Cohen–Macaulay si et seulement si*

$$V = \left(\bigoplus_{i=1}^{\lambda} V_2\right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{l-\lambda} V_1\right) \quad \lambda = 0, 1 \text{ ou } 2.$$

ou

$$V = V_3 \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{l-1} V_1\right) \quad \text{si } p \geq 3.$$

On démontre le théorème 3.1 par récurrence sur n. Considérons plus généralement un schéma affine $X = \operatorname{Spec} A$ de type fini sur k, sur lequel opére $G = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. Nous utilisons le lemme suivant.

LEMME 3.5: *Soit* Γ *un groupe opérant sur* X *de façon que*
(i) *l'action de* Γ *commute avec celle de* G,
(ii) Γ *opère transitivement sur les points fermés de* $F(G, X)$.
Alors les A^G*-modules* $H^i(G, A)$ *sont de Cohen–Macaulay pour* $i > 0$.

DÉMONSTRATION DE 3.5: L'action de Γ commutant avec celle de

G, il est clair que Γ opère sur le schéma $F' = F'(G, X) = \mathrm{Spec}(A^G/I_{F'})$ et que les $H^i(G, A)$ sont des $(A^G/I_F)\Gamma$-modules pour $i > 0$. Le morphisme $\pi|_F : F \to F'$ étant une bijection, Γ opére transitivement sur les points fermés de F'.

On achève la démonstration à l'aide du lemme ci-dessous, qui est un corollaire immédiat du lemme (3.10).

LEMME 3.6: *Soit Y un schéma de type fini sur un corps algébriquement clos. Supposons qu'un groupe Γ opère sur Y, transitivement sur les points fermés. Alors tout $\mathcal{O}_Y - \Gamma$-module cohérent est de Cohen–Macaulay.*

Soient, pour une action de $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ sur X, les deux conditions suivantes:

I. Pour tout sous-groupe $p^i\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ de $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$, il existe un groupe Γ_i opérant sur X, tel que l'action de Γ_i commute avec celle de $p^i\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ et est transitive sur les points fermés de $F(p^i\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}, X)$ pour $i \leq n-1$.

II. Pour tout point fermé $x \in X$, on a:

$$\mathrm{prof}\ \mathcal{O}_{X,x} \geq \dim F(p^{n-1}\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}, X) + 2.$$

LEMME 3.7: *Supposons que l'action de $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ sur X satisfait aux conditions I et II ci-dessus. Alors l'action induite de $\mathbf{Z}/p^{n-1}\mathbf{Z}$ sur $X' = X/(p^{n-1}\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$ satisfait également I et II. De plus, on a*

(i) *Si $x \in F'(p^{n-1}\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}, X)$ est un point fermé,*

$$\mathrm{prof}\ \mathcal{O}_{X',x} = \dim F(p^{n-1}\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}, X) + 2.$$

(ii) *Si $x \notin F'(p^{n-1}\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}, X)$ est un point fermé,*

$$\mathrm{prof}\ \mathcal{O}_{X',x} = \mathrm{prof}\ \mathcal{O}_{X,y}$$

pour toute préimage y de x dans X.

DÉMONSTRATION DE 3.7: Remarquons d'abord que le morphisme canonique $\pi : X \to X'$ induit une bijection entre $F(p^i\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}, X)$ et $F(p^i\mathbf{Z}/p^{n-1}\mathbf{Z}, X')$ pour $i \leq n-2$. (En effet tout groupe d'isotropie non trivial contient $p^{n-1}\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$). Pour $i \leq n-1$ l'action de Γ_i passe au quotient X' et, vu la remarque ci-dessus, elle est transitive sur $F(p^i\mathbf{Z}/p^{n-1}\mathbf{Z}, X')$ pour $i \leq n-2$. La condition I est donc vérifiée. Soit $x \in X'$ un point fermé et $y \in X$ une préimage de x. Si y n'est pas un point fixe sous l'action de $p^{n-1}\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$, on sait que

$$\begin{aligned}\operatorname{prof} \mathcal{O}_{X',x} = \operatorname{prof} \mathcal{O}_{X,y} &\geq \dim F(p^{n-1}\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}, X) + 2\\ &\geq \dim F(p^{n-2}\mathbf{Z}/p^{n-1}\mathbf{Z}, X') + 2.\end{aligned}$$

Si y est un point fixe, on obtient à l'aide de la condition I pour X et des lemmes (3.5) et (2.1):

$$\begin{aligned}\operatorname{prof} \mathcal{O}_{X',x} &= \dim F(p^{n-1}\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}, X) + 2\\ &\geq \dim F(p^{n-2}\mathbf{Z}/p^{n-1}\mathbf{Z}, X') + 2\end{aligned}$$

et la condition II est vérifiée pour X'.

PROPOSITION 3.8: *Supposons que $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ opère sur X de façon que les conditions I et II soient satisfaites. Alors,*

(i) *Si $x \in F'(p^i\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}, \mathrm{X}) - \mathrm{F}'(\mathrm{p}^{i-1}\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}, X)$ est un point fermé, on a pour $i \leq n-1$,*

$$\operatorname{prof} \mathcal{O}_{X/(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}),x} = \dim F(p^i\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}, X) + 2.$$

(ii) *Si $x \in X/(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}) - F'(p^{n-1}\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}, X)$ est un point fermé, on a*

$$\operatorname{prof} \mathcal{O}_{X/(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}),x} = \operatorname{prof} \mathcal{O}_{X,y}$$

pour toute préimage y de x dans X.

DÉMONSTRATION: On raisonne par récurrence sur n. Si $n = 1$, la proposition découle du lemme (3.7). Si $n > 1$, les conditions I et II sont, en vertu du lemme (3.7), vérifiées pour $X/(p^{n-1}\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$. Comme $X/(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$ est le quotient de $X/(p^{n-1}\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$ par $\mathbf{Z}/p^{n-1}\mathbf{Z}$ et $\dim F(p^i\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}, X) = \dim F(p^i\mathbf{Z}/p^{n-1}\mathbf{Z}, X/(p^{n-1}\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}))$ pour $i < n-1$, la récurrence est immédiate.

Enfin, démontrons le théorème (3.1). Supposons d'abord que $\operatorname{codim} F_0 \leq 2$. D'après les lemmes (2.1) et (3.5) on sait que $\mathbf{V}/(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$ est de Cohen–Macaulay. Si $\operatorname{codim} F_0 \geq 3$, soit m le plus petit entier tel que $\operatorname{codim} F_m \leq 2$. Alors $\mathbf{V}/(p^m\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$ est de Cohen–Macaulay et satisfait à la condition II de (3.7). Vérifions la condition I de (3.7) pour l'action de $\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}$ sur $\mathbf{V}/(p^m\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$. Soit Γ_i le groupe additif $F(p^i\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}, V)$, opérant sur $\mathbf{V}$ par translation. On voit aisément que cette action commute avec celle de $p^i\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ et qu'elle est transitive sur $F(p^i\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}, V)$. Donc elle induit, pour $i \leq m-1$, une action sur $\mathbf{V}/(p^m\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$ qui satisfait à la condition I. Le théorème se déduit alors de la proposition (3.8).

D'une façon générale, soit G un groupe fini qui opère linéairement sur V. Soit $\mathfrak{n}$ l'idéal d'augmentation de $\mathrm{Sym}_k(V^\vee)$.

THÉORÈME 3.9: *Supposons que* $\dim_k V \geq 2 + \dim_k V^G$, *alors*

$$\mathrm{prof}_{\mathfrak{n}}\, \mathrm{Sym}_k(V^\vee)^G \geq \dim_k V^G + 2.$$

DÉMONSTRATION: En vertu du lemme (2.1) il suffit de montrer que $\mathrm{prof}_{\mathfrak{n}}\, H^i(G, \mathrm{Sym}_k(V^\vee)) \geq \dim V^G$ pour $i > 0$. Le groupe additif Γ de V^G opère par translation sur $\mathrm{Sym}_k(V^\vee)$. Cette opération est compatible avec celle de G. Pour tout i, $H^i(G, \mathrm{Sym}_k(V^\vee))$ est donc un $(\mathrm{Sym}_k(V^\vee)^G)\Gamma$-module. On achève la démonstration a l'aide du

LEMME 3.10: *Soit Γ un groupe opérant sur un schéma X, de type fini sur un corps algébriquement clos. Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X\Gamma$-module cohérent. Si $x \in X$ est un point fermé, on a*

$$\mathrm{prof}_x\, \mathcal{F} \geq \dim \overline{\Gamma(x)}$$

où $\overline{\Gamma(x)}$ désigne l'adhérence de l'orbite de x.

DÉMONSTRATION: Soit pour tout entier $i \geq 0$, $Z_i' = \{y \in X \mid y \text{ fermé}, \mathrm{prof}\, \mathcal{F}_y \leq i\}$ et soit $Z_i = \overline{Z_i'}$, l'adhérence de Z_i' dans X. Si $x \in Z_i'$ on a bien $\overline{\Gamma(x)} \subseteq Z_i$. Il suffit donc de montrer que $\dim Z_i \leq i$. Pour cela, on peut supposer que X est affine, $X = \mathrm{Spec}\, A$, et même que A est un anneau régulier. Soit $d = \dim A$, alors

$$Z_i = \bigcup_{j \geq d-i} \mathrm{Supp}\, \mathrm{Ext}^j_A(\mathcal{F}, A).$$

En localisant aux points génériques on voit que $\dim \mathrm{Supp}\, \mathrm{Ext}^j_A(\mathcal{F}, A) \leq d - j \leq i$.

Nous allons maintenant donner un exemple d'un anneau intègre, factoriel A, non de Cohen–Macaulay, avec une opération de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ telle que $A^{\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}}$ soit de Cohen–Macaulay.

Soit $p \geq 3$ et $V = V_3 \oplus V_3$ avec l'action de $G = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ donnée par $(g, h)(v, w) = (gv, hw)$. Soient H le groupe diagonal de G, et $A = \mathrm{Sym}_k(V^\vee)^H$. Par le théorème (3.1) A n'est pas de Cohen–Macaulay. En effet $\mathrm{prof}_{\mathfrak{n}}\, A = 4$, où $\mathfrak{n} = \mathfrak{m} \cap A$ ($\mathfrak{m}$ l'idéal d'augmentation de $\mathrm{Sym}_k(V^\vee)$), et $\dim A_{\mathfrak{n}} = 6$. Le groupe $G/H \cong \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ opère de façon naturelle sur A, et $A^{G/H} = \mathrm{Sym}_k(V^\vee)^G$. En remarquant alors que $\mathrm{Sym}_k(V^\vee)^G = \mathrm{Sym}_k(V_3^\vee)^{\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}} \otimes_k \mathrm{Sym}_k(V_3^\vee)^{\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}}$, on trouve grâce à (3.1), que $A^{G/H}$ est de Cohen–Macaulay. Pour $p = 2$ on trouve également un exemple en utilisant l'opération de G sur $V = V_2 \oplus V_2 \oplus V_2$ donnée par $(g, h)(u, v, w) = (gu, gv, hw)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M.-J. BERTIN: Anneaux d'invariants d'anneaux de polynômes en caractéristique *p*. *C.R. Acad. Scient. Paris t. 264* (1967) 653–656.

[2] R. FOSSUM et P.A. GRIFFITH: Complete local factorial rings which are not Cohen–Macaulay in characteristic *p*. *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., Paris* (4) 8 (1975) 189–200.

[3] A. GROTHENDIECK: Sur quelques points d'algèbre homologique. *Tôhoku Math. J. IX* (1957) 119–221.

(Oblatum 20–XII–1978 & 10–I–1980)

Matematisk institutt
Blindern, Oslo 3
Norvège