

# COMPOSITIO MATHEMATICA

MICHEL TALAGRAND

## **Moyennes invariantes s'annulant sur des idéaux**

*Compositio Mathematica*, tome 42, n° 2 (1980), p. 213-216

<[http://www.numdam.org/item?id=CM\\_1980\\_\\_42\\_2\\_213\\_0](http://www.numdam.org/item?id=CM_1980__42_2_213_0)>

© Foundation Compositio Mathematica, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

MOYENNES INVARIANTES S'ANNULANT  
SUR DES IDEAUX

Michel Talagrand

Soit  $G$  un groupe localement compact. On appelle moyenne invariante à gauche sur  $L^\infty(G)$  toute forme linéaire positive  $m$  telle que  $m(1) = 1$  et  $m(f_a) = m(f)$  pour  $f \in L^\infty$  et  $a \in G$ , où  $f_a$  est donnée par  $f_a(x) = f(ax)$ . On dit que  $G$  est moyennable s'il existe une telle moyenne. (On dira par convention moyenne au lieu de moyenne invariante).

L'ensemble des moyennes s'identifie à l'ensemble des probabilités sur le spectre  $S$  de  $L^\infty(G)$  qui sont invariantes par l'action naturelle de  $G$  sur  $S$ . Lorsque  $G$  est moyennable et non compact, ou est compact, et moyennable en tant que groupe discret, il est prouvé dans [1], [3] qu'en divers sens l'ensemble des moyennes est très grand. C'est donc une question naturelle, (posée par E. Granirer dans [1]) de demander si lorsque  $F$  est un fermé invariant non-vidé de  $S$ , l'ensemble des moyennes sur  $G$  qui sont, en tant que mesures sur  $S$ , portées par  $F$  est également grand. (Une telle moyenne est nulle sur l'idéal  $I$  des fonctions de  $L^\infty$  qui s'annulent sur  $F$ ). Le but de ce travail est d'apporter un élément de réponse à cette question.

**THÉORÈME<sup>1</sup>:** *Soit  $G$  un groupe infini localement compact, moyennable en tant que groupe discret. Il existe une famille  $(f_i)_{i \in I}$  de fonctions  $0 \leq f_i \leq 1$ , où  $\text{card. } I = \text{card. } \mathbb{R}$ , telle que pour tout fermé invariant non-vidé  $F$  de  $S$  et tout  $i \in I$ , il existe une moyenne  $m_i$  portée par  $F$  et telle que  $m_i(f_i) \geq \frac{2}{3}$ , et  $m_i(f_j) \leq \frac{1}{3}$  pour  $j \neq i$ . Ainsi  $\|m_i - m_j\| \geq \frac{1}{3}$*

<sup>1</sup> Lors de la correction des épreuves, nous avons remarqué qu'un argument modifié permet de prendre  $\text{card. } I = 2^{\text{card. } \mathbb{R}}$ .

pour  $i \neq j$ , ce qui montre que l'ensemble des moyennes partées par  $F$  n'est pas séparable en norme.

DÉMONSTRATION: Il faut distinguer suivant que  $G$  est compact ou non. Nous n'écrivons la preuve que dans le cas où  $G$  est compact; les idées essentielles sont les mêmes quand  $G$  n'est pas compact, et les quelques complications qui s'introduisent sont purement techniques.

On suppose donc  $G$  compact. La mesure de Haar normalisée d'un sous-ensemble mesurable  $A$  de  $G$  sera notée  $|A|$ . On désigne par  $\chi_A$  la fonction caractéristique de  $A$ .

LEMME: Soit  $U$  un ouvert de  $G$ , avec  $|U| > \frac{2}{3}$ . Soient  $n$  un entier et  $\epsilon > 0$ . Il existe alors un ouvert  $V$  de  $U$  tel que  $|V| = |\bar{V}| < \epsilon$  et que pour tout  $n$ -uplet  $(t_1, \dots, t_n)$  de  $G$ , il existe  $t \in G$  tel que  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \chi_{t_i V}(t) \geq \frac{2}{3}$ .

PREUVE: Soit  $H$  un ouvert dense dans  $U$ , tel que  $|H| \leq \epsilon$  et que  $H = \bigcup H_\ell$  ou  $H_\ell$  est ouvert et  $|H_\ell| = |\bar{H}_\ell|$ . (L'existence de  $H$  découle du fait que  $G$  n'est pas discret). Soit  $(t_1, \dots, t_n)$  un  $n$ -uplet de  $G$ . On a

$$\int_G \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \chi_{t_i U}(t) dt = \|U\| > \frac{2}{3}.$$

Il existe donc  $t$  tel que  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \chi_{t_i U}(t) \geq \frac{2}{3}$ . Il existe alors une partie  $J \subset [1, n]$ , avec  $\text{card. } J \geq \frac{2n}{3}$  telle que  $t \in \bigcap_{i \in J} t_i U$ , i.e.,  $\bigcap_{i \in J} t_i U$  est un ouvert non-vide. Il en résulte sans peine que  $\bigcap_{i \in J} t_i H$  est non-vide, car en fait cet ouvert est dense dans le précédent. Il existe donc  $u \in G$  avec  $\frac{1}{n} \sum_{i \in J} \chi_{t_i H}(u) \geq \frac{2}{3}$ . Si on pose  $H^k = \bigcup_{\ell \geq k} H_\ell$ , il existe  $k$  tel que  $\frac{1}{n} \sum_{i \in J} \chi_{t_i H^k}(u) \geq \frac{2}{3}$ . Puisque  $H^k$  est ouvert, ceci est encore vrai pour tout  $n$ -uplet  $(t'_1, \dots, t'_n)$  voisin de  $(t_1, \dots, t_n)$ . Mais puisque  $G^n$  est compact, on voit qu'il suffit de choisir  $V = H^k$  pour  $k$  assez grand.

c.q.f.d.

Il est clair avec ce lemme que l'on peut alors construire par double induction des ouverts disjoints  $(V_s^n)$  pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $s \in \{0, 1\}^n$  tels que pour tout  $n$ , tout  $s \in \{0, 1\}^n$  et tout  $n$ -uplet  $(t_1, \dots, t_n)$  de  $G$  il existe  $u \in G$  avec  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \chi_{t_i V_s^n}(u) \geq \frac{2}{3}$ . (Pour rendre possible la construction, on choisit de plus

$$|\bar{V}_s^n| = |V_s^n| \leq \frac{1}{3} 2^{-2^n}.)$$

On pose  $I = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ , et pour  $\sigma \in I$  on désigne par  $\sigma_n$  la suite de

longueur  $n$  formée des  $n$  premiers éléments de  $\sigma$ . On pose  $f_\sigma = \chi_{V_\sigma}$ , où  $V_\sigma = \bigcup_n V_{\sigma_n}^n$ . On va montrer que ces fonctions conviennent.

Soient  $F$  un fermé non-vide invariant de  $S$ ,  $\sigma \in I$  et  $J$  une partie finie de  $I$ . Il suffit de montrer qu'il existe une moyenne  $m = m_{\sigma, J}$  portée par  $F$  et telle que  $m(f_\sigma) \geq \frac{2}{3}$  et  $m(f_\rho) \leq \frac{1}{3}$  pour  $\rho \in J$  et  $\rho \neq \sigma$ . (Si on fixe  $\sigma$ , tout point  $\mu$  adhérent aux  $m_{\sigma, J}$  selon le filtre naturel sur les parties finies de  $I$  ne contenant pas  $\sigma$  est tel que  $\mu(f_\sigma) \geq \frac{2}{3}$  et  $\mu(f_\rho) \leq \frac{1}{3}$  pour  $\rho \neq \sigma$ .) Soit  $p$  un entier tel que les suites finies  $\sigma_p$  et  $\rho_p$  pour  $\rho \in J$  soient deux à deux distinctes. Soit  $n \geq p$ . Pour tout  $n$ -uplet  $(t_1, \dots, t_n)$  de  $G$  il existe  $u \in G$  tel que  $\frac{1}{n} \sum_{i \leq n} \chi_{t_i V_{\sigma_n}^n}(u) \geq \frac{2}{3}$ . Puisque  $\sigma_n \neq \rho_n$  pour  $\rho \in J$ , on a  $V_{\sigma_n}^n \cup V_{\rho_n}^n = \emptyset$  et donc  $\frac{1}{n} \sum_{i \leq n} \chi_{t_i V_{\rho_n}^n}(u) \leq \frac{1}{2}$  pour  $\rho \in J$ . Il existe donc un ouvert non vide  $W$  tel que pour  $u \in W$  on ait

$$\frac{1}{n} \sum_{i \leq n} (f_\sigma)_{t_i}(u) \geq \frac{2}{3}, \frac{1}{n} \sum_{i \leq n} (f_\rho)_{t_i}(u) \leq \frac{1}{3} \text{ pour tout } \rho \in J.$$

Pour un ensemble mesurable  $A$  (resp.  $g \in L^\infty$ ) désignons par  $\tilde{A}$  l'ouvert fermé correspondant dans  $S$  (resp.  $\tilde{g}$  la fonction continue associée de  $(S)$ ). Puisque  $W$  est ouvert et  $G$  compact,  $G$  est réunion finie de translatés de  $W$ . Puisque  $F$  est invariant par translation on a  $F \cap \tilde{W} \neq \emptyset$ .

En résumé on a donc montré: pour  $n \geq p$  et tout  $n$ -uplet  $t_1, \dots, t_n$  de  $G$  il existe  $x \in F$  tel que

$$\frac{1}{n} \sum_{i \leq n} (\tilde{f}_\sigma)_{t_i}(x) \geq \frac{2}{3} \text{ et } \frac{1}{n} \sum_{i \leq n} (\tilde{f}_\rho)_{t_i}(x) \leq \frac{1}{3} \text{ pour tout } \rho \in J \quad (1)$$

ou pour  $g \in \mathcal{C}(S)$  et  $t \in G$  on a  $g_t(x) = g(t, x)$ , désignant l'opération naturelle de  $G$  sur  $S$ . Si  $\bar{t} = (t_1, \dots, t_n)$ , désignons par  $\mu_{\bar{t}, x}$  la moyenne non-invariante donnée pour  $f \in L^\infty$  par

$$\mu_{\bar{t}, x}(f) = \frac{1}{n} \sum_{i \leq n} \tilde{f}_{t_i}(x).$$

Cette moyenne est portée par  $F$  si  $x \in F$ . Puisque  $G$  est moyennable en tant que groupe discret, il existe un filtre  $\mathcal{F}$  sur l'ensemble des  $n$ -uplets, ( $n$  variant) tel que, quelque soit le choix des  $x_{\bar{t}} \in S$ ,  $\lim_{\bar{t} \in \mathcal{F}} \mu_{\bar{t}, x_{\bar{t}}}$  soit invariante. La condition (1) montre alors qu'un choix convenable des  $x_{\bar{t}}$  assure que cette limite satisfait aux conditions requises.

c.q.f.d.

C'est un problème intéressant [1], et qui semble inabordable, de savoir si l'ensemble des moyennes portées par  $F$  peut admettre un point exposé.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. GRANIRER: Exposed points of convex sets and weak sequential convergence. Mem. Amer. Math. Soc., No. 123 (1972).
- [2] F.P. GREENLEAF: Invariant means on topological groups and their applications. Van Nostrand Math. studies 16, Van Nostrand, 1969.
- [3] J.M. ROSENBLATT: Invariant Means and Invariant Ideals in  $L_\infty(G)$  for a locally compact group  $G$ , *J. Funct. Anal.*, 21, (1976) 31–51.
- [4] M. TALAGRAND: Géométrie des simplexes des moyennes. (A paraître dans *J. of Funct. Analysis*).

(Oblatum 17-IV-1979 & 30-X-1979)

Equipe d'Analyse – Tour 46  
Université Paris VI  
4 Place Jussieu  
75230 Paris, Cedex 05