COMPOSITIO MATHEMATICA

V. NAVARRO AZNAR

Sur les multiplicités de Schubert locales des faisceaux algébriques cohérents

Compositio Mathematica, tome 48, n° 3 (1983), p. 311-326

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1983__48_3_311_0>

Comp. Math. 48 (1983) 311–326.

SUR LES MULTIPLICITÉS DE SCHUBERT LOCALES DES FAISCEAUX ALGÉBRIQUES COHÉRENTS

V. Navarro Aznar

Dans un récent article ([8]) Lê D.T. et B. Teissier ont donné une formule qui permet d'étendre la définition de l'obstruction locale d'Euler introduite dans [9] par R. MacPherson, aux variétés algébriques sur un corps algébriquement fermé de caractéristique zéro.

L'objet de cette note est de prouver une formule qui généralise celle de Lê-Teissier pour un faisceau algébrique cohérent F sur une k-variété algébrique X, où k est un corps algébriquement fermé de caractéristique arbitraire, et qui donne la formule de Lê-Teissier quand on prend pour F le faisceau des différentielles $\Omega_{X/k}$. On peut en conséquence étendre la définition de l'obstruction locale d'Euler et la construction formelle de la classe de Chern–MacPherson à toute k-varieté algébrique.

§1. Préliminaires

Dans cette note k désigne un corps algébriquement fermé. On appelle k-varieté un schéma intègre, de type fini et séparé sur k.

1.1 Soit X une k-variété et soit $\mathscr{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module cohérent.

DÉFINITION: On dit qu'un morphisme $\nu : \tilde{X} \to X$ est l'éclatement de X relatif à $\mathscr{F}$, s'il vérifie

(i) ν est un morphisme birationnel et propre,

(ii) $\nu^*\mathscr{F}/\mathrm{Torsion}(\nu^*\mathscr{F})$ est un $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$-module localement libre,

(iii) Si $\pi : Z \to X$ est un morphisme qui vérifie (i) et (ii), alors il existe une factorisation unique

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, dashed] \arrow[dr, "\pi"'] & \tilde{X} \arrow[d, "\nu"] \\ & X \end{tikzcd}$$

La proposition suivante est due a H. Rossi [13], voir aussi [12].

PROPOSITION: *L'éclatement de X relatif à $\mathscr{F}$ existe et est unique à un isomorphisme près.*

1.2. Dans ce qui suit on utilisera une description locale plus précise de l'éclatement de X relatif à $\mathscr{F}$.

Soit U un ouvert affine de X sur lequel on a une présentation

$$\mathcal{O}_U^n \to \mathscr{F}_{|U} \to 0,$$

puisque X est réduit et irréductible, il existe un ouvert dense $U^\circ \subset U$, tel que $\mathscr{F}_{|U}$ soit localement libre, nous noterons r son rang. Ainsi, au dessus de U°, il existe une section

$$\sigma : U^\circ \to \mathrm{Grass}_r(\mathcal{O}_U^n) \cong U \times \mathrm{Grass}_r(n)$$

Soit $\tilde{U} = \overline{\sigma(U^\circ)}$, et notons $\nu : \tilde{U} \to U$ et $\gamma : \tilde{U} \to \mathrm{Grass}_r(n)$ les projections.

LEMME: ([12]) *Le morphisme $\nu : \tilde{U} \to U$ est l'éclatement de U relatif à $F_{|U}$, et $\nu^* F_{|U}/\mathrm{Torsion}(\nu^* \mathrm{F}_{|U})$ est isomorphe à $\gamma^* \mathcal{Q}_r(n)$, oú $\mathcal{Q}_r(n)$ est le fibré universel quotient de rang r sur la grassmanienne* $\mathrm{Grass}_r(n)$.

Or, on obtient donc immédiatement

COROLLAIRE: *L'éclatement de X relatif à $\mathscr{F}$ est un morphisme projectif.*

1.3. Soit x un point fermé de X, et soit a un symbole de Schubert, c'est-à-dire $a = (a_1, \ldots, a_s) \in \mathbb{Z}^s$, avec $a_1 \geq \ldots \geq a_s \geq 0$. On va définir dans la suite un entier positif $e_x(F; a)$, qu'on appellera la multiplicité de Schubert en x de F relative au symbole a.

Soit U un ouvert affine de X, qui contient x et sur lequel on ait une présentation

$$\mathcal{O}_U^n \to \mathscr{F}_{|U} \to 0$$

Si $s > n - r$, ou $a_1 > r$, on définit $e_x(\mathscr{F}; a) = 0$.

Si $s \leq n - r$ et $a_1 \leq r$, soit D un drapeau de symbole a dans k^n, c'est-à-dire, $D = (D_1 \subset \ldots \subset D_s)$ avec D_j un sous-espace linéaire de k^n de dimension $r + j - a_j$, et soit $S(D)$ la variété de Schubert que ce drapeau définit dans $\text{Grass}_r(n)$, c'est-à-dire, $S(D)$ est la sous-variété de $\text{Grass}_r(n)$ qui paramétrise les sous-espaces linéaires L de k^n de dimension $n - r$ tels que $\dim L \cap D_j \geq j$, $1 \leq j \leq s$.

Puisque le morphisme $v : \tilde{U} \to U$ est propre, l'image par v de $\gamma^{-1}(S(D))$ est un sous-schéma fermé de U, qu'on dénotera par $S_U(\mathscr{F}; D)$. Comme la variété des drapeaux $\mathscr{D}(a)$ paramétrise la famille des variétés $S_U(\mathscr{F}; D)$, $D \in \mathscr{D}(a)$, il existe un ouvert dense $\mathscr{G}$ de $\mathscr{D}(a)$ tel que la multiplicité $e_x(S_U(\mathscr{F}; D))$ soit constante pour tout $D \in \mathscr{G}$. On définit, dans ce cas,

$$e_x(\mathscr{F}; a) = e_x(S_U(\mathscr{F}; D))$$

avec $D \in \mathscr{G}$.

On verra dans le prochain paragraphe que les entiers $e_x(\mathscr{F}, a)$ sont indépendants du choix de l'ouvert U et de la présentation de $\mathscr{F}$ choisie.

§2. Le résultat principal

2.1. Dans ce qui suit on fixe un nombre premier l distinct de la caractéristique du corps k.

Soit X un k-schéma de type fini. On pose

$$H^{\bullet}(X) = \bigoplus_i H^{2i}(X_{\text{et}}, Z_l)(i),$$

et

$$H_{\bullet}(X) = \bigoplus_i H_{2i}(X_{\text{et}}, Z_l)(-i)$$

Le groupe d'homologie de Borel–Moore $H_{\bullet}(X)$, à coefficients dans $\mathbb{Z}_l$, a une structure de module sur l'anneau de cohomologie $H^{\bullet}(X)$ (cap-produit).

Si $\mathscr{E}$ est un fibré vectoriel sur X et a est un symbole de Schubert, on notera $c_a(\mathscr{E})$ la classe caractéristique de symbole a du fibré $\mathscr{E}$, qu'on obtient comme un polynome universel dans les classes de Chern $c_h(\mathscr{E})$ de $\mathscr{E}$, concrètement

$$c_a(\mathscr{E}) = \det |c_{a_i + j - i}(\mathscr{E})|, 1 \leq i, j \leq s.$$

Pour tout sous-schéma fermé Y de X on notera $[\![Y]\!]$ son cycle associé dans le groupe des cycles $Z_\bullet(X)$, et on notera $[Y]$ sa classe d'homologie dans $H_\bullet(X)$. On désignera par $\int$ l'homomorphisme d'augmentation $H_\bullet(X) \to \mathbb{Z}_l$ induit par le morphisme structurel $X \to \operatorname{Spec} k$, quand X est complet.

2.2. Théorème: *Soit X une k-variété, $\mathscr{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module cohérent, x un point fermé de X et $\mathscr{J}$ le $\mathcal{O}_X$-idéal qui définit x dans X. Si $\pi: X' \to X$ est un morphisme birationnel et propre, tel que*

(i) *$\mathscr{J}\mathcal{O}_{X'}$ est un $\mathcal{O}_{X'}$-idéal inversible, et*

(ii) *$\pi^*\mathscr{F}/\mathrm{Torsion}\ \pi^*\mathscr{F}$ est un $\mathcal{O}_{X'}$-module localement libre, alors pour tout symbole de Schubert a, on a*

$$e_x(\mathscr{F}; a) = \int c_1(\mathscr{L})^{i-1} c_a(\mathscr{E}) \cap [Y'],$$

où Y' est le sous-schéma fermé de X' défini par $\mathscr{J}\mathcal{O}_{X'}$, $\mathscr{L}$ est la restriction à Y' du faisceau inversible $\mathscr{J}\mathcal{O}_{X'}$, $\mathscr{E}$ est la restriction à Y' de $\pi^*\mathscr{F}/\mathrm{Torsion}$ $\pi^*\mathscr{F}$, et $i = \dim X - \sum_{j=1}^{s} a_j$.

Avant d'aborder la démonstration de (2.2), que nous laissons pour le §3, nous ferons quelques remarques autour de ce résultat.

2.3. D'abord, on fera voir comment obtenir un morphisme minimal entre ceux qui vérifient les hypothèses du théorème.

Soit $\nu: \tilde{X} \to X$ l'éclatement de X relatif à $\mathscr{F}$, et soit $\varepsilon: X^- \to \tilde{X}$ l'éclatement de $\tilde{X}$ le long du sous-schéma fermé $\nu^{-1}(x)$, si $\eta: X^- \to X$ est la composition de ces deux éclatements, on vérifie que $\mathscr{J}\mathcal{O}_{X^-}$ est un idéal inversible, puisqu'il est l'idéal du sous-schéma $\varepsilon^{-1}(\nu^{-1}(x))$, et que $\eta^*\mathscr{F}/\mathrm{Torsion}\ \eta^*\mathscr{F}$ est un $\mathcal{O}_{X^-}$-module localement libre, puisqu'il coïncide avec $\varepsilon^*(\nu^*\mathscr{F}/\mathrm{Torsion}\, \nu^*\mathscr{F})$.

Si $\pi: X' \to X$ est un autre morphisme propre et birationnel qui vérifie les hypothèses de (2.2), il résulte de la propriété universelle de l'éclatement de X relatif à $\mathscr{F}$, qu'on a une factorisation unique

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[dr, "\pi"'] & \tilde{X} \arrow[d, "\nu"] \\ & X \end{tikzcd}$$

et il résulte alors de la propriété universelle de l'éclatement de $\tilde{X}$ le long de $\nu^{-1}(x)$, qu'on a une factorisation unique.

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r] \arrow[drr, "\pi"'] & X^{-} \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\eta"] & \tilde{X} \arrow[d, "\nu"] \\
 & & X
\end{tikzcd}$$

Dans le §3 nous utiliserons cette propriété universelle de η, en même temps que le fait que η, étant la composition de deux morphisme projectifs, est aussi projectif.

2.4. Il résulte de la non vacuité de (2.2), qu'on vient de voir, le corollaire suivant:

COROLLAIRE: *Les multiplicités de Schubert locales $e_x(\mathscr{F}, a)$ sont indépendantes de l'ouvert U et de la présentation de F choisis.*

Notons ici que ce résultat avait déja été démontré en caractéristique zéro et pour $F = \Omega_{X/Y}$, dim $Y \leq 1$, par Lê D.T. et B. Teissier.

2.5. On peut maintenant définir, d'après [9], [3] et [8], l'obstruction locale d'Euler de X en x comme

$$Eu_x(X) = \sum_{i=1}^{d} (-1)^{d-i} e_x(\Omega_{X/k}, a(i)),$$

où $a(i)$ dénote le symbole de Schubert

$$a(i) = (1, 1, \overset{d-i}{\ldots}, 1, 0, 0, \ldots, 0)$$

et il résulte de (2.2) que si on définit une application T, du groupe des cycles algébriques de X au groupe des fonctions constructibles sur X, par

$$T(\sum n_i X_i)(x) = \sum n_i Eu_x(X_i), \quad x \in X,$$

alors T est un isomorphisme.

Ceci permet de construire, comme dans [8], (6.2.5), pour toute k-variété X son cycle de MacPherson

$$T^{-1}(\mathbb{1}) = \sum n_i X_i$$

et de définir sa classe de Chern–MacPherson

$$c(X) = \sum n_i c_M(X_i),$$

où $c_M(X_i)$ est la classe de Chern–Mather de X_i.

Il faut signaler cependant que l'auteur ignore le rôle que peuvent jouer ces classes dans la construction d'une théorie de classes d'homologie de Chern en caractéristique p, voir [15].

§3. Preuve du théorème (2.2)

Par souci de clarté, nous diviserons la démonstration en six étapes.

3.1. Fixons un ouvert affine U comme dans le §1, qu'on identifiera ici simplement avec X, et considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} & X' \arrow[d] \arrow[ddl, "\pi"'] \arrow[ddr, "\phi"] & \\ & \tilde{X} \arrow[dl, "\nu"'] \arrow[dr, "\gamma"] & \\ X & & \mathrm{Grass}_r(n) \end{tikzcd}$$

où le morphisme $X' \to \tilde{X}$ résulte de la propriété universelle de l'éclatement.

D'après les hypothèses de (2.2) il existe un sous-schéma fermé et propre Δ de X, en dehors duquel π et ν sont des isomorphismes, et il existe, d'après [14], un sous-schéma fermé et propre Γ de Y' en dehors duquel Y' est de Cohen–Macaulay.

Or, il résulte du théorème de transversalité de Kleiman ([6]) qu'il existe un ouvert dense $\mathscr{V}$ de la variété des drapeaux $\mathscr{D}(a)$, tel que si $D \in \mathscr{V}$ la variété de Schubert $S(D)$ est en bonne position par rapport aux morphismes γ, $\gamma_{|\nu^{-1}(\Delta)}$, $\gamma_{|\nu^{-1}(x)}$, ϕ, $\phi_{|\pi^{-1}(\Delta)}$, $\phi_{|\pi^{-1}(x)}$ et $\phi_{|\Gamma}$. On va montrer que si $D \in \mathscr{V}$ alors

$$e_x(S(\mathscr{F}; D)) = \int c_1(\mathscr{L})^{i-1} c_a(\mathscr{E}) \cap [Y'],$$

ce qui évidemment prouvera (2.2).

3.2. On suppose dans ce qui suit que $s \leq n - r$, que $a_1 \leq r$, et que $S(\mathscr{F}; D)$ n'est pas vide, les cas contraires étant immédiats.

Si on restreint le diagramme antérieur au dessus de $S(D)$, on obtient

$$\begin{tikzcd} & X'_D \arrow[d] \arrow[ddl, "\pi_D"'] \arrow[ddr, "\phi_D"] & \\ & \tilde{X}_D \arrow[dl, "\nu_D"] \arrow[dr, "\gamma_D"'] & \\ S(F;D) & & S(D) \end{tikzcd}$$

où on a posé $X'_D = X'_{|S(D)}$ et $\tilde{X}_D = \tilde{X}_{|S(D)}$. Comme π_D et ν_D sont encore des morphismes propres et birationnels, car $S(D)$ est en bonne position par rapport aux morphismes γ, $\gamma_{|\nu^{-1}(\Delta)}$, ϕ et $\phi_{|\pi^{-1}(\Delta)}$; et comme la restriction à X'_D de l'idéal inversible $\mathscr{J}\mathcal{O}_{X'}$ définit le sous-schéma $Y'_D = \pi_D^{-1}(x)$, il résulte d'une interprétation géométrique de la multiplicité de C.P. Ramanujan ([10]) que

$$e_x(S(\mathscr{F};D)) = d_{i-1}(\mathscr{L}_D)$$

où $\mathscr{L}_D$ est la restriction à Y'_D de $\mathscr{L}$, et $d_{i-1}(\mathscr{L}_D)$ est le coefficient de $N^{i-1}/(i-1)!$ dans le polynome $\chi(Y'_D, \mathscr{L}_D^N)$.

3.3. Il s'ensuit de [5], Proposition 2, I§3, qu'on peut exprimer le degré $d_{i-1}(\mathscr{L}_D)$ comme un nombre d'intersection:

$$d_{i-1}(\mathscr{L}_D) = (\mathscr{L}_D^{\cdot i-1})_{Y'_D}$$

et puisque $\mathscr{L}_D = \mathscr{L}_{|Y'_D}$ il résulte de [5], Proposition 5, I§2, que

$$(\mathscr{L}_D^{\cdot i-1})_{Y'_D} = (\mathscr{L}^{\cdot i-1} \cdot Y'_D)_{Y'}$$

Le lemme suivant, qui est bien connu, nous permet de passer des nombres d'intersection analytiques aux nombres d'intersection topologiques.

Lemme: *Soit X un k-schéma de type fini complet, soient $\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_t$ des faisceaux inversibles sur X, et soit $\mathscr{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module cohérent avec* $\dim \operatorname{supp} \mathscr{F} \leq t$, *alors*

$$(\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_t \cdot F)_X = \int c_1(\mathscr{L}_1) \cdot \ldots \cdot c_1(\mathscr{L}_t) \cap [\mathscr{F}],$$

où $[\mathscr{F}]$ est la classe d'homologie de $\mathscr{F}$ dans $H_\bullet(X)$.

En revenant à la preuve de (2.2), on voit donc que

$$(\mathscr{L}^{\cdot i-1}\cdot Y'_D)_{Y'} = \int c_1(\mathscr{L})^{i-1} \cap [Y'_D],$$

et on aura fini la preuve de (2.2) si on montre que

$$[Y'_D] = c_a(\mathscr{E}) \cap [Y']$$

3.4. Si on note f la restriction à Y' de ϕ, on a d'après sa définition $Y'_D = f^{-1}(S(D))$, et on va prouver d'abord que

$$[\![Y'_D]\!] = [\![S(D)]\!] \underset{f}{\circ} [\![Y']\!]$$

comme cycles de degré $i-1$ dans Y'.

Puisque $[\![S(D)]\!] \underset{f}{\circ} [\![Y']\!]$ est le cycle d'intersection défini par

$$\sum_{j\geq 0} (-1)^j [\![\mathrm{Tor}_j^{\mathcal{O}_{\mathrm{Grass}_r(n)}}(\mathcal{O}_{Y'}, \mathcal{O}_{S(D)})]\!]_{i-1}$$

il suffira de prouver que

$$\dim \operatorname{supp} \mathrm{Tor}_j^{\mathcal{O}_{\mathrm{Grass}_r(n)}}(\mathcal{O}_{Y'}, \mathcal{O}_{S(D)}) < i-1,$$

pour tout $j > 0$.

Comme on a choisi un drapeau D tel que $S(D)$ est en bonne position par rapport à $\phi_{|\Gamma}$, on a

$$\dim \Gamma \cap Y'_D < i-1,$$

et ainsi l'inegalité cherchée résultera de l'inclusion

$$\operatorname{supp}\ \mathrm{Tor}_j^{\mathcal{O}_{\mathrm{Grass}_r(n)}}(\mathcal{O}_{Y'}, \mathcal{O}_{S(D)}) \subset \Gamma \cap Y'_D,$$

pour tout $j > 0$.

En effet, soit y un point fermé de Y'_D qui n'appartient pas à Γ, soit $z = f(y)$, et notons A l'anneau local $\mathcal{O}_{Y',y}$, B l'anneau local $\mathcal{O}_{\mathrm{Grass}_r(n),z}$, et J' idéal qui définit $S(D)$ dans B, de façon que B/J est l'anneau local $\mathcal{O}_{S(D),z}$.

A est un anneau de Cohen–Macaulay puisque y n'appartient pas à Γ,

B est un anneau régulier et B/J est de Cohen–Macaulay, d'après Eagon–Hochster ([1]). Or, si on note I l'extension de J dans A, on aura

$$\begin{aligned}\operatorname{prof}_I A &= \operatorname{cod}_y(f^{-1}(S(D))Y'),\\ \operatorname{prof}_J B &= \operatorname{cod}_z(S(D), \operatorname{Grass}_r(n)),\end{aligned}$$

lesquelles, d'après le choix de D, seront égales. Donc l'inclusion cherchée résulte du lemme suivant.

LEMME: ([4], §4) *Soit $\phi: B \to A$ un morphisme d'anneaux locaux noetherians, soit J un idéal de B et soit $I = \phi(J)A$ son extension dans A. Si B est régulier, A et B/J sont de Cohen–Macaulay, et* $\operatorname{prof}_J B = \operatorname{prof}_I A$, *alors*

$$\operatorname{Tor}_j^B(A, B/J) = 0, \textit{ pour tout } j > 0.$$

3.5. Si on note

$$\operatorname{cl}_{Y'}: Z_\bullet(Y') \to H_\bullet(Y')$$

l'homomorphisme classe d'un cycle, on vient de prouver que

$$\begin{aligned}[][Y'_D] &= \operatorname{cl}_{Y'}([\![Y'_D]\!])\\ &= \operatorname{cl}_{Y'}([\![S(D)]\!] \underset{f}{\circ} [\![Y']\!])\end{aligned}$$

Or, si le morphisme f est projectif, il résulte de la compatibilité des produits avec l'homomorphisme classe d'un cycle ([7], Théorème (7.2)) que

$$[Y'_D] = f^* \operatorname{cl}^{\operatorname{Grass}_r(n)}([\![S(D)]\!]) \cap [Y'],$$

et puisque la formule de Giambelli donne

$$\operatorname{cl}^{\operatorname{Grass}_r(n)}([\![S(D)]\!]) = c_a \mathscr{Q}_r(n)$$

et

$$f^* \mathscr{Q}_r(n) = \mathscr{E},$$

on obtient finalement

$$[Y'_D] = c_a(\mathscr{E}) \cap [Y'],$$

ce qui conclue la preuve de (2.2), quand f est projectif.

3.6. Dans le cas géneral, considérons la factorisation

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "\tau"] \arrow[rrd, "\pi"'] & X^- \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[rd, "\eta"] & \tilde{X} \arrow[d, "\nu"] \\ & & X \end{tikzcd}$$

de (2.3). On note Y^- le sous-schéma fermé $\eta^{-1}(x)$ de X^-, et on pose

$$\begin{aligned} f^- &= \gamma \circ \varepsilon_{|Y^-}, \\ \mathscr{L}^- &= \mathscr{J}\mathcal{O}_{X^-|Y^-}, \\ \mathscr{E}^- &= (\eta^*\mathscr{F}/\mathrm{Torsion}\,\eta^*\mathscr{F})_{|Y^-}. \end{aligned}$$

Puisque η est un morphisme projectif, Y^- est un schéma projectif et ainsi f^- est aussi projectif; donc, on aura

$$e_x(\mathscr{F}; a) = \int c_1(\mathscr{L}^-)^{i-1} c_a(\mathscr{E}^-) \cap [Y^-]$$

Etant donné que τ est un morphisme propre et birationnel et que Y^- est un diviseur de Cartier, il résulte de [10] (voir aussi [2], 1.5, Proposition 1), que

$$\tau_*[\tau^* Y^-] = [Y^-],$$

or

$$\begin{aligned} e_x(\mathscr{F}; a) &= \int \tau_*(\tau^*(c_1(\mathscr{L}^-)^{i-1} c_a(\mathscr{E}^-)) \cap [\tau^* Y^-]) \\ &= \int c_1(\tau^*\mathscr{L}^-)^{i-1} c_a(\tau^*\mathscr{E}^-) \cap [\tau^* Y^-] \\ &= \int c_1(\mathscr{L})^{i-1} c_a(\mathscr{E}) \cap [Y'], \end{aligned}$$

ce qui met fin à la preuve du théorème.

§4. Applications

Dans ce paragraphe nous donnons deux corollaires du théorème (2.2) pour le faisceau des différentielles.

4.1. Soit X une sous-variéte fermée de $\mathbb{A}^n$, et soit x un point fermé de X.

Si $f: X \to S$ est un morphisme de k-variétés on écrira $e_x(f, a)$ par $e_x(\Omega_f, a)$, et $e_x(X, a)$ par $e_x(\Omega_X, a)$.

On note Y^- le sous-schéma fermé $\eta^{-1}(x)$ de X^-, où $\eta: X^- \to X$ est le morphisme introduit dans (2.3).

Si $H \ni x$ est un hyperplan de $\mathbb{A}^n$, on note $(X \cap H)^\wedge$ la transformée stricte de $X \cap H$ par l'éclatement de Ω_f, $\nu: \tilde{X} \to X$, et on pose $\hat{\nu}_H = \nu_{|\widehat{(X \cap H)}}$.

4.2. Théorème: *Soit $f: X \to S$ un morphisme génériquement lisse de dimension relative r, et soit x un point fermé de X. Si $H \ni x$ est un hyperplan de $\mathbb{A}^n$, qui coupe transversalement tout plan T dans $\hat{\nu}_H^{-1}(x)$, et qui est en position assez générale par rapport à Y^-, alors*

$$e_x(f, a) = e_x(f_{|X \cap H}, a),$$

pour tout symbole de Schubert $a = (a_1, \dots, a_s)$ tel que $\sum_{i=1}^{s} a_i \leq \dim X - 2$.

Démonstration: Soit E, resp. F, l'espace cotangent à $\mathbb{A}^n$, resp. H, en x; et soit A le sous-espace unidimensionnel de E défini par la suite exacte

$$0 \to A \to E \to F \to 0.$$

Considérons dans $\mathrm{Grass}_r(E)$ la variété de Schubert des $(n - r)$-plans qui contiennent A et soit $\mathscr{U}$ son complémentaire, il existe alors un morphisme

$$s: \mathscr{U} \to \mathrm{Grass}_{r-1}(F),$$

défini par: si $E \to Q \to 0$ est un quotient de E de rang r et $Q \in \mathscr{U}$, alors $s(Q)$ est le quotient Q/A de F.

Puisque H coupe transversalement tout T dans $\hat{\nu}_H^{-1}(x)$, on peut définir un morphisme

$$\sigma: (X \cap H)^\wedge \to \widetilde{X \cap H},$$

où $X \cap H$ est l'éclatement de $\Omega_{f|X \cap H}$, qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} & (X \cap H)\hat{} \arrow[r, "\hat{\gamma}_H"] \arrow[d, "\sigma"] & \mathscr{U} \arrow[d, "s"] \\ X \cap H \arrow[ur, "\hat{\nu}_H"] \arrow[r, "\nu_{X \cap H}"'] & \widetilde{X \cap H} \arrow[r, "\gamma_{X \cap H}"] & \mathrm{Grass}_{r-1}(F) \end{tikzcd}$$

Donc, si $\hat{\varepsilon}_H : (X \cap H)\hat{}' \to (X \cap H)\hat{}$ est l'éclatement de $\hat{\nu}_H^{-1}(x)$ dans $(X \cap H)\hat{}$, on obtient un morphisme propre et birationnel

$$\hat{\eta}_H = \hat{\varepsilon}_H \hat{\nu}_H : (X \cap H)\hat{}' \to X \cap H$$

tel que $\hat{\eta}_H^{-1}(x) = Y_H^-$ soit un diviseur, et tel que $\hat{\eta}_H^* \Omega_{f|X \cap H}$ admette un quotient localement libre de rang $r - 1$ $(\gamma_{X \cap H} \sigma \hat{\varepsilon}_H)^* \mathscr{Q}_{r-1}(F)$. On note $\mathscr{E}_H$ sa restriction à Y_H^-. Ainsi, il résulte du théorème (2.2) que

$$e_x(f, a) = \int c_1(\mathscr{L})^{i-1} c_a(\mathscr{E}) \cap [Y^-],$$

et

$$e_x(f_{|X \cap H}, a) = \int c_1(\mathscr{L}_{Y_H^-})^{i-2} c_a(\mathscr{E}_H) \cap [Y_H^-].$$

Puisque H est en position assez générale par rapport a Y^-, il résulte des arguments de (3.4) que

$$c_1(\mathscr{L}) \cap [Y^-] = [Y_H^-].$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned} c_a((\gamma_{X \cap H} \sigma \hat{\varepsilon}_H)^* \mathscr{Q}_{r-1}(F)) &= \\ &= c_a((s \hat{\gamma}_H \hat{\varepsilon}_H)^* \mathscr{Q}_{r-1}(F)) \\ &= (\hat{\gamma}_H \hat{\varepsilon}_H)^* c_a(s^* \mathscr{Q}_{r-1}(F)) \\ &= (\hat{\gamma}_H \hat{\varepsilon}_H)^* c_a(\mathscr{Q}_r(E)_{\mathscr{U}}), \end{aligned}$$

car sur $\mathscr{U}$ on a la suite exacte

$$0 \to A_{\mathscr{U}} \to \mathscr{Q}_r(E)_{\mathscr{U}} \to s^* \mathscr{Q}_{r-1}(F) \to 0,$$

et par conséquent on a

$$c_a(\mathscr{E}_H) = \imath^* c_a(\mathscr{E}),$$

où $\imath : Y_H^- \to Y^-$ est le morphisme d'inclusion. Le diagramme suivant résume la situation considérée

$$\begin{tikzcd}
x & Y_H^- \arrow[l] \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & Y^- \arrow[r] \arrow[d, hook] & x \arrow[d, hook] \\
X \cap H \arrow[from=1-1, hook] & (X \cap H)^{\sim\prime} \arrow[l] \arrow[r, hook] \arrow[d] & X^- \arrow[r] \arrow[d] & X \\
 & \mathscr{U} \arrow[r, hook] & \mathrm{Grass}_r(\mathscr{E}) &
\end{tikzcd}$$

On arrive ainsi à

$$\begin{aligned}
e_x(f, a) &= \int c_1(\mathscr{L})^{i-2} c_a(\mathscr{E}) \cap [Y_H^-] \\
&= \int \imath_*(\imath^* c_a(\mathscr{L})^{i-2} \imath^* c_a(\mathscr{E}) \cap [Y_H^-] \\
&= \int \imath^* c_a(\mathscr{L})^{i-2} \imath^* c_a(\mathscr{E}) \cap [Y_H^-] \\
&= \int c_a(\mathscr{L}_{Y_H^-})^{i-2} c_a(\mathscr{E}_H) \cap [Y_H^-] \\
&= e_x(f_{|X \cap H}, a).
\end{aligned}$$

4.3. Théorème: *Soit X une sous-variété fermée de $\mathbb{A}^n$, soit x un point fermé de X, et soit $p : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^{n-1}$ une projection telle que $p_{|X} : X \to Z = p(X)$ soit un morphisme birationnel et propre. Si p est assez général, alors*

$$e_x(X, a) = e_z(Z, a), \text{ où } z = p(x),$$

pour tout symbole de Schubert $a = (a_1, \ldots, a_s)$ tel que $s < n - \dim X$.

Démonstration: Soit E, resp. F, l'espace cotangent à $\mathbb{A}^n$, resp. $\mathbb{A}^{n-1}$, en x, resp. z. La projection p induit un monomorphisme $(dp_x)^* : F \to E$.

Considérons dans $\mathrm{Grass}_r(E)$ la variété de Schubert des $(n-r)$-plans contenus dans $(dp_x)^* F$, et soit $\mathscr{V}$ son complémentaire, il existe alors un morphisme

$$t : \mathscr{V} \to \mathrm{Grass}_r(F)$$

défini par: si $E \to Q \to 0$ est un quotient de E de rang r et $Q \in \mathscr{V}$, alors $t(Q)$ est le même Q considéré comme quotient de F.

D'abord on choisit la projection p assez générale pour que $\mathscr{W} = (\gamma\varepsilon)^{-1}(\mathscr{V}) \cap Y^-$ soit un ouvert de Zariski dense de Y^-, ce qui est possible d'après [6], Theorem 2.

Soit $\mathscr{I}_z$ l'idéal de z dans $\mathcal{O}_Z$, et soit $\mathscr{I}_x$ l'idéal de x dans $\mathcal{O}_X$. Puisque $p_{|X}$ est birationnel la formule de projection donne

$$e_x(\mathscr{I}_z\mathcal{O}_X) = e_z(\mathscr{I}_z),$$

et puisque si p est assez général on a

$$e_x(\mathscr{I}_x) = e_z(\mathscr{I}_z),$$

on obtient

$$e_x(\mathscr{I}_z\mathcal{O}_X) = e_x(\mathscr{I}_x),$$

ce qui implique, d'après [11], que la clôture intégrale de $\mathscr{I}_z\mathcal{O}_X$ est $\mathscr{I}_x$.

Soit $\pi: X' \to X$ un morphisme birationnel et propre qui domine les éclatements de Ω_X, Ω_Z, $\mathscr{I}_x$ et $\mathscr{I}_z\mathcal{O}_X$.

Sur X' on a

$$\mathscr{I}_z\mathcal{O}_{X'} = \mathscr{I}_x\mathcal{O}_{X'},$$

car ces deux idéaux sont inversibles sur X' et $\mathscr{I}_x\mathcal{O}_{X'}$ est intègre sur $\mathscr{I}_z\mathcal{O}_{X'}$. On notera Y' le diviseur de X' qu'ils définissent.

Comme X' domine les éclatements de Ω_X et Ω_Z, on a deux morphismes

$$\phi_x: X' \to \mathrm{Grass}_r(E),$$

et

$$\phi_z: X' \to \mathrm{Grass}_r(F),$$

tels que $\phi_x^*\mathscr{Q}_r(E)$, resp. $\phi_z^*\mathscr{Q}_r(F)$, est un quotient localement libre de $\pi^*\Omega_X$, resp. $(p\pi)^*\Omega_Z$.

Donc, il résulte du théorème (2.2) que

$$e_x(X, a) = \int c_1(\mathscr{L})^{i-1}c_a(\mathscr{E}_X) \cap [Y'],$$

et

$$e_z(Z, a) = \int c_1(\mathscr{L})^{i-1} c_a(\mathscr{E}_Z) \cap [Y'],$$

où $\mathscr{E}_X$, resp. $\mathscr{E}_Z$, est la restriction de $\phi_x^* \mathscr{Q}_r(E)$, resp. $\phi_z^* \mathscr{Q}_r(F)$, à Y'. Par conséquent, il suffit pour conclure la preuve de montrer que

$$c_a(\mathscr{E}_X) \cap [Y'] = c_a(\mathscr{E}_Z) \cap [Y'].$$

Puisque ces deux classes d'homologie sont les classes de deux cycles algébriques positifs, dont le support a un ouvert de Zariski dense contenu dans $\mathscr{W}$, d'après l'hypothèse $s < n - \dim X$ et [6], Theorem 2, il suffira de montrer l'égalité de leurs restrictions à $\mathscr{W}$. Mais ceci résulte immédiatement du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathscr{W} \arrow[r, "\phi_x"] \arrow[dr, "\phi_z"'] & \mathscr{V} \arrow[r, hook] \arrow[d, "t"] & \mathrm{Grass}_r(E) \\ & \mathrm{Grass}_r(F) & \end{tikzcd}$$

et de l'isomorphisme

$$t^* \mathscr{Q}_r(F) = \mathscr{Q}_r(E)_{\mathscr{V}}.$$

4.4. Nous aurions pu énoncer, et démontrer, sans grandes modifications les résultats de cette note dans le cadre de la géometrie analytique. Nous remarquons à ce propos que nous utiliserons ces résultats ailleurs pour donner une caractérisation de la condition (W_f) de Verdier en termes de l'équimultiplicité des variétés polaires relatives.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.A. Eagon et M. Hochster: Cohen-Macaulay rings, invariant theory, and the perfection of determinantal loci. *Am. Journ. Math. 93* (1971) 1020–1058.

[2] W. Fulton: Rational equivalence on singular varieties. *Publ. Math. I.H.E.S. 45* (1975) 147–167.

[3] G. González-Sprinberg: L'obstruction locale d'Euler et le théorème de MacPherson, dans 'Caractéristique d'Euler–Poincaré". *Astérisque 82–83* (1981) 7–32.

[4] G. Kempf et D. Laskov: The determinantal formula of Schubert calculus. *Acta mathematica 132* (1974) 153–162.

[5] S. Kleiman: Toward a numerical theory of ampleness. *Ann. Math. 84* (1966) 293–344.

[6] S. KLEIMAN: The transversality of a general translate. *Comp. Math. 28* (1974) 287–297.
[7] G. LAUMON: Homologie étale, dans "Séminaire de géométrie analytique". A. Douady–J.L. Verdier. *Astérisque 36–37* (1976) 163–188.
[8] D.T.LÊ et B. TEISSIER: Variétés polaires locales et classes de Chern des variétés singulières, à paraitre.
[9] R. MACPHERSON: Chern classes for singular algebraic varieties. *Ann. Math. 100* (1974) 423–432.
[10] C.P. RAMANUJAN: On a Geometric Interpretation of Multiplicity. *Invent. Math. 22* (1973) 63–67.
[11] D. REES: A-transforms of ideals and a theorem on multiplicities of ideals. *Proc. Cambridge Phil. Soc. 57* (1961) 8–17.
[12] O. RIEMENSCHNEIDER: Characterizing Moishezon Spaces by Almost Positive Coherent Analytic Sheaves. *Math. Z. 123* (1971) 263–284.
[13] H. ROSSI: Picard variety of an isolated singular point. *Rice Univ. Studies 54* (1968) 63–73.
[14] M. STOIA: Une remarque sur la profondeur. *C.R. Acad. Sc. Paris 276* (1973) 929–930.
[15] J.L. VERDIER: Introduction, dans "Caractéristique d'Euler-Poincaré". *Astérisque 82–83* (1981) 3–6.

(Oblatum 26–II–1982 & 21–VII–1982)

Departamento de Matemáticas
ETSIIB. Universidad Politécnica de Barcelona
Diagonal, 647
Barcelona – 28
España