COMPOSITIO MATHEMATICA

NORBERT BRUNNER

Hilberträume mit amorphen basen

Compositio Mathematica, tome 52, nº 3 (1984), p. 381-387
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1984__52_3_381_0>

Compositio Mathematica 52 (1984) 381–387

HILBERTRÄUME MIT AMORPHEN BASEN

Norbert Brunner

Abstract. In $ZF^0 + RT$ (RT is Ramsey's theorem) every operator on $l_2(A)$, A amorpheous (infinite sets are cofinite), is direct sum of a finite matrix and of a scalar.

1. Einleitung

In dieser Note setzen wir die Untersuchungen von [3] über Hilberträume mit kleinen Orthonormalbasen (ON-Basen) fort und leiten eine Darstellung ihrer Operatoren her. Wir arbeiten dabei in ZF^0, dem Zermelo-Fraenkel System ohne Fundierungsaxiom und ohne Auswahlaxiom AC. Unsere Beweise sind somit effektiv im Sinn von Sierpiñski. Wir verwenden jedoch ein kombinatorisches Prinzip von Ramsey.

RT: Ist X unendlich und $A \subseteq [X]^2$, dem System der Paarmengen von X, so gibt es eine unendliche Menge $H \subseteq X$ mit $[H]^2 \subseteq A$ oder $[H]^2 \cap A = \emptyset$.

RT hängt zwar von AC ab ([11]), ist aber eine sehr schwache Annahme, wie in [2] gezeigt wird. Insbesonders ist RT mit der Existenz von unendlichen, amorphen Mengen (unendliche Teilmengen davon sind cofinit) verträglich. Ziel unserer Untersuchungen ist der Beweis des folgenden Satzes:

1.1. Satz: *Aus RT folgt effektiv, dass jeder Operator auf einem Hilbertraum mit amorpher* ON-*Basis die direkte Summe einer endlichen Matrix und eines Skalars ist.*

Wir beweisen eine leichte Verschärfung von 1.1. im nächsten Abschnitt. RT ist bei diesen Argumenten nicht eleminierbar. Es gilt nämlich:

1.2. Beispiel: Es gibt ein Modell von ZF mit einem Hilbertraum mit einer amorphen ON-Basis, auf dem ein Operator existiert, der nicht darstellbar ist als Summe eines endlichdimensionalen Operators und eines Skalars.

Beweis: Wir geben ein Permutationsmodell dafür an und wenden darauf Transfer an ([10]), um ein ZF-Modell mit analogen Eigenschaften zu erhalten.

Wir arbeiten in einem Modell von Hickman [8], wo es eine unendliche, amorphe Menge A gibt und eine amorphe Familie $P \subseteq [A]^2$ aus disjunkten Mengen mit $A = \cup P$. $H = l_2(A)$ ist ein Hilbertraum über $\mathbb{K}(\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C})$, wie in [7] effektiv bewiesen wird. Im Anschluss an 2.2. werden wir zeigen, dass $B = \{x_a : a \in A\}$ (x_a die charakteristische Funktion von $\{a\}$) sowohl eine Hamelbasis als auch eine ON-Basis ist: H hat somit eine amorphe ON-Basis. $\mathrm{O}: H \to H$ wird auf B definiert durch $\mathrm{O}x_a = x_b$, falls $\{a, b\} \in P$, und linear fortgesetzt; wir setzen zur Abkürzung $a' = b$, wenn $\{a, b\} \in P$. Da für $v \in P$.

$$\left\| \sum_{a \in v} x(a) x_a \right\|^2 = \left\| \sum_{a \in v} x(a) x_{a'} \right\|^2,$$

wobei, $\|\cdot\|$ die Norm von H ist, folgt mit Parseval:

$$\|\mathrm{O}x\|^2 = \sum_{v \in P} \left\| \sum_{a \in v} x(a) x_{a'} \right\|^2 = \sum_{v \in P} \left\| \sum_{a \in v} x(a) x_a \right\|^2 = \|x\|^2$$

und O ist eine Isometrie und stetig.

Sei E ein Operator mit einem endlich-dimensionalen Bild und s ein Skalar: $\mathrm{O} \neq E + s$. Da $E(H)$ endlich dimensional ist und B eine Hamelbasis ist, gibt es eine endliche Teilmenge F von B, die $E(H)$ aufspannt (in diesem Sonderfall des Austauschsatzes von Steinitz wird AC nicht verwendet). Es gibt somit $v \in P$ mit $x_a \perp F$ für $a \in v$, weswegen

$$\mathrm{O}x_a = x_{a'} \perp \mathrm{span}(F \cup \{x_a\}),$$

aber $(E + s)(x_a) \in \mathrm{span}(F \cup \{x_a\})$ für $a \in v$. QED

Analog zu [12] kann man zeigen, dass im Permutationsmodell, bei dem die Menge U der reflextiven Mengen zu l_2 isomorph ist, die Automorphismengruppe des Modells aus den unitären Abbildungen auf U besteht und das Normalideal das System der endlichen Teilmengen von U ist, folgendes gilt: U ist ein unendlich dimensionaler Hilbertraum, jedes ON-System ist endlich, jeder Operator auf U ist Summe einer Matrix und eines Skalars. 1.1. besagt somit, dass sich Hilberträume mit amorphen Basen in $ZF^0 + RT$ so verhalten, wie einige Hilberträume ohne ON-Basen.

Im Zusammenhang mit RT sei auf folgendes offene Problem hingewiesen: RT_n ist die Aussage, dass es zu jeder endlichen Färbung von $[X]^n$ eine unendliche homogene Menge gibt. Impliziert RT_2 für alle $n \geqslant 3$ RT_n? Einige Ergebnisse über amorphe algebraische Strukturen findet man in [8], [9].

2. Beweis von 1.1

Da 1.1. für endlichdimensionale Räume trivial ist, können wir voraussetzen, dass H ein Hilbertraum mit einer unendlichen, amorphen Basis A ist. Wie in [7] effektiv gezeigt wird, ist H dann zu $l_2(A)$ isomorph. Wir werden RT in folgender Form anwenden:

2.1. LEMMA: *Sei A unendlich und amorph und sei F: $A \to P(A)$ eine Funktion von A in die Potenzmenge, für die $F(a)$ für alle $a \in A$ endlich ist. Aus RT folgt effektiv, dass es eine endliche Teilmenge e von A gibt, sodass für $a \in A$ $F(A) \subseteq e \cup \{a\}$.*

BEWEIS: Wir zeigen zunächst, dass es eine endliche Teilmenge e von A gibt mit $|F(a) \setminus e| \leqslant 1$.

$C \subseteq [A]^2$ ist die Menge aller $c \in [A]^2$, für die es ein $a \in A$ gibt mit $c \subseteq F(a)$. Nach RT gibt es eine unendliche Menge $H \subseteq A$ mit $[H]^2 \subseteq C$ oder $[H]^2 \cap C = \emptyset$.

$[H]^2 \subseteq C$ ist unmöglich. Für $h \in H$ sei $A(h) = \{a \in A : h \in F(a)\}$. $A(h)$ ist unendlich, denn sonst wäre $B = \cup\{F(a) : a \in A(h)\}$ endlich und es gäbe ein $g \in H \setminus B$. Wegen $[H]^2 \subseteq C$ existiert dazu ein $a \in A$ mit $\{h, g\} \subseteq F(a)$, weswegen $a \in A(h)$ und $g \in F(a) \setminus B$, ein Widerspruch. $A(h)$ ist somit cofinit und daher ist auch $\cap\{A(h) : h \in E\}$ unendlich, wenn E endlich ist. Da A amorph ist, ist $P(A)$ D-finit ([15]), und es gibt n mit $|F(a) \leqslant n$ für alle $a \in A$. Denn sonst wäre $A_n = \{a \in A : |F(a)| = n\}$, $n \in \omega$, eine unendliche Folge in $P(A)$, der Potenzmenge. $E \subseteq H$ bestehe aus $n+1$ Elementen. Es gibt dann $a \in \cap\{A(h) : h \in E\}$ und daher $E \subseteq F(a)$, ein Widerspruch zur Definition von n.

Somit ist $[H]^2 \cap C = \emptyset$, weswegen $|F(a) \cap H| \leqslant 1$ für alle $a \in A$. $e = A \setminus H$ ist endlich und erfüllt unsere Forderung.

Ist $F(a) \subseteq e$, so setzen wir $f(a) = a$ und sonst $\{f(a)\} = F(a) \setminus e$. Es gibt $g \subseteq A$, g endlich, mit $f(a) \in g \cup \{a\}$, $a \in A$.

Zum Beweis definieren wir $G(a) = \{a, f(a)\}$ und verwenden die oben hergeleitete Aussage: Es gibt eine endliche Menge $h \subseteq A$, für die $|G(a) \setminus h| \leqslant 1$ ist für alle $a \in A$. Wir setzen $g = h \cup f(h)$ und sehen: Ist $a \in h$, so ist $f(a) \in g$. Ist $a \notin h$, so ist $a \in G(a) \setminus h$ und $f(a) = a$ oder $f(a) \in h \subseteq g$.

Insgesamt folgt für alle $a \in A : F(a) \subseteq e \cup \{f(a)\} \subseteq e \cup g \cup \{a\}$. QED

Die Funktion F wird mit folgendem Lemma definiert.

2.2. LEMMA: *Ist A amorph und $x \in l_2(A)$, so ist $s(x) = \{a \in A : x(a) \neq 0\}$ endlich.*

BEWEIS: Da A amorph ist, ist es auch $x(A) \subseteq \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Da $\mathbb{K}$ als Menge ordnungsfähig ist ($\mathbb{C}$ z.B. lexikographisch), ist $x(A)$ endlich (vgl. z.B. [15]). Ist $s(x)$ unendlich, gibt es $k \neq 0$ in $\mathbb{K}$, für das $x^{-1}(k)$ unendlich ist, was wegen $\|x\| < \infty$ unmöglich ist. QED

Definiert man x_a durch $x_a(a) = 1$ und $x_a(b) = 0$ für $a \neq b$, so folgt aus 2.2., dass $B = \{x_a : a \in A\}$ sowohl eine Hamelbasis als auch eine ON-Basis von $l_2(A)$ ist. Klarerweise liegt x in span $\{x_a : a \in s(x)\}$, und ist $x(a) = \langle x, x_a \rangle$, wobei $\langle x, y \rangle = \Sigma_{a \in A} x(a) y(a)^-$, das aus $\|\cdot\|$ definierte Skalarprodukt ist. Ist $C \subseteq A$, so ist $\{x : s(x) \subseteq C\} =$ span $\{x_b : b \in C\}$ ein abgeschlossener Unterraum von $l_2(A)$ und $\{x : s(x) \cap C = \emptyset\}$ sein Orthokomplement. Als F von 2.1. werden wir $F(a) = s(\mathrm{O}x_a)$ verwenden (vgl. 2.4.), notieren aber vorher als Folgerung von 2.2.:

2.3. Korollar: *Jeder Hilbertraum mit einer amorphen* ON-*Basis ist von* 1. *Kategorie.*

Beweis: Sei $H = l_2(A)$, A amorph, und $K_n = \{x \in H : |s(x)| \leqslant n\}$. Wir zeigen, dass K_n abgeschlossen ist. Da $K_n^0 = \emptyset$ und wegen $H = \cup_n K_n$ (2.2) ist dann H eine abzählbare Vereinigung von nirgends dichten Mengen K_n.

Sei $x \notin K_n$. Ist $y \in K_n$, so gibt es $a \in s(x) \setminus s(y)$ und somit $\|x - y\| \geqslant |x(a) - y(a)| = |x(a)|$. Setzt man $r = \min\{|x(a)| : a \in s(x)\}$, so ist $r > 0$ und dist $(x, K_n) \geqslant r$. QED

Analog folgt aus $AC^{\omega}_{\mathrm{fin}}$, dass Hilberträume mit D-finiten ON-Basen von 1. Kategorie sind. $AC^{\omega}_{\mathrm{fin}}$ ist das Auswahlaxiom für abzählbare Familien nichtleerer endlicher Mengen.

2.4. Lemma: *Aus RT folgt effektiv: Ist A amorph und unendlich und* O: $l_2(A) \to l_2(A)$ *ein Operator (linear und stetig), so gibt es eine endliche Teilmenge e von A mit $s(\mathrm{O}x_a) \subseteq e$ für $a \in e$ und es gibt $k \in \mathbb{K}$* ($\mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{C}$) *mit* $\mathrm{O}x_a = k \cdot x_a$ *für $a \in A \setminus e$.*

Beweis: Aus 2.1. folgt für $F(a) = s(\mathrm{O}x_a)$ (vgl. 2.2): Es gibt $g \subseteq A$, g endlich, mit $s\mathrm{O}x_a \subseteq g \cup \{a\}$. Für $b \in g$ sei $G(b) = \{a \in A : b \in s\mathrm{O}x_a\}$.

Sei ein $G(b)$ unendlich. Da $o(a) = \langle \mathrm{O}x_a, x_b \rangle$ endlichwertig ist (vgl. den Beweis von 2.2.), gibt es $k \neq 0$ in $\mathbb{K}$ mit $o(a) = k$ für alle a in einer unendlichen Menge $C_k \subseteq G(b)$. Da O stetig und linear ist, hat O eine beschränkte Operatornorm $\|\mathrm{O}\|$ (ein effektives Resultat), und es gibt eine Menge $E \subseteq C_k$ mit $|E| > \|\mathrm{O}\|^2 / |k|^2$. Wir setzen $x = 1/\sqrt{|E|}\ \Sigma_{a \in E} x_a$: Klarerweise ist $\|x\| = 1$ und $\|\mathrm{O}\| \geqslant \|\mathrm{O}x\| \geqslant |\langle \mathrm{O}x, x_b \rangle| = \sqrt{|E|} \cdot |k| > \|\mathrm{O}\|$, ein Widerspruch.

Somit sind alle Mengen $G(b)$, $b \in g$, endlich. Die Funktion $o(a) = \langle \mathrm{O}x_a, x_a \rangle$ ist endlichwertig und es gibt $k \in \mathbb{K}$ und $h \subseteq A$, endlich, mit $o(a) = k$ für $a \in A \setminus h$. Wir setzen $e = g \cup \cup\{G(b) : b \in g\} \cup h$ und notieren: Ist $a \in A \setminus e$, so ist kein $b \in g$ in $s(\mathrm{O}x_a) \subseteq g \cup \{a\}$ und somit

$\mathrm{O}x_a = o(a) \cdot x_a$. Wegen $a \in A \setminus h$ ist $\mathrm{O}x_a = kx_a$. Ist $a \in e$, so ist nach der Definition von g $s(\mathrm{O}x_a) \subseteq g \cup \{a\} \subseteq e$. QED

1.1. folgt sofort aus 2.4.: Ist $H = l_2(A)$, so ist $E = \{x \in H: s(x) \subseteq e\}$ endlichdimensional und E reduziert O: $\mathrm{O}(E) \subseteq E$, weil $s(\mathrm{O}x) \subseteq e$ für $s(x) \subseteq e$, und $\mathrm{O}(E^\perp) \subseteq E^\perp$, weil $\mathrm{O}|E^\perp = k$. $M = \mathrm{O}|E$ ist somit eine endliche Matrix und $\mathrm{O} = M \oplus k$.

3. Anwendungen

Aus 1.1. folgt, dass die Operatortheorie auf Hilberträumen mit amorphen Basen keine strikt unendlichdimensionalen Phänomene zeigt. Wir demonstrieren das an zwei Beispielen. In diesem Abschnitt werden wir ständig RT voraussetzen. Als erstes verschärfen wir ein Resultat von [5]:

3.1. Beispiel: Das einzige echte, beidseitige Ideal von Operatoren auf einem Hilbertraum H mit amorpher Basis ist das Ideal der endlichdimensionalen Operatoren. Jeder kompakte Operator ist endlichdimensional.

Beweis: Die Operatoren auf H bilden einen Ring bzgl. $A + B$, $k \cdot A$ $A \circ B$. Ist I ein Ideal ($I \neq \emptyset$) in diesem Ring, so enthält I alle endlichdimensionalen Operatoren, wie in [5] effektiv gezeigt wird. Ist $A \in I$ nicht endlichdimensional, so gibt es nach 1.1. einen reduzierten Teilraum T von endlicher Dimension, für den $A|T^\perp$ ein Skalar k ist, und $k \neq 0$. $V = (k - A)|T \oplus 0$, $(0 = \text{Null})$, ist endlichdimensional, und daher in I, weswegen $1 = 1/k\ (A + V)$ in I liegt und $I = H$ ist nicht echt.

Da die kompakten Operatoren ein Ideal bilden und 1 nicht kompakt ist, wenn H unendlichdimensional ist, folgt die 2. Behauptung. QED

Ein Kommutator ist ein Operator der Form $A \circ B - B \circ A$ für Operatoren A und B. Kommutatoren wurden zuerst von Physikern betrachtet (Wintner [17] und [16]) und spielen auch eine Rolle bei verallgemeinerten Ableitungen. Im Gegensatz zu einem Resultat von Pearcy in [13], wonach jeder Operator Summe zweier Kommutatoren ist, gilt für amorphe Dimensionen 3.2. Wie aus 1.2. folgt, ist RT hier wesentlich.

3.2. Beispiel: Ein Operator C auf einem Hilbertraum H mit einer amorphen Basis B ist genau dann ein Kommutator, wenn es eine endliche Menge $E \subseteq B$ gibt, sodass für jede endliche Teilmenge F von B mit $E \subseteq F$ gilt: $\Sigma_{x \in F} \langle Cx, x \rangle = 0$. Die Kommutatoren bilden einen Unterraum der kompakten Operatoren.

Beweis: Sei o.B.d.A. $H = l_2(A)$, A amorph und $B = \{x_a : a \in A\}$ (vgl. [7]).

Wenn $C = O_1O_2 - O_2O_1$, so gibt es nach 2.4. eine endliche Menge $E \subseteq A$, für die $\bar{E} = \operatorname{span}\{x_a : a \in E\}$ C, O_1 und O_2 reduziert und C und O_i auf $\bar{E}^{\perp}$ Skalare sind. Folglich ist $C|\bar{E}^{\perp}$ der Nulloperator und C ist kompakt. Ist $F \supseteq E$ endlich, so reduziert auch $\bar{F} = \operatorname{span}\{x_a : a \in F\}$ C und O_i, weswegen $C|\bar{F}$ ein Kommutator auf einem endlich dimensionalen Raum ist und die Spur $\Sigma_{a \in F} \langle Cx_a, x_a \rangle = 0$.

Sei umgekehrt C ein Operator mit der obigen Eigenschaft: Es gibt $E \subseteq A$, E endlich, sodass für alle $F \supseteq E$ $\Sigma_{a \in F} \langle Cx_a, x_a \rangle = 0$. Wegen 2.4. gibt es $G \subseteq A$, G endlich, mit: $\bar{G}$ reduziert C und $C|\bar{G}^{\perp} = k$ für einen Skalar $k \in \mathbb{K}$. Sie $J = E \cup G$ und b sei in $A \setminus J$: Wegen $J \supseteq E$ sind $s = \Sigma_{a \in J} \langle Cx_a, x_a \rangle = 0$ und $\Sigma_{a \in J \cup \{b\}} \langle Cx_a, x_a \rangle = k + s = 0$, weswegen $k = 0$. Wegen $J \supseteq G$ reduziert $\bar{J}C$ und somit ist $C|\bar{J}$ ein Operator mit verschwindender Spur s. Nach [1] ist $C|\bar{J}$ ein Kommutator und daher auch C.

Die verbleibende Aussage des Satzes über Kommutatoren folgt sofort aus den obigen Argumenten. QED

Analog kann man zeigen, dass quasinilpotente Operatoren nilpotent sind, weswegen es keine shift-Operatoren gibt, und dass das Spektrum jeden Operators aus endlich vielen Eigenwerten besteht. Da RT mit der Existenz unendlicher amorpher Mengen konsistent ist, folgt: Ist ZF^0 konsistent, so ist ein strikt unendlichdimensionaler Satz der Operatortheorie nicht effektiv beweisbar. Umgekehrt ist zu vermuten, dass Sätze der Operatortheorie mit endlichdimensionalen Analoga für Hilberträume effektiv gelten. So ist etwa der Darstellungssatz von Riesz effektiv. In Banachräumen ist diese Vermutung falsch: Der Satz von Hahn-Banach hängt von AC ab (impliziert es aber nicht effektiv - vgl. [14]). Als weitere Folgerung sei notiert, dass in reellen Hilberträumen mit amorphen Basen $\sigma(O) \cap \mathbb{R} \neq \phi$ ist, σ das Spektrum von O.

Literatur

[1] A.A. Albert and B. Muckenhoupt: Matrices of trace zero, *Michigan Math. Journal 4* (1957) 1–3.

[2] A. Blass: Ramsey's Theorem in the hierarchy of choice principles. *Journal of Symbolic Logic 42* (1977) 387–340.

[3] N. Brunner: Sequential Compactness and the Axiom of Choice. *Notre Dame Journal of Formal Logic 24* (1983) 89–92.

[4] N. Brunner: Dedekind-Endlichkeit und Wohlordenbarkeit, *Monatshefte für Mathematik 94* (1982) 9–31.

[5] J.W. Calkin: Two sided ideals in the ring of bounded operators. *Ann. Math. 42* (1941) 834–873.

[6] J. Cigler and H.C. Reichel: Topologie, Bibliograph. Inst. BI 121, Wien 1978.

[7] N. Dunford and J.T. Schwartz: *Linear Operators I* Interscience, New York: (1957).

[8] J.L. Hickman: Groups in models of set theory, *Bull. Aust. Math. Soc. 14* (1976) 199–232.

[9] J.L. HICKMAN: Quasiminimal posets and lattices, *Journal für die reine und angewandte Mathematik 296* (1977) 10–13.
[10] T.J. JECH: *The Axiom of Choice* New York: North Holland (1973)
[11] E.M. KLEINBERG: The independence of Ramsey's theorem. *Journal of Symbolic Logic 34* (1969) 205–206.
[12] H. LÄUCHLI: Auswahlaxiom in der Algebra. *Commentarii Math. Helvetii 37* (1963) 1–18.
[13] C. PEARCY: On the sum of two commutators. *Proc. Amer. Math. Soc. 16* (1959) 81–93.
[14] D. PINCUS: The independence of the Boolean Prime Ideal theorem, *Bull. Amer. Math. Soc. 78* (1972) 766–770.
[15] J. TRUSS: Classes of Dedekind-Finite Cardinals. *Fundamenta Math. 84* (1974) 187–208.
[16] H. WIELANDT: Unbeschränktheit der Operatoren der Quantenmechanik, *Mathematische Annalen 121* (1949) 21.
[17] A. WINTNER: Unboundedness of Quantum Mechanical Matrices, *Physical Rev. 71* (1947) 738–739.

(Oblatum 3-IX-1982)

Kaiser Franz Ring 22
A-2500 Baden
Austria