

# COMPOSITIO MATHEMATICA

FRANÇOIS RODIER

## Sur le caractère de Steinberg

*Compositio Mathematica*, tome 59, n° 2 (1986), p. 147-149

[http://www.numdam.org/item?id=CM\\_1986\\_\\_59\\_2\\_147\\_0](http://www.numdam.org/item?id=CM_1986__59_2_147_0)

© Foundation Compositio Mathematica, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## SUR LE CARACTÈRE DE STEINBERG

François Rodier

On montre que le caractère de Steinberg d'un groupe réductif  $p$ -adique n'est jamais nul sur les éléments réguliers semi-simples.

Soit  $G$  un groupe réductif connexe défini sur un corps  $p$ -adique  $k$ . La représentation de Steinberg de  $G$  est la représentation virtuelle définie par

$$\text{St}(G) = \sum (-1)^{\dim A_0/A} \text{Ind}_P^G \delta_P^{-\frac{1}{2}}$$

où la somme est étendue aux sous-groupes paraboliques  $P$  de  $G$  contenant un sous-groupe parabolique minimal  $P_0$  fixé de  $G$ ,  $A$  (resp.  $A_0$ ) est une composante déployée (c'est à dire un tore déployé maximal dans le centre d'un sous-groupe de Lévi) de  $P$  (resp.  $P_0$ ),  $\text{Ind}_P^G$  est l'induction normalisée (transformant les représentations préunitaires en préunitaires) dans la catégorie des représentations lisses,  $\delta_P$  est la fonction module de  $P$ :  $\delta_P(g) = |\det(\text{Ad } g)_{\text{Lie } P}|$  si  $g \in P$ . Borel et Serre ([1]), puis par d'autres méthodes Casselman ([2]), ont montré que  $\text{St}$  est en fait une représentation irréductible de carré intégrable de  $G$ .

Le caractère de  $\text{St}$  est représenté par une fonction localement intégrable sur  $G$ , notée  $\text{car}(\text{St})$ ; sa valeur sur les éléments réguliers semi-simples de  $G$  est donnée par la formule suivante (cf. [6], [7])

$$(*) \quad \text{car}(\text{St})(\gamma) = (-1)^{\dim A_0} \sum (-1)^{\dim A} \delta_P(\gamma)^{-\frac{1}{2}} |D_{G/M}(\gamma)|^{-\frac{1}{2}}$$

où  $\gamma$  est un élément régulier semi-simple contenu dans un sous-groupe de Cartan  $\Gamma$ , la somme est étendue aux paires paraboliques  $(P, A)$  telles que  $A$  soit un sous-tore de la composante déployée  $A_\Gamma$  de  $\Gamma$ ,  $M$  est le centralisateur de  $A$  et  $D_{G/M}(\gamma) = \det(1 - \text{Ad } \gamma)_{\text{Lie } G/\text{Lie } M}$ . On va montrer que si  $\gamma$  est un élément régulier semi-simple de  $G$ , alors  $\text{car}(\text{St})(\gamma)$  n'est jamais nul. Rappelons qu'on a un résultat analogue dans le cas des groupes réductifs sur un corps fini (cf. [5]).

On se ramène d'abord au cas où  $\gamma$  est contenu dans un sous-groupe compact de  $G$ , grâce au résultat suivant de Casselman. Soit  $P$  le sous-groupe parabolique contracté par  $\gamma$ : son radical unipotent  $N$  est l'ensemble des éléments  $g$  de  $G$  tels que la limite quand  $n$  tend vers

l'infini de  $\gamma^n g \gamma^{-n}$  soit égale à  $e$ . Soit  $\text{St}_N$  la représentation de  $M$  dans l'espace des coinvariants de  $N$  dans  $\text{St}$  (c'est le module de Jacquet associé à  $\text{St}$  et  $N$ , cf. [3]).

PROPOSITION 1:  $\text{car}(\text{St})(\gamma) = \text{car}(\text{St}_N)(\gamma)$ .

DÉMONSTRATION: Cf. [4].

La proposition suivante donne le calcul de  $\text{St}_N$ .

PROPOSITION 2: *Soit  $P = MN$  un sous groupe parabolique de  $G$ . On a  $\text{St}_N = \delta_P \text{St}(M)$  où  $\text{St}(M)$  est la représentation de Steinberg de  $M$ .*

DÉMONSTRATION: Comme  $\text{St}$  est irréductible,  $\text{St}_N$  est de type fini. Soit  $\pi$  un quotient irréductible de  $\text{St}_N$ . Il existe un sous-groupe parabolique  $Q$  de  $M$ , contenant  $M \cap P_0$ , et de radical unipotent  $V$ , tel que la représentation  $\pi_V$  soit cuspidale (cf. [3]). D'après les propriétés des modules de Jacquet (cf. loc. cit.) on a  $(\text{St}_N)_V = \text{St}_{N.V}$  et  $N.V$  est le radical unipotent du sous-groupe parabolique  $Q.N$  de  $G$ . Soit  $N_0$  le radical unipotent de  $P_0$ ;  $\text{St}$  est l'unique sous-quotient de  $\text{Ind}_{P_0}^G \delta_{P_0}^1$  tel que  $(\text{St})_{N_0} = \delta_{P_0}$  (cf. [3] §9 ou [2]). Donc  $\text{St}_{N.V} = \delta_{P_0}$  si  $Q$  est un sous-groupe parabolique minimal de  $M$  et  $\text{St}_{N.V}$  n'a pas de composant cuspidal sinon. Si  $\text{St}_{N.V}$  est cuspidal, on a donc  $Q = M \cap P_0$ ,  $V = M \cap N_0$  et  $\pi_{N_0 \cap M} = \delta_{P_0} = \delta_P \cdot \delta_{P_0 \cap M}$ . Cela implique que  $\pi$  est une sous-représentation de  $\delta_P \text{Ind}_{P_0 \cap M}^M \delta_{P_0 \cap M}^1$ . Appliquant cette fois-ci à  $M$  la caractérisation rappelée ci-dessus de la représentation de Steinberg, on en déduit que  $\pi = \delta_P \text{St}(M)$ . Soit maintenant  $\pi_0$  le noyau de la projection de  $\text{St}_N$  sur  $\pi$ . Comme le foncteur de Jacquet est exact,  $(\pi_0)_V \subset (\text{St}_N)_V$  et  $(\pi_0)_V$  n'a pas de composante cuspidale si  $Q \neq M \cap P_0$ ,  $(\pi_0)_{N_0 \cap M} = 0$ . D'où  $\pi_0 = 0$ . Donc  $\text{St}_N = \pi = \delta_P \cdot \text{St}(M)$ .

Soit  $q$  le nombre d'éléments du corps résiduel de  $k$ . Les valeurs absolues des éléments de  $k^\times$  sont des puissances de  $q$ .

PROPOSITION 3: *Si  $\gamma$  est dans un sous-groupe compact de  $G$ , alors  $\text{car}(\text{St})(\gamma)$  est un entier impair.*

DÉMONSTRATION: Reprenons les notations de la formule (\*). Si  $\gamma$  est dans un sous-groupe compact de  $G$ , on a

$$\delta_P(\gamma) = |\det_{\text{Lie } P} \text{Ad } \gamma| = 1.$$

Si  $\bar{N}$  est le radical unipotent du sous-groupe parabolique opposé à  $P$  contenant  $M$ , on a

$$\begin{aligned} |D_{G/M}(\gamma)| &= |\det_{\text{Lie } N}(1 - \text{Ad } \gamma)| \cdot |\det_{\text{Lie } \bar{N}}(1 - \text{Ad } \gamma)| \\ &= |\det_{\text{Lie } N}(1 - \text{Ad } \gamma)| \cdot |\det_{\text{Lie } N}(1 - \text{Ad } \gamma^{-1})| \\ &= |\det_{\text{Lie } N} \text{Ad } \gamma^{-1}| \cdot |\det_{\text{Lie } N}(1 - \text{Ad } \gamma)|^2 \\ &= |\det_{\text{Lie } N}(1 - \text{Ad } \gamma)|^2. \end{aligned}$$

Les valeurs propres de  $\text{Ad } \gamma$  (dans une extension de  $k$ ) sont de valeur absolue égale à 1. On a donc

$$|\det_{\text{Lie } N}(1 - \text{Ad } \gamma)| \leq 1.$$

On en déduit que  $|D_{G/M}(\gamma)|^{-\frac{1}{2}}$  est une puissance positive de  $q$ , donc un entier. La formule (\*) devient

$$\text{car}(\text{St})(\gamma) = (-1)^{\dim A_0} \sum (-1)^{\dim A} |D_{G/M}(\gamma)|^{-\frac{1}{2}}.$$

A chaque paire parabolique  $(P, A)$  intervenant dans la somme, il lui correspond une paire opposée  $(\bar{P}, A)$  unique, et cette paire opposée donne lieu dans la somme ci-dessus à un terme de même valeur (car  $\bar{M} = M$ ). On a  $(P, A) \neq (\bar{P}, A)$  sauf si  $P = G$ . Enfin le terme correspondant à  $P = G$  est égal à  $\pm 1$ , d'où la proposition.

**COROLLAIRE:** Si  $\gamma$  est un élément régulier semi-simple de  $G$ , on a  $\text{car}(\text{St})(\gamma) \neq 0$ .

## References

- [1] A. BOREL et J.P. SERRE: Cohomologie d'immeubles et de groupes S-arithmétiques. *Topology* 15 (1976) 211–232.
- [2] W. CASSELMAN: The Steinberg character as a true character, in Harmonic analysis on homogeneous spaces. *Proc. Symp. pure Math., Vol. 26, Amer. Math. Soc., Providence* (1973) 413–417.
- [3] W. CASSELMAN: Introduction to the theory of admissible representations of  $p$ -adic reductive groups: notes polycopiées (1978).
- [4] W. CASSELMAN: Characters and Jacquet modules. *Math. Ann.* 230 (1977) 101–105.
- [5] C.W. CURTIS, G.I. LEHRER et J. TITS: Spherical buildings and the character of the Steinberg representation. *INVENTIONES MATH.* 58 (1980) 201–210.
- [6] HARISH-CHANDRA: Harmonic analysis on reductive  $p$ -adic groups, in Harmonic analysis on homogeneous spaces. *Proc. Symp. pure Math., Vol. 26, Amer. Math. Soc., Providence* (1973) 167–192.
- [7] A.J. SILBERGER: *Introduction to harmonic Analysis on Reductive  $p$ -adic Groups*. Princeton University Press, Princeton (1979).

(Oblatum 20-III-1984)

U.E.R. de mathématiques  
 Université Paris 7  
 2, Place Jussieu  
 F-75251 Paris Cedex 05  
 France