

COMPOSITIO MATHEMATICA

GUY DIAZ

Sur l'approximation de π par des nombres algébriques particuliers

Compositio Mathematica, tome 74, n° 3 (1990), p. 285-298

http://www.numdam.org/item?id=CM_1990__74_3_285_0

© Foundation Compositio Mathematica, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://www.compositio.nl>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Sur l'approximation de π par des nombres algébriques particuliers

GUY DIAZ

Université de Saint-Etienne, 23, rue du Docteur Paul Michelon, 42023 Saint-Etienne Cédex 2, France

Received 6 June 1989; accepted 30 October 1989

Résumé. Nous minorons le module de la différence entre π et les éléments d'un corps de nombres engendré par une racine de l'unité; ceci améliore un résultat de N.I. Feldman (1973). La même méthode permet de retrouver un résultat de M. Waldschmidt (1978), et comme corollaire la mesure d'approximation de π due à P.L. Cijssouw (1977). Cette méthode est de type Gel'fond, avec un lemme de zéros géométrique.

I. Enoncés des résultats

Etant donné un nombre algébrique ξ on notera $d(\xi)$ son degré, $L(\xi)$ sa longueur, $M(\xi)$ sa mesure de Mahler, $h(\xi)$ sa hauteur logarithmique absolue. Rappelons (voir [11, paragraphe 2] par exemple) que $h(\xi) = \log M(\xi)/d(\xi)$; sachant que $M(\xi) \leq L(\xi) \leq (\exp d(\xi)) \cdot M(\xi)$, on en déduit:

$$h(\xi) \leq \frac{\log L(\xi)}{d(\xi)} \leq 1 + h(\xi).$$

On se propose de démontrer les deux théorèmes suivants.

THÉORÈME 1. *Il existe $c_0 > 0$ tel que pour tout entier $N \geq 1$ et tout nombre algébrique ξ du corps $\mathbb{Q}(i, \exp(2\pi i/N))$ on ait, en notant D_N le degré de ce corps de nombres*

$$\log|\pi - \xi| \geq -c_0 \frac{D_N^2}{N} \cdot (h(\xi) + \log D_N) \cdot \log D_N.$$

En notant φ la fonction indicatrice d'Euler, on sait que $\exp(2\pi i/N)$ est algébrique de degré $\varphi(N)$; et avec les notations du théorème 1 on a $\varphi(N) \leq D_N \leq 2\varphi(N) \leq 2N$. Compte-tenu de $D_N \geq 2$ on déduit de ce théorème les mesures:

$$\log|\pi - \xi| \geq -2c_0 \frac{(D_N \log D_N)^2}{N} \left(1 + \frac{\log L(\xi)}{d(\xi)}\right),$$

$$\log|\pi - \xi| \geq -4c_0 D_N (\log D_N)^2 \left(1 + \frac{\log L(\xi)}{d(\xi)}\right).$$

Sous cette forme la comparaison est aisée avec le résultat antérieur de N.I. Feldman [2, Théorème] qui s'écrit, sous les mêmes hypothèses:

$$\log|\pi - \xi| \geq -cD_N^2 \left(1 + \frac{\log L(\xi)}{d(\xi)}\right).$$

On a donc gagné au moins un facteur $D_N(\log D_N)^{-2}$ par rapport à Feldman. Il serait intéressant de savoir si cette mesure de π a un caractère optimal (en un sens à préciser).

Le Théorème 1 portait sur l'approximation de π par des nombres algébriques très particuliers; le Théorème 2 a lui un caractère beaucoup plus général.

THÉORÈME 2. *Il existe $c_1 > 0$ tel que pour tout entier $N \geq 2$ et tout nombre algébrique ξ on ait, en notant D_N le degré du corps de nombres $\mathbb{Q}(i, \xi, \exp(2\pi i/N))$*

$$\log|\pi - \xi| \geq -c_1 D_N^2 \cdot (h(\xi) + \log D_N) \cdot \frac{\log D_N}{\log N}.$$

Ce Théorème 2 n'est pas nouveau; il est de même nature qu'un résultat de M. Waldschmidt [10, Théorème 2.5], et moins précis en ce sens que la constante c_1 n'est pas explicitée ici. Il faut noter qu'en spécialisant le théorème 2 pour $N = 2$ par exemple et en majorant D_N par $2d(\xi)$ on obtient une mesure d'approximation pour π :

$$\log|\pi - \xi| \geq -c_2 d(\xi)^2 \cdot (1 + h(\xi) + \log d(\xi)) \cdot (1 + \log d(\xi)).$$

C'est actuellement la meilleure mesure de π connue (à la valeur de la constante c_2 prêt) et elle est essentiellement due à P.L. Cijssouw [1].

La méthode utilisée est la méthode de Gel'fond, alors que M. Waldschmidt déduit son théorème de ses résultats sur les formes linéaires de logarithmes [11], obtenus par la méthode de Baker. Le lemme de zéros est obtenu à partir du théorème général de P. Philippon [7], et on peut donc penser qu'il fournit les "bonnes contraintes". Les deux démonstrations ne diffèrent que dans le choix final de certains éléments auxiliaires et des paramètres. Enfin contrairement à une habitude répandue en théorie des nombres transcendants, ces démonstrations ne sont pas faites par l'absurde.

II. Préliminaires

(II.1) Polynômes de Feldman

On note $\Delta_0(z) = 1$, $\Delta_m(z) = (1/m!)(z+1)\dots(z+m)$ pour $m \in \mathbb{N}$. Le lemme suivant, dû à P. Philippon [6, Théorèmes 2, 3], permet d'estimer croissance et

dénominateur des dérivées de ces polynômes Δ_m pour z variant dans \mathbb{Q} . On aurait aussi pu utiliser la variante de ces polynômes introduite par P.L. Cijsouw (voir par exemple [1, Lemme 4]).

LEMME 1.

(a) Pour $z \in \mathbb{Q}$, $t \in \mathbb{N}$:

$$\log \left| \frac{1}{t!} \Delta_m^{(t)}(z) \right| \leq (m - t) \log \left(1 + \frac{|z|}{m} \right) + 3m.$$

(b) On se donne z dans \mathbb{Q} , t et m dans \mathbb{N} ; il existe un entier positif $\delta(z, m, t)$ dénominateur commun à tous les nombres rationnels $(1/\tau!) \Delta_\mu^{(t)}(z)$ (où $\tau, \mu \in \mathbb{N}$, $0 \leq \mu \leq m, 0 \leq \tau \leq t$) et tel que l'on ait, en notant $\text{den}(z)$ le dénominateur de z :

$$\log \delta(z, m, t) \leq 21m(1 + \log(1 + t) + \log \text{den}(z)).$$

(II.2) Fonction indicatrice d'Euler, φ

On sait que pour tout nombre entier $N \geq 1$, $\exp(2\pi i/N)$ est un entier algébrique de degré $\varphi(N)$ où φ est la fonction indicatrice d'Euler. Cette fonction φ vérifie les propriétés suivantes (voir [8] et [5]), où γ est la constante d'Euler:

$$\frac{N}{\varphi(N)} \leq \exp(\gamma) \log \log N + \frac{2,51}{\log \log N} \quad \text{pour } N \geq 3$$

$$N < 2,685 \cdot \varphi(N)^{1,161} \quad \text{pour tout } N.$$

On en déduit immédiatement que pour N entier on a:

$$N \leq 16 \cdot \varphi(N) \cdot \log \log N \quad \text{pour } N \geq 3,$$

$$N \leq 6,5 \cdot \varphi(N) \cdot \log \log N \quad \text{pour } N \geq 4,$$

$$0,4 \log N \leq \log \varphi(N) \quad \text{pour } N \geq 3,$$

$$0,5 \log N \leq \log \varphi(N) \quad \text{pour } N \geq 7.$$

(II.3) Fonction auxiliaire et polynômes auxiliaires

On suppose fixés l'entier $N \geq 1$ et le nombre algébrique ξ . On note alors $\theta_N = \exp(2\pi i/N)$. On se donne de plus un élément θ du corps de nombres $\mathbb{Q}(\xi, \theta_N, i)$, de degré D sur \mathbb{Q} , et deux entiers K, M plus grands que 1. Pour l'instant on ne fait pas d'hypothèse particulière sur θ .

On va travailler avec des polynômes de $\mathbb{Z}[X_1, X_2, X_3, X_4]$ qui seront spécialisés en $(\pi, i, \theta_N, \theta)$ ou $(\xi, i, \theta_N, \theta)$ uniquement.

Supposons avoir choisi une famille $\{P_{km}; 0 \leq k < K, 0 \leq m < M\}$ de polynômes de $\mathbb{Z}[X_4]$. On lui associe la fonction entière

$$F(z) := \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{m=0}^{M-1} P_{km}(\theta) \cdot \Delta_m(z) \cdot \exp(2\pi ikz).$$

Pour tout $t \in \mathbb{N}$ on a ainsi:

$$F^{(t)}(z) = \sum_{k < K} \sum_{m < M} \sum_{\tau=0}^{\min(m,t)} P_{km}(\theta) \cdot \binom{t}{\tau} \cdot \Delta_m^{(\tau)}(z) \cdot (2k\pi i)^{t-\tau} \cdot \exp(2\pi ikz).$$

On va utiliser ces dérivées en les points s/N avec $s \in \mathbb{N}$, tout comme N.I. Feldman [2].

Pour t, s fixés dans \mathbb{N} , on note $\delta(s, t)$ le dénominateur $\delta(s/N, M - 1, t)$ du Lemme 1; et on s'intéresse aux dérivées de F en s/N :

$$\delta(s, t) \cdot F^{(t)}\left(\frac{s}{N}\right) = \sum_{k < K} \sum_{m < M} \sum_{\tau=0}^{\min(m,t)} P_{km}(\theta) \cdot \frac{t!}{(t-\tau)!} \cdot \left(\frac{\delta(s, t)}{\tau!} \Delta_m^{(\tau)}\left(\frac{s}{N}\right)\right) \cdot (2k\pi i)^{t-\tau} \cdot \theta_N^{ks}. \tag{1}$$

On voit apparaître une expression polynômiale en θ, i, θ_N, π que l'on va expliciter. On note $n(ks)$ le reste de la division de ks par N et on définit les polynômes $R_{kmts} \in \mathbb{Z}[X_1, X_2, X_3]$, $Q_{ts} \in \mathbb{Z}[X_1, X_2, X_3, X_4]$:

$$R_{kmts}(X_1, X_2, X_3) := \sum_{\tau=0}^{\min(m,t)} \frac{t!}{(t-\tau)!} \cdot \left(\frac{\delta(s, t)}{\tau!} \Delta_m^{(\tau)}\left(\frac{s}{N}\right)\right) \cdot (2kX_1 X_2)^{t-\tau} \cdot X_3^{n(ks)},$$

$$Q_{ts}(X_1, X_2, X_3, X_4) := \sum_{k < K} \sum_{m < M} P_{km}(X_4) \cdot R_{kmts}(X_1, X_2, X_3).$$

La relation fondamentale (1) s'écrit alors pour tout $(t, s) \in \mathbb{N}^2$:

$$\delta(s, t) \cdot F^{(t)}\left(\frac{s}{N}\right) = Q_{ts}(\pi, i, \theta_N, \theta) \quad (1 \text{ bis}).$$

Il est clair que si les $P_{km}(\theta)$ sont tous nuls la fonction F est identiquement nulle et ne peut donc apporter aucune information. Pour que cela ne se produise pas il suffit d'imposer $\deg(P_{km}) < D$, ce que nous ferons par la suite; cette condition suffisante est-elle effectivement nécessaire? Peut-être pas, mais comment faire autrement?

Le paragraphe III contient la partie commune aux démonstrations des Théorèmes 1 et 2, qui sont respectivement achevées aux paragraphes IV et V.

III. Partie commune aux démonstrations des Théorèmes 1 et 2

On se donne dans toute la suite un nombre algébrique ξ et un entier $N \geq 1$; on suppose $|\pi - \xi| \leq 1$ (sinon le résultat est acquis). On note $\theta_N = \exp(2\pi i/N)$, $D_N = [\mathbb{Q}(\xi, \theta_N, i) : \mathbb{Q}]$. Dans ce paragraphe III on suppose de plus fixé un élément θ du corps de nombres $\mathbb{Q}(\xi, \theta_N, i)$, de degré noté D ; cet élément auxiliaire sera choisi différemment dans le Théorème 1 et dans le Théorème 2 (respectivement paragraphe IV et paragraphe V). Enfin, les paramètres de la construction transcendante seront les entiers K, M, T, S et les réels R, Δ, U , tous supposés plus grands que 1.

(III.1) Premier pas: la construction

On va utiliser pour faire cette construction un résultat général de M. Waldschmidt [12, Théorème 3.1] qui permet d'obtenir d'un seul coup la construction et l'extrapolation. L'objectif est de construire une famille de polynômes de $\mathbb{Z}[X_4]$, non tous nuls, de degré strictement plus petit que D , $\{P_{km}; 0 \leq k < K, 0 \leq m < M\}$, telle que la fonction F (cf II-3) soit "petite" sur un certain disque $|z| \leq r$; précisément on veut que ce disque contienne chaque point $s/N (s \in \mathbb{N}, 0 \leq s < S)$ ainsi que le disque de rayon 1 centré en s/N , et on prend donc $r := S/N + 1$.

En notant $P_{km}(X_4) = \sum_{d=0}^{D-1} p_{kmd} \cdot X_4^d$, la fonction F s'écrit:

$$\begin{cases} F(z) = \sum_{k < K} \sum_{m < M} \sum_{d < D} p_{kmd} \cdot \varphi_{kmd}(z) \\ \varphi_{kmd}(z) := \theta^d \cdot \Delta_m(z) \cdot \exp(2\pi i k z). \end{cases}$$

Il faut d'abord estimer $\sum_{k,m,d} |\varphi_{kmd}|_R$ (où l'on note $|f|_R = \sup_{|z|=R} |f(z)|$ pour la fonction entière f). Soit donc $z \in \mathbb{C}$, avec $|z| = R$. On a: $|\varphi_{kmd}(z)| \leq \max(1, |\theta|)^D \cdot |\Delta_m(z)| \cdot \exp(|2k\pi z|)$. Comme $|\Delta_m(z)| \leq \Delta_m(|z|) \leq \Delta_m([\lceil |z| \rceil] + 1)$ et que cette dernière quantité est le coefficient binômiale $\binom{m + \lceil |z| \rceil + 1}{m}$ on peut majorer par $2^{m+1 + \lceil |z| \rceil}$; comme $m + 1 \leq M, \lceil |z| \rceil \leq R$ on a finalement

$$|\varphi_{kmd}|_R \leq \max(1, |\theta|)^D \cdot \exp(M + R) \cdot \exp(2K\pi R),$$

et donc

$$\sum_{k,m,d} |\varphi_{kmd}|_R \leq \exp(\log D + D \log \max(1, |\theta|) + 9(M + KR)).$$

Pour pouvoir appliquer le résultat de M. Waldschmidt on impose aux

paramètres une première famille de contraintes:

- (C1) $3 \leq U; \Delta \leq U; e \leq R/r \leq e^U$
- (C2) $\log D + D \log \max(1, |\theta|) + 9(M + KR) \leq U$
- (C3) $64U^2 \leq K.M.D.\Delta. \log(R/r).$

Le Théorème 3.1 de [12] permet d'affirmer qu'il existe une famille d'entiers rationnels non tous nuls $\{p_{kmd}; 0 \leq k < K, 0 \leq m < M, 0 \leq d < D\}$ qui, avec les notations antérieures, vérifie:

$$* \log \max_{k,m} H(P_{km}) \leq \Delta \tag{2}$$

$$* |F|_r \leq \exp(-U). \tag{3}$$

Conséquence 1. Majoration de $|Q_{ts}(\pi, i, \theta_N, \theta)|$.

Soient t, s des entiers avec $0 \leq t < T, 0 \leq s < S$. Par les formules de Cauchy on a

$$\left| F^{(t)}\left(\frac{s}{N}\right) \right| \leq t! |F|_r \leq T^T \cdot \exp(-U).$$

Le Lemme 1 permet de dire que $\log \delta(s, t)$ est majoré par $21M \log(eTN)$; et donc la relation fondamentale (1bis) donne

$$|Q_{ts}(\pi, i, \theta_N, \theta)| \leq \exp(-U + T \log T + 21M \log(eTN)). \tag{4}$$

Majoration de la longueur des polynômes $Q_{ts}(t < T, s < S)$

Rappelons que $Q_{ts}(X_1, X_2, X_3, X_4) = \sum_{k < K} \sum_{m < M} P_{km}(X_4) \cdot R_{kmts}(X_1, X_2, X_3)$. En notant $L(P)$ la longueur du polynôme P (somme des modules de ses coefficients) il est immédiat que

$$L(Q_{ts}) \leq \sum_{k < K} \sum_{m < M} L(P_{km}) \cdot L(R_{kmts}).$$

En tenant compte de (2), $L(P_{km})$ est majoré par $D \exp(\Delta)$. En revenant à la définition de R_{kmts} on a

$$L(R_{kmts}) \leq \sum_{\tau=0}^{\min(m,t)} \frac{t!}{(t-\tau)!} \left| \frac{\delta(s, t)}{\tau!} \Delta_m^{(\tau)}\left(\frac{s}{N}\right) \right| \cdot (2k)^{t-\tau}.$$

On a $t!(t-\tau)! \leq t^\tau < T^M$, et en utilisant le Lemme 1

$$\log \left| \frac{\delta(s, t)}{\tau!} \Delta_m^{(s)} \left(\frac{s}{N} \right) \right| \leq 21M \log(eTN) + 3M + M \log \left(1 + \frac{S}{NM} \right).$$

D'où finalement pour $t < T, s < S$:

$$\begin{cases} L(R_{kmts}) \leq \exp(T \log eK + 26M \log eTN(1 + S/NM)) \\ L(Q_{ts}) \leq \exp(\log D + \Delta + 2T \log eK + 27M \log eTN(1 + S/NM)). \end{cases} \quad (5)$$

Conséquence 2. Majoration de $|Q_{ts}(\xi, i, \theta_N, \theta)|$ ($t < T, s < S$)

En revenant à la définition de Q_{ts}

$$\begin{aligned} Q_{ts}(\xi, i, \theta_N, \theta) &= \sum_{k,m} P_{km}(\theta) \cdot R_{kmts}(\xi, i, \theta_N) \\ &= \sum_{k,m} P_{km}(\theta) \cdot R_{kmts}(\pi, i, \theta_N) + \sum_{k,m} P_{km}(\theta) \cdot (R_{kmts}(\xi, i, \theta_N) - \\ &\quad - R_{kmts}(\pi, i, \theta_N)) \\ &= Q_{ts}(\pi, i, \theta_N, \theta) + \sum_{k,m} P_{km}(\theta) \cdot (R_{kmts}(\xi, i, \theta_N) - \\ &\quad - R_{kmts}(\pi, i, \theta_N)). \end{aligned}$$

Et donc

$$|Q_{ts}(\xi, i, \theta_N, \theta)| \leq |Q_{ts}(\pi, i, \theta_N, \theta)| + \sum_{k,m} |P_{km}(\theta)| \cdot |R_{kmts}(\xi, i, \theta_N) - R_{kmts}(\pi, i, \theta_N)|.$$

On a majoré le premier terme à droite, en (4). Pour majorer le second on utilise le lemme suivant

LEMME 2 [3, Lemme 3]. Soient $R \in \mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]$ et $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)$ dans \mathbb{C}^3 .

En posant $A_j = \max(1, |x_j|, |y_j|)$, et en notant d_j le degré en X_j de R on a

$$|R(x_1, x_2, x_3) - R(y_1, y_2, y_3)| \leq 3 \max_j |x_j - y_j| \cdot L(R) \cdot \prod_{j=1}^3 (d_j \cdot A_j^{d_j}).$$

En notant que pour $t < T$ les degrés partiels de R_{kmts} sont majorés strictement par T, T, N respectivement et en tenant compte de (5) et de l'hypothèse $|\pi - \xi| \leq 1$, ce

lemme donne

$$\begin{aligned}
 & |R_{kmts}(\xi, i, \theta_N) - R_{kmts}(\pi, i, \theta_N)| \\
 & \leq 3|\pi - \xi| \cdot L(R_{kmts}) \cdot (T^2 N) \cdot \max(\pi, |\xi|)^T \\
 & \leq 3|\pi - \xi| \cdot (1 + \pi)^T \cdot (T^2 N) \cdot \exp(T \log eK + 26M \log eTN(1 + S/NM)) \\
 & \leq |\pi - \xi| \exp(6T \log eK + 27M \log eTN(1 + S/NM)).
 \end{aligned}$$

D'autre part grace à (2) on a $|P_{km}(\theta)| \leq D \exp(\Delta) \cdot \max(1, |\theta|)^D$. D'où

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k < K} \sum_{m < M} |P_{km}(\theta)| \cdot |R_{kmts}(\xi, i, \theta_N) - R_{kmts}(\pi, i, \theta_N)| \\
 & \leq |\pi - \xi| \cdot \exp(\Delta + \log D + D \log \max(1, |\theta|) + 7T \log eK \\
 & + 28M \log eTN(1 + S/NM)).
 \end{aligned}$$

Au total en tenant compte de (4) on a ainsi obtenu la majoration désirée:

$$\begin{aligned}
 |Q_{ts}(\xi, i, \theta_N, \theta)| & \leq \exp(-U + T \log T + 21M \log eTN) \\
 & + |\pi - \xi| \cdot \exp(\Delta + \log D + D \log \max(1, |\theta|) + 7T \log eK + \\
 & + 28M \log eTN(1 + S/NM)).
 \end{aligned} \tag{6}$$

Ceci termine le premier pas.

(III.2) *Second pas – Le lemme de zéros*

L'objectif est ici de trouver des conditions suffisantes, portant sur les paramètres, permettant d'affirmer que les nombres algébriques $Q_{ts}(\xi, i, \theta_N, \theta)$ ($0 \leq t < T$, $0 \leq s < S$) ne sont pas tous nuls. On va, en utilisant le lemme de zéros général de P. Philippon [7], démontrer le lemme suivant

Lemme 3. Dès que les paramètres vérifient les contraintes

- (C4) $T \geq 3; S \geq 4; N \leq [S/2]$
- (C5) $TS \geq 24MK$
- (C6) $TN \geq 6K$

un des nombres $Q_{ts}(\xi, i, \theta_N, \theta)$ ($0 \leq t < T, 0 \leq s < S$) est non nul.

Le reste de ce second pas est consacré à la démonstration de ce lemme. On suppose que (C4) est vérifiée et que les $Q_{ts}(\xi, i, \theta_N, \theta)$ sont nuls pour tous les couples (t, s) avec $0 \leq t < T, 0 \leq s < S$. Et on va montrer que l'on a soit $TS < 24MK$, soit $TN < 6K$.

Soit $P(Y_1, Y_2) := \sum_{k < K} \sum_{m < M} P_{km}(\theta) \cdot \Delta_m(Y_1) \cdot Y_2^k$; puisque par construction les $P_{km}(\theta)$ ne sont pas tous nuls ce polynôme n'est pas nul. Introduisons maintenant les acteurs géométriques; on notera G_a le groupe additif $(\mathbb{C}, +)$, G_m le groupe multiplicatif (\mathbb{C}^*, \times) et:

- * $(G, +)$ est le groupe algébrique $G_a \times G_m$, \exp_G son exponentielle;
- * $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow G(\mathbb{C})$ est donnée par $\varphi(z) := \exp_G(z, 2i\xi z) = (z, \exp(2i\xi z))$;
- * $\mathcal{L}: \mathbb{C} \rightarrow T_G(\mathbb{C})$ est l'application linéaire $\mathcal{L}(z) := z(1, 2i\xi)$;
- * on voit que $\varphi = \exp_G \circ \mathcal{L}$; on pose $W := \text{Im}(\mathcal{L})$, $A := \text{Im}(\varphi) = \exp_G(W)$;
- * pour $s \in \mathbb{N}$, g_s est le point $\exp_G\left(\frac{s}{N}, \frac{2i\pi s}{N}\right)$ ie $\left(\frac{s}{N}, \theta_N^s\right)$.

Soit s un entier, $0 \leq s < S$; on lui associe la fonction entière $\phi_s(z) := P(g_s + \varphi(z))$.
 Montrons que pour tout entier t on a:

$$\delta(s, t) \cdot \phi_s^{(t)}(0) = Q_{ts}(\xi, i, \theta_N, \theta).$$

C'est un vérification sans problème:

$$\phi_s(z) = \sum_{k,m} P_{km}(\theta) \cdot \Delta_m\left(\frac{s}{N} + z\right) \cdot \theta_N^{ks} \cdot \exp(2ki\xi z)$$

$$\phi_s^{(t)}(z) = \sum_{k,m} \sum_{\tau=0}^{\min(m,t)} P_{km}(\theta) \cdot \binom{t}{\tau} \cdot \Delta_m^{(\tau)}\left(\frac{s}{N} + z\right) \cdot \theta_N^{ks} \cdot (2ki\xi)^{t-\tau} \cdot \exp(2ki\xi z)$$

$$\phi_s^{(t)}(0) = \sum_{k,m} \sum_{\tau=0}^{\min(m,t)} P_{km}(\theta) \cdot \binom{t}{\tau} \cdot \Delta_m^{(\tau)}\left(\frac{s}{N}\right) \cdot \theta_N^{ks} \cdot (2ki\xi)^{t-\tau}$$

$$\delta(s, t) \cdot \phi_s^{(t)}(0) = \sum_{k,m} P_{km}(\theta) \left(\sum_{\tau=0}^{\min(m,t)} \frac{t!}{(t-\tau)!} \left(\frac{\delta(s, t)}{\tau!} \cdot \Delta_m^{(\tau)}\left(\frac{s}{N}\right) \right) \cdot \theta_N^{ks} \cdot (2ki\xi)^{t-\tau} \right)$$

c'est-à-dire $\delta(s, t) \cdot \phi_s^{(t)}(0) = \sum_{k,m} P_{km}(\theta) \cdot R_{kmts}(\xi, i, \theta_N) = Q_{ts}(\xi, i, \theta_N, \theta)$.

L'hypothèse que les $Q_{ts}(\xi, i, \theta_N, \theta)$ sont nuls permet de dire que ϕ_s admet 0 comme zéro d'ordre supérieur ou égal à T , ce qui veut dire dans le langage de P. Philippon que le polynôme P s'annule le long de φ à un ordre supérieur ou égal à T en tout point g_s , $0 \leq s < S$. Soit T' l'entier vérifiant $2T' + 1 \leq T < 2T' + 3$ et $\Sigma := \{g_s; 0 \leq s < [S/2]\}$; on a alors $\Sigma(2) \subset \{g_s; 0 \leq s < S\}$, où $\Sigma(2)$ est constituée de toutes les sommes de deux éléments de Σ . Ainsi le polynôme P s'annule le long de φ à un ordre supérieur ou égal à $(2T' + 1)$ en tout point de $\Sigma(2)$; par le lemme de zéros de P. Philippon [7, Théorème 2.1] il existe un sous-groupe algébrique

connexe H de G , distinct de G (donc de l'une des formes $\{0\} \times G_m, \{0\} \times \{1\}, G_a \times \{1\}$), tel que:

$$\left\{ \begin{array}{l} (T' + \text{codim}_A(A \cap H)) \cdot \text{card}(\Sigma + H/H) \leq 2 \cdot M^{r_0} \cdot K^{r_1} \\ \text{codim}_A(A \cap H) \end{array} \right. \quad (*)$$

(où $H = H_a \times H_m, r_0 = \dim(G_a/H_a), r_1 = \dim(G_m/H_m)$).

Rappelons que $\text{codim}_A(A \cap H) = \text{codim}_W(W \cap T_H(\mathbb{C})) = 1 - \dim(W \cap T_H(\mathbb{C}))$.
On distingue maintenant trois cas suivant la forme de H .

Cas 1. H est réduit à l'élément neutre

On a alors $r_0 = r_1 = 1, \text{codim}_A(A \cap H) = 1, \text{card}(\Sigma + H/H) = \text{card } \Sigma = [S/2]$.
Donc (*) donne $(T' + 1) \cdot [S/2] \leq 2MK$. Grâce à (E4) on a $(1 + T') > T/3, [S/2] \geq S/4$, ce qui donne $TS < 24MK$.

Cas 2. H = {0} x G_m

Alors $T_H(\mathbb{C}) = \{0\} \times \mathbb{C}$ et donc $W \cap T_H(\mathbb{C}) = \{0\}$, $\text{codim}_A(A \cap H) = 1$; de plus $r_0 = 1, r_1 = 0$. Deux éléments de Σ sont congrus modulo H si et seulement si ils coïncident, et donc $\text{card}(\Sigma + H/H) = \text{card } \Sigma = [S/2]$. Alors (*) donne $(T' + 1) \cdot [S/2] \leq 2M$ et a fortiori $TS < 24MK$.

Cas 3. H = G_a x {1}

Comme on a supposé $|\pi - \xi| \leq 1, \xi$ est non nul et donc $W \cap T_H(\mathbb{C}) = \{0\}$ (puisque $T_H(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \times \{0\}, W = \mathbb{C}(1, 2i\xi)$). On a donc $\text{codim}_A(A \cap H) = 1, r_0 = 0, r_1 = 1$. Soient g_{s_1}, g_{s_2} deux éléments de Σ congrus modulo $H; g_{s_1} - g_{s_2}$ est dans H , ce qui donne sur la deuxième composante: $\theta_N^{s_1 - s_2} = 1$; si on suppose $0 \leq s_1, s_2 < N$ ceci implique $s_1 = s_2$. Comme on a supposé $N \leq [S/2]$ les points g_0, g_1, \dots, g_{N-1} sont dans Σ et distincts modulo H par ce qui précède; on peut donc minorer $\text{card}(\Sigma + H/H)$ par N . Alors (*) donne $(T' + 1) \cdot N \leq 2K$, et en minorant $(T' + 1)$ par $T/3$ il vient $T \cdot N \leq 6K$.

On a bien montré que soit $TS < 24MK$, soit $TN < 6K$. Ceci termine le second pas.

(III.3) Troisième pas – Minoration de |Q_ts(ξ, i, θ_N, θ)| et bilan.

On fixe un couple (t, s) , avec $0 \leq t < T, 0 \leq s < S$, pour lequel $Q_{ts}(\xi, i, \theta_N, \theta)$ soit non nul. On sait minorer le module de ce nombre algébrique à l'aide du théorème de Liouville suivant.

LEMME 4 [11 – Lemme 2.2]. Soit $Q \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ et $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ des nombres algébriques d'un corps de nombres de degré d . Si $Q(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est non nul, alors:

$$\log|Q(\alpha_1, \dots, \alpha_n)| \geq -d \cdot \log L(Q) - d \sum_{j=1}^n (\deg_{X_j} Q \cdot h(\alpha_j)).$$

En prenant $\mathbb{Q}(\xi, i, \theta_N)$ comme corps de nombres, corps dont le degré est D_N , et en notant que $h(i) = h(\theta_N) = 0$ ce lemme donne ici:

$$\log|Q_{ts}(\xi, i, \theta_N, \theta)| \geq -D_N \cdot \log L(Q_{ts}) - D_N \cdot \deg_{X_1} Q_{ts} \cdot h(\xi) - D_N \cdot \deg_{X_4} Q_{ts} \cdot h(\theta).$$

En tenant compte de $\deg_{X_1} Q_{ts} < T$, $\deg_{X_4} Q_{ts} < D$ et de la majoration (5) de $L(Q_{ts})$ ceci s'écrit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \log|Q_{ts}(\xi, i, \theta_N, \theta)| \geq -A \\ \text{où } A := D_N(\log D + \Delta + 2T \log eK + 27M \log eTN(1 + S/NM)) + \\ \quad + D_N(T \cdot h(\xi) + D \cdot h(\theta)). \end{array} \right. \quad (7)$$

En rapprochant la majoration (6) et la minoration (7) de $|Q_{ts}(\xi, i, \theta_N, \theta)|$ on obtient l'inégalité qui va nous permettre de conclure:

$$\begin{aligned} \exp(-A) &\leq \exp(-U + T \log T + 21M \log eTN) + \\ &\quad + |\pi - \xi| \cdot \exp(\Delta + \log D + D \log \max(1, |\theta|) + 7T \log eK + \\ &\quad + 28M \log eTN(1 + S/NM)). \end{aligned}$$

On impose alors les trois dernières contraintes

- (C7) $2(T \log T + 21M \log eTN) \leq U$
- (C8) $\log 4 + 2A \leq U$
- (C9) $\Delta + \log D + D \log \max(1, |\theta|) + 7T \log eK + 28M \log eTN(1 + S/NM) \leq U.$

Ce qui permet d'obtenir la minoration cherchée:

$$|\pi - \xi| \geq \exp(-3U/2). \quad (8)$$

Ici se termine la partie commune aux théorèmes 1 et 2, et on va conclure les démonstrations séparément.

IV. Fin de la démonstration du Théorème 1

On suppose donc maintenant que ξ est dans $\mathbf{Q}(i, \theta_N)$, si bien que D_N est simplement égal à $[\mathbf{Q}(i, \theta_N): \mathbf{Q}]$. En conséquence on a $\max(2; \varphi(N)) \leq D_N \leq 2\varphi(N) \leq 2N$. On suppose simplement $N \geq 1$; les propriétés de φ rappelées au paragraphe II-2 permettent de vérifier qu'alors:

$$0,4 \log N \leq \log D_N, \quad N \leq 7 \cdot D_N \cdot \log D_N.$$

On applique la construction du paragraphe III au couple $(\theta, D) = (\theta_N, \varphi(N))$; les contraintes qui dépendent de θ s'écrivent:

- (C2) $\log \varphi(N) + 9(M + KR) \leq U$
- (C3) $64U^2 \leq K \cdot M \cdot \varphi(N) \cdot \Delta \cdot \log(R/r)$
- (C9) $\Delta + \log \varphi(N) + 7T \log eK + 28M \log eTN(1 + S/NM) \leq U$.

De plus en tenant compte de $h(\theta) = 0$, A s'écrit:

$$A = D_N(\log \varphi(N) + \Delta + 2T \log eK + 27M \log eTN(1 + S/NM)) + D_N \cdot T \cdot h(\xi).$$

Il reste alors à choisir (au mieux) les paramètres en fonction de $N, h(\xi), D_N$. On prend ici:

$$T := \left[x^{3,5} \cdot \frac{D_N}{N} \cdot \log D_N \right]; \quad K := [x^{1,5} \cdot D_N \cdot \log D_N];$$

$$S := [x^2 \cdot D_N \cdot (h(\xi) + \log D_N)]; \quad M := \left[x^{3,5} \cdot \frac{D_N}{N} \cdot (h(\xi) + \log D_N) \right];$$

$$R := x^{2,5} \cdot \frac{D_N}{N} \cdot (h(\xi) + \log D_N); \quad \Delta := \frac{1}{2} x^{4,5} \cdot \frac{D_N}{N} \cdot (h(\xi) + \log D_N) \cdot \log D_N;$$

$$U := x^{4,5} \cdot \frac{D_N^2}{N} \cdot (h(\xi) + \log D_N) \cdot \log D_N.$$

En choisissant la constante x assez grande on vérifie que les contraintes (C1) à (C9) sont satisfaites; (8) donne alors la mesure annoncée, ce qui termine la démonstration du Théorème 1.

Une estimation assez grossière donne pour la constante c_0 de ce théorème un ordre de grandeur de 10^{23} , alors que M. Waldschmidt a 2^{40} ; il semble possible cependant d'abaisser nettement cette valeur.

V. Fin de la démonstration du théorème 2

On va prendre ici pour θ un élément primitif du corps de nombres $\mathbf{Q}(i, \xi, \theta_N)$, et donc on aura $D = D_N$. Comme on a besoin d'estimer $h(\theta)$ il faut un choix effectif; on utilise pour cela [5, Lemme 3] qui permet d'affirmer qu'il existe un élément primitif de la forme $\theta = \xi + \alpha\theta_N + \beta i$, α, β entiers et $0 \leq \alpha, \beta \leq D_N^2/2$. Les propriétés de la hauteur logarithmique absolue h (cf[11] par exemple) permettent de vérifier qu'alors $h(\theta) \leq h(\xi) + 4 \log D_N$. On suppose $N \geq 2$ dans la suite; en utilisant l'hypothèse $|\pi - \xi| \leq 1$ et le fait que D_N est plus grand que 2 on a alors: $|\theta| \leq 3D_N^2 \leq D_N^4$; et on vérifie que $4 \log N \leq 10 \log D_N$, $N \leq 7D_N \log D_N$.

Ceci permet de réécrire les contraintes qui dépendaient du couple (θ, D) dans la construction générale du paragraphe III:

- (C2) $9(D_N \log D_N + M + KR) \leq U$
- (C3) $64U^2 \leq K \cdot M \cdot D_N \cdot \Delta \cdot \log(R/r)$
- (C9) $\Delta + 8D_N \log D_N + 7T \log eK + 28M \log eTN(1 + S/NM) \leq U$.

Et l'expression de A est ici:

$$A = D_N(\log D_N + \Delta + 2T \log eK + 27M \log eTN(1 + S/NM)) \\ + D_N \cdot T \cdot h(\xi) + D_N^2 \cdot h(\xi) + 4D_N^2 \cdot \log D_N.$$

On peut alors trouver une constante positive x telle que les paramètres suivants satisfassent les 9 contraintes (C1) à (C9), quel que soit N plus grand que 2 (vérification laissée au lecteur):

$$T := \left[x^{3,5} \cdot \frac{D_N \log D_N}{\log N} \right]; \quad K := \left[x^{1,5} \cdot D_N \cdot \log D_N \right];$$

$$S := \left[x^2 \cdot D_N(h(\xi) + \log D_N) \right]; \quad M := \left[x^{3,5} \cdot \frac{D_N(h(\xi) + \log D_N)}{\log N} \right];$$

$$R := x^{2,5} \cdot \frac{D_N(h(\xi) + \log D_N)}{\log N}; \quad \Delta := \frac{1}{5}x^{4,5} \cdot D_N(h(\xi) + \log D_N) \frac{\log D_N}{\log N};$$

$$U := x^{4,5} \cdot D_N^2(h(\xi) + \log D_N) \frac{\log D_N}{\log N}.$$

Compte-tenu de (8) cela fournit la mesure annoncée dans le Théorème 2. Notons que la qualité de la mesure finale est pratiquement donnée par l'expression A : celle-ci montre qu'il y aura nécessairement du $D_N^2(h(\xi) + \log D_N)$! Dans la mesure finale on a seulement ajouté le facteur $\log D_N/\log N$.

References

- [1] Cijsouw, P. L., A transcendence measure for π , in “*Transcendence Theory: Advances and Applications*” (edited by A. Baker, D. W. Masser), Academic Press, 1977, 93–100.
- [2] Feldman, N. I., Approximation of number π by algebraic numbers from special fields. *J. Number Theory* 9 (1977) 48–60.
- [3] Mignotte, M. et Waldschmidt, M., Approximation des valeurs de fonctions transcendentes. *Indag. Math.* 37(1975) 213–223.
- [4] Mignotte, M. et Waldschmidt, M., Approximation simultanée de valeurs de la fonction exponentielle. *Compositio Math.* 34 (1977) 127–139.
- [5] Mignotte, M. et Waldschmidt, M.: Linear forms in two logarithms and Schneider’s method III. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* (à paraître).
- [6] Philippon, P., Polynôme d’interpolation sur \mathbb{Z} et $\mathbb{Z}[i]$. *Actes du colloque A. Durand (I.H.P. 1988)* (à paraître).
- [7] Philippon, P., Lemmes de zéros dans les groupes algébriques commutatifs. *Bull. Soc. Math. France* 114(1986) 355–383.
- [8] Rosser, J. B. et Schoenfeld, L., Sharper bounds for the Chebyshev functions $\theta(x)$, $\varphi(x)$. *Math. Comp.* 29(1975) 243–269.
- [9] Waldschmidt, M., *Nombres transcendants*. Lecture Notes in Math. 402, Springer, 1974.
- [10] Waldschmidt, M., Transcendence measures for exponentials and logarithms. *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, 25(1978)445–465.
- [11] Waldschmidt, M., A lower bound for linear forms in logarithms. *Acta Arith.* 37(1980) 257–283.
- [12] Waldschmidt, M., Transcendance et exponentielles en plusieurs variables. *Invent. Math.* 63 (1981) 97–127.