

# COMPOSITIO MATHEMATICA

RACHID FAHLAOUI

YVES LASZLO

## **Transformée de Fourier et stabilité sur les surfaces abéliennes**

*Compositio Mathematica*, tome 79, n° 3 (1991), p. 271-278

[http://www.numdam.org/item?id=CM\\_1991\\_\\_79\\_3\\_271\\_0](http://www.numdam.org/item?id=CM_1991__79_3_271_0)

© Foundation Compositio Mathematica, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## Transformée de Fourier et stabilité sur les surfaces abéliennes

RACHID FAHLAOUI et YVES LASZLO

Université Paris-Sud, URA D.072 du CNRS, 91405 Orsay Cedex, France

Received 12 June 1990; accepted 22 November 1990

### 1. Introduction

Mukai a défini dans toute sa généralité la transformée de Fourier de  $\mathcal{D}(X)$  dans  $\mathcal{D}(\hat{X})$ ,  $X$  étant une variété abélienne, qui s'est révélée posséder des propriétés remarquables: on dispose des analogues de la formule d'inversion, de la dualité entre convolution et produit ordinaire.

Dans certains cas, la transformée de Fourier d'un faisceau est encore un faisceau: on prouve ici que la transformée de Fourier d'un fibré vectoriel stable de rang  $> 1$  et de première classe de Chern nulle est encore un fibré vectoriel de première classe de Chern nulle de rang  $> 1$ , qui est *stable*.

Ceci donne donc des isomorphismes entre espaces de modules de fibrés stables de rangs variés.

Nous tenons à remercier Arnaud Beauville de nous avoir suggéré de regarder ce problème ainsi que d'avoir lu une première version de ce travail, ce qui a permis de l'alléger sensiblement.

#### 2.1. Notations et conventions

$X$  est une surface abélienne sur un corps  $k$  algébriquement clos, et  $\hat{X}$  est sa duale. On note  $p$  (resp.  $q$ ) la projection de  $X \times \hat{X}$  sur  $X$  (resp.  $\hat{X}$ ).

Dans ce qui suit faisceau sous-entend toujours faisceau cohérent.  $\mathcal{D}(X)$  est la catégorie dérivée des  $\mathcal{O}_X$ -modules cohérents. Si  $E$  est un complexe, on note  $E[i]$  le complexe décalé:  $E[i]_n = E_{i+n}$ . On identifie un faisceau  $E$  au complexe, encore noté  $E$ , réduit à  $E$  en degré 0 et à 0 ailleurs. On note  $\mathcal{P}$  le fibré de Poincaré sur  $X \times \hat{X}$  normalisé, c'est-à-dire trivial sur  $X \times 0$  et  $0 \times \hat{X}$ .

On dira qu'un sous-faisceau  $F$  d'un faisceau localement libre  $E$  est un *sous-fibré* de  $E$  si le conoyau de  $F \rightarrow E$  est *sans torsion*. On utilisera souvent qu'un *sous-fibré de  $E$  est localement libre*, (ceci car  $\dim(X) = 2$ ).

#### 1.2. Rappels sur la transformée de Fourier: (cf [M1] et [M2])

La transformée de Fourier  $\mathcal{F}$  est définie comme le foncteur:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(X) &\rightarrow \mathcal{D}(\hat{X}) \\ E &\rightarrow \mathcal{F}E = Rq_*(\mathcal{P} \otimes p^*E). \end{aligned}$$

On définirait de même  $\hat{\mathcal{F}}$  de  $\mathcal{D}(\hat{X})$  dans  $\mathcal{D}(X)$ . On notera  $\mathcal{F}^i E$  les faisceaux de cohomologie de ce complexe.

On a une formule d'inversion:  $\hat{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F}(?) = (-1_X)^*?[-2]$  et de même  $\mathcal{F} \circ \hat{\mathcal{F}}(?) = (-1_{\hat{X}})^*?[-2]$ .

Suivant [M1], on dit qu'un faisceau cohérent non nul  $E$  est W.I.T.<sub>*i*</sub> si  $\mathcal{F}^j E = 0$  sauf si  $j = i$ . Dans ce cas,  $\mathcal{F}E$  est un faisceau  $\hat{E}$  placé en degré  $i$ . Notons que la formule d'inversion entraîne que  $E$  est W.I.T.<sub>*i*</sub> si et seulement si  $\hat{E}$  est W.I.T.<sub>*2-i*</sub>. On a une définition analogue sur  $\hat{X}$ .

On dit qu'un faisceau sur  $X$  est I.T.<sub>*i*</sub> si  $H^j(X, P \otimes E) = 0$  pour tout  $P$  de  $\text{Pic}^0(X)$  sauf pour  $j = i$ . On a une définition analogue sur  $\hat{X}$ . Le théorème de changement de base (cf. [H]) assure que I.T.<sub>*i*</sub> entraîne W.I.T.<sub>*i*</sub> et que  $\hat{E}$  est localement libre.

Soit  $H$  un diviseur ample sur  $X$ . Le fibré  $\mathcal{O}_X(H)$  est I.T.<sub>0</sub>: on note  $\hat{H} = -c_1(\mathcal{F}H)$ . D'après [M2], si  $\phi_H: X \rightarrow \hat{X}$  désigne l'isogénie définie par  $H$ , on sait que:

$\phi_H^*(\mathcal{F}H) = \mathcal{O}_X(-H)^{\oplus \chi(H)}$  et donc,  $-c_1(\phi_H^*(\mathcal{F}H)) = \phi_H^*(\hat{H}) = \chi(H) \cdot c_1(H)$  ce qui assure que  $\hat{H}$  est ample et donc définit une polarisation sur  $\hat{X}$ .

Ceci permet de définir le degré d'un faisceau  $E$  sur  $X$ :  $\text{deg}(E) = c_1(E) \cdot H$ . On a une définition analogue sur  $\hat{X}$  (relativement à  $\hat{H}$ ). Lorsque  $k = \mathbb{C}$ , on sait que la transformée de Fourier respecte le degré [M1]: plus généralement, on a le

LEMME 1. Soit  $F$  un faisceau W.I.T.<sub>1</sub> sur  $X$ ; alors, on a:

- (i)  $\text{deg}(F) = \text{deg}(\hat{F})$ .
- (ii)  $c_1(F) = 0$  si et seulement si  $c_1(\hat{F}) = 0$

*Preuve.* Désignons par  $l$  la classe de Chern de  $\mathcal{P}$  dans  $\text{Ch}^2(X \times \hat{X}) \otimes \mathbb{Q}$ ,  $\text{Ch}^*$  designant l'anneau de Chow modulo équivalence algébrique gradué par la codimension; par le théorème de Riemann-Roch, on déduit que:

$$-ch(\mathcal{F}^1 F) = p_*(e^! \cdot q^*ch(F))$$

Cette formule, joint au fait que  $c_1(\mathcal{O}_X) = 0$ , prouve (ii). En utilisant le fait que la transformée de Fourier définie au niveau de  $\text{Ch}(X) \otimes \mathbb{Q}$  par la formule précédente transforme le produit de Pontryagin en le produit d'intersection (cf. [B]), et que le degré du produit de Pontryagin de deux diviseurs sur une surface abélienne est simplement leur produit d'intersection, on déduit:

$$\text{deg}(\hat{F}) = \text{deg}(F).$$

□

**2. Le théorème**

**DÉFINITION 1.** Soit  $E$  un faisceau sur une surface  $Y$  munie de la classe d'un diviseur ample  $D$ .

On note  $\mu(E)$  l'entier

$$\mu(E) = \frac{c(E)_1 \cdot D}{\text{rang}(E)}$$

$E$  est dit  $D$ -stable (resp.  $D$ -semi-stable) si et seulement si on a :

- (i)  $E$  est sans torsion.
- (ii) pour tout sous-faisceau propre  $F$  de  $E$  on a :

$$\mu(F) < \mu(E) \quad (\text{resp. } \mu(F) \leq \mu(E)).$$

**THÉORÈME.** Si  $E$  est un faisceau localement libre de rang  $> 1$  sur  $X$  stable, avec  $c_1(E) = 0$ , alors :

- (i)  $E$  est I.T.<sub>1</sub> et  $\hat{E}$  est localement libre de rang  $> 1$  avec  $c_1(E) = 0$ .
- (ii)  $E$  est  $H$ -stable si et seulement si  $\hat{E}$  est  $\hat{H}$ -stable.

*Preuve de (i).* Un faisceau stable de rang  $> 1$  n'admettant pas de section non nulle, les espaces  $H^0(X, E \otimes P)$  et  $H^2(X, E \otimes P)$  sont nuls pour tout  $P$  de  $\text{Pic}^0(X)$ . Le théorème de changement de base assure que  $\hat{E}$  est localement libre.

Si  $\hat{E}$  était de rang 1, le lemme 1 assurant que  $c_1(\hat{E}) = 0$ ,  $\hat{E}$  serait dans  $\text{Pic}^0(\hat{X})$ ; d'après [M1],  $\mathcal{F}\hat{E}$  et donc  $E$  seraient de torsion, ce qui n'est pas. □

*Preuve de (ii).* Rappelons que  $\text{deg}(\hat{E}) = 0$ : si  $\hat{E}$  n'est pas stable, il existe un quotient non nul sans torsion de  $\hat{E}$  de degré  $\leq 0$  et de rang strictement inférieur au rang de  $\hat{E}$ . Soit  $d$  le minimum des degrés de tels quotients. Parmi ces quotients de degré  $d$ , choisissons-en un  $G$  de rang minimal.

Soit  $F$  le noyau de  $\hat{E} \rightarrow G$ . Le degré de  $F$  est maximal parmi les degrés des sous-fibrés de  $\hat{E}$ .

**LEMME 2.**  $G$  est I.T.<sub>1</sub>.

*Preuve du lemme.* On a une suite exacte :

$$(SE) 0 \rightarrow F \rightarrow \hat{E} \rightarrow G \rightarrow 0$$

qui donne une suite exacte longue de cohomologie :

$$\rightarrow \mathcal{F}^2 \hat{E} \rightarrow \mathcal{F}^2 G \rightarrow 0, \text{ or } \mathcal{F}^2 \hat{E} = 0 \text{ et donc } \mathcal{F}^2 G = 0.$$

Le théorème de changement de base assure la nullité de  $H^2(X, G \otimes P) = 0$  pour

tout  $P$  de  $\text{Pic}^0(X)$ . Il suffit donc de prouver:  $H^0(X, G \otimes P) = 0$  pour tout  $P$  de  $\text{Pic}^0(X)$ . Supposons le contraire: quitte à changer  $G$  en  $G \otimes P$ , on peut supposer que  $G$  a une section; comme  $G$  est sans torsion, il existe un morphisme injectif  $\mathcal{O}_X \rightarrow G$ . Soit  $Q$  son conoyau et  $Q'$  le quotient de  $Q$  par sa torsion. Notons  $L$  le noyau de la flèche composée  $G \rightarrow Q'$ . On a un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & & & \\
 & & \searrow & & & & \\
 & & L & & & & \\
 & & \uparrow & \searrow & & & \\
 0 & \rightarrow & \mathcal{O}_X & \rightarrow & G & \rightarrow & A \rightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \searrow & \downarrow & \\
 & & 0 & & & Q' & \rightarrow 0
 \end{array}$$

$L$  est inversible de degré  $\geq 0$  et  $Q'$  est un quotient sans torsion de  $G$  de degré et de rang plus petits que ceux de  $G$ . Par construction de  $G$ ,  $Q'$  est nul, donc  $Q$  est de torsion et  $G$  de rang 1. Comme  $G$  est sans torsion, on a une suite exacte:

$$0 \rightarrow G \rightarrow G^{**} \rightarrow Q \rightarrow 0$$

où  $Q$  est concentré sur des points. Le faisceau  $G^{**}$ , étant inversible de degré  $\leq 0$  et ayant une section, est donc trivial: la suite exacte longue de cohomologie donne alors:

$$H^2(X, G) = H^2(X, \mathcal{O}_X) \neq 0.$$

Or, comme  $\mathcal{F}^2 G = 0$ , le théorème de changement de base assure au contraire que  $H^2(X, G) = 0$ . D'où une contradiction. □

LEMME 3. *Le support de  $\mathcal{F}^2 F$  est fini.*

*Preuve du lemme 3.* Par le théorème de changement de base et par dualité de Serre, il suffit de montrer  $H^0(X, F^* \otimes P) = 0$  pour tout  $P$  de  $\text{Pic}^0(X)$  sauf un nombre fini pour prouver que  $\mathcal{F}^2 F$  est concentré sur des points.

Soit  $\mathcal{P}(r)$  l'assertion suivante: pour tout sous-fibré  $F$  de  $\hat{E}$  de rang  $r < \text{rang}(\hat{E})$  dont le degré est maximal parmi les sous-fibrés non nuls de  $\hat{E}$ , on a l'inégalité:

$$c(F) = \text{card}\{P \in \text{Pic}^0(X) / H^0(X, F^* \otimes P) \neq 0\} \leq r.$$

Montrons  $\mathcal{P}(r)$  par récurrence sur  $r$ .

Si  $r = 1$ :  $F^*$  est localement libre de rang 1 et de degré négatif ou nul. Donc, soit  $\text{deg}(F^*) = 0$  et  $c(F) \leq 1$ , soit  $\text{deg}(F^*) < 0$  et  $c(F) = 0$ .

Supposons  $r > 1$ . Supposons que  $\mathcal{P}(i)$  soit vraie pour  $1 \leq i < r$ . Si  $c(F) \neq 0$ , soit  $P \in \text{Pic}^0(X)$  tel que  $H^0(X, F^{-1} \otimes P) \neq 0$ . Comme  $F$  est localement libre, il existe une suite exacte:

$$0 \rightarrow M \rightarrow F \rightarrow P(-D)$$

où  $M$  est localement libre, la flèche  $F \rightarrow P(-D)$  est surjective en dehors d'un sous-schéma de  $\hat{X}$  de dimension  $\leq 0$  et  $D$  est un diviseur effectif.

Le fibré  $M$  est un sous-fibré de  $\hat{E}$  de degré  $\text{deg}(F) + \text{deg}(D)$  et de rang  $r - 1$ . Par maximalité du degré de  $F$ , on déduit que  $D$  est nul; l'hypothèse de récurrence donne l'inégalité:

$$c(M) \leq r - 1$$

et la suite exacte de cohomologie donne:

$$c(F) \leq r.$$

L'assertion  $\mathcal{P}(r)$  est donc vraie pour tout entier  $r \geq 1$ . □

Il est maintenant facile de conclure: on remarque d'abord que  $\mathcal{F}^0 F$  est nul; si on applique le foncteur  $\hat{\mathcal{F}}$  à la suite exacte:

$$0 \rightarrow F \rightarrow \hat{E} \rightarrow G \rightarrow 0,$$

on obtient une suite exacte:

$$0 \rightarrow \mathcal{F}^1 F \rightarrow (-1)^* E \rightarrow \mathcal{F}^1 G \rightarrow \mathcal{F}^2 F \rightarrow 0.$$

Comme  $(-1)$  agit trivialement sur  $\text{Ch}^2(X) \otimes \mathbb{Q}$ , on a

$$\text{deg}((-1)^* E) = \text{deg}(E) = 0$$

d'après le lemme 3, on a l'égalité:

$$\text{deg}(\mathcal{F}^1 F) = \text{deg}(\mathcal{F} F) = \text{deg}(F)$$

On a donc l'inégalité:

$$\text{deg}(\mathcal{F}^1 F) \geq \text{deg}(\hat{E}) = \text{deg}(E) = 0$$

et  $\mathcal{F}^1(F)$  est un sous-faisceau de  $(-1)^*E$  qui est stable de degré 0 comme  $E$ .

Il suffit de voir que  $0 < \text{rang}(\mathcal{F}^1(F)) < \text{rang}(E)$  pour aboutir à une contradiction.

Si ce n'est pas le cas, deux cas se présentent:

(1) Si  $\text{rang}(\mathcal{F}^1 F) \neq 0$ : comme le rang de  $\mathcal{F}^2(F)$  est nul au point générique, le rang de  $\mathcal{F}^1(G)$  au point générique est nul; le faisceau  $G$  étant I.T.<sub>1</sub>, le théorème de changement de base assure que  $\mathcal{F}^1 G$  est localement libre:  $\mathcal{F}^1(G)$  est donc nul. et donc  $G$  également, ce qui n'est pas.

(2) Si  $\text{rang} \mathcal{F}^1 F = 0$ : comme  $\mathcal{F}^1 F$  est un sous-faisceau de  $(-1)^*E$ , le faisceau  $\mathcal{F}^1 F$  est nul. On a donc une suite exacte:

$$0 \rightarrow (-1)^*E \rightarrow \mathcal{F}^1 G \rightarrow \mathcal{F}^2 F \rightarrow 0.$$

Le faisceau  $\mathcal{F}^2 F$  est le conoyau du morphisme injectif de faisceaux localement libres de mêmes rangs:

$$(-1)^*E \rightarrow \mathcal{F}^1 G.$$

Or, un tel conoyau est supporté par un diviseur, conoyau de

$$\det: \Lambda^{\max}(-1)^*E \rightarrow \Lambda^{\max} \mathcal{F}^1 G.$$

D'après le lemme 3, ce diviseur est nul et on a donc  $\mathcal{F}^2 F = 0$ : le complexe  $\mathcal{F} F$  est nul. D'après la formule d'inversion, ceci ne peut arriver que si  $F$  est nul, ce qui n'est pas. □

### 3. Compléments

En fait, par les mêmes méthodes, on peut également traiter le cas où  $E$  est stable de degré 0 et de rang  $r > 1$ , mais pas localement libre:

**PROPOSITION 1.** *Soit  $E$  un faisceau stable avec  $\text{rang}(E) > 1$  et  $c_1(E) = 0$  non localement libre. Alors  $\hat{E}$  est W.I.T.<sub>1</sub> non I.T.<sub>1</sub> localement libre, semi-stable non stable et on a  $\text{rang}(\hat{E}) > 1$  et  $c_1(\hat{E}) = 0$ .*

**REMARQUE 1.** Si on remplace stable par semi-stable et que l'on suppose que  $E$  est I.T.<sub>1</sub>, on a les mêmes conclusions.

On peut traiter par ces méthodes le cas où  $E$  est cohérent de degré 0, semi-stable et W.I.T.<sub>1</sub>, cette dernière hypothèse assurant que  $\mathcal{F} E$  est un faisceau. Montrons d'abord la

**PROPOSITION 2.** (1) *Si  $E$  est localement libre de rang strictement supérieur à 1 avec  $c_1(E) = 0$ , semi-stable non stable et I.T.<sub>1</sub> alors il en est de même de  $E$ .*

(2) Si  $E$  est localement libre de rang supérieur à 1 avec  $c_1(E) = 0$ , semi-stable non stable et  $W.I.T._1$  non  $I.T._1$ , alors  $E$  est extension d'un fibré  $I.T._1$  semi-stable  $Q$  par un fibré homogène et  $\hat{E}$  est de rang supérieur à 1 avec  $c_1(E) = 0$ , semi-stable; en outre  $\hat{E}$  est stable si et seulement si  $\hat{Q}$  est stable.

*Preuve.* Seule la preuve de (2) présente une nouveauté: si  $E$  est  $W.I.T._1$  et non  $I.T._1$ , le théorème de changement de base assure l'existence d'un fibré  $P$  de  $\text{Pic}^0(X)$  s'injectant dans  $E$ . Soit alors  $\mathcal{H}$  un sous-fibré homogène de  $E$  de rang maximal:  $\mathcal{H}$  est non nul et on a  $\text{rang}(\mathcal{H}) < \text{rang}(E)$ . Soit  $Q$  le conoyau de la flèche:  $\mathcal{H} \rightarrow E$ ; notons que la torsion  $T$  de  $Q$  est concentré sur un fermé  $Z$  de dimension  $\leq 0$ : dans le cas contraire, le quotient  $Q/T$  est un quotient de degré  $< 0$  de  $E$  et de rang compris entre 0 et  $\text{rang}(E)$ . Notons  $\mathcal{H}'$  le noyau de la flèche  $E \rightarrow Q/T$ , de sorte qu'on a une injection de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{H}'$  de conoyau  $\mathcal{Q}$  concentré exactement sur  $Z$ . Or,  $\mathcal{H}'$  étant localement libre, ce car  $E$  est localement libre, de même rang que  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{Q}$  est supporté par un diviseur et  $\mathcal{Q}$  est donc nul:  $Q$  est sans torsion. Il est immédiat que  $Q$  est  $W.I.T._1$ , semi-stable et de première classe de Chern nulle. La maximalité de  $\mathcal{H}$  et le fait que  $Q$  soit sans torsion entraînent que  $Q$  est en fait  $I.T._1$ . Si on applique  $\mathcal{F}$  à la suite exacte:

$$0 \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow E \rightarrow Q \rightarrow 0$$

on trouve la suite exacte:

$$0 \rightarrow \hat{E} \rightarrow \mathcal{F}^1 Q \rightarrow \mathcal{F}^2 \mathcal{H} \rightarrow 0$$

qui prouve que  $\hat{E}$  est sans torsion. Or, on sait que  $\mathcal{F}^1 Q$  est semi-stable et que  $c_1(\mathcal{F}^1 Q) = 0$ , ce qui assure que  $\hat{E}$  est également semi-stable. Notons que  $\hat{E}$  n'est pas localement libre, car sinon le conoyau  $\mathcal{F}^2 \mathcal{H}$  du morphisme de faisceaux localement libres de mêmes rangs  $\hat{E} \rightarrow \mathcal{F}^1 Q$  devrait être non nul et supporté par des point, ce qui est impossible. Comme plus haut, ceci assure que  $\hat{E}$  n'est pas stable. □

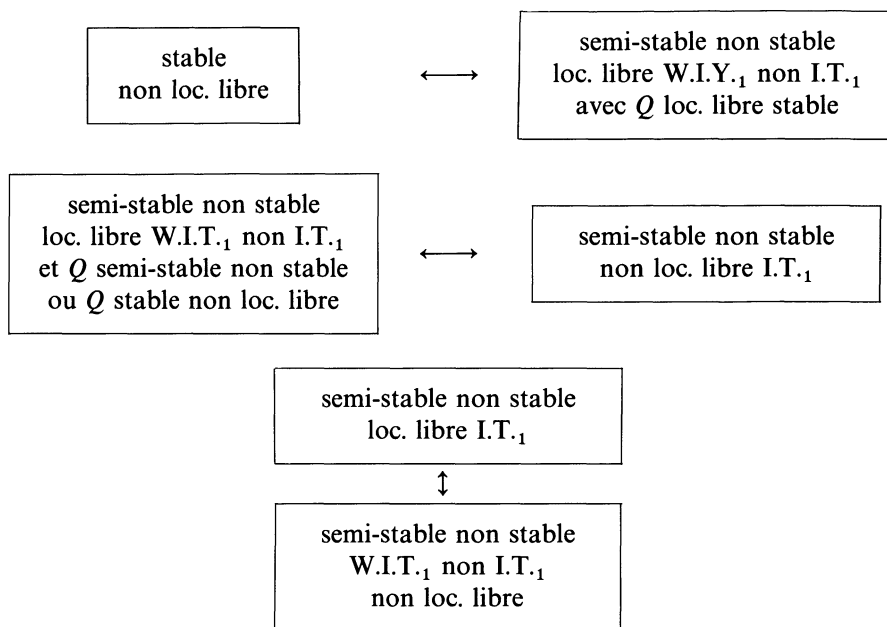
**REMARQUE 2.** D'après ce qui précède, le faisceau  $\hat{E}$  est stable si et seulement si  $Q$  est localement libre stable.

**COROLLAIRE.** Si le faisceau  $E$  est cohérent non localement libre de rang strictement supérieur à 1 avec  $c_1(E) = 0$ , semi-stable et  $W.I.T._1$  alors il en est de même de  $\hat{E}$ .

Les résultats se résument dans les diagrammes suivants: (on convient que les faisceaux  $E$  considérés vérifient:  $\text{rang}(E) > 1$  et  $c_1(E) = 0$ ).







### Bibliographie

- [B] Beauville, A., Quelques remarques sur la transformation de Fourier dans l'anneau de Chow d'une variété abélienne, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, L.N.M. 1016, 238–260.
- [H] Hartsorne, R., *Principles of Algebraic Geometry*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, G.T.M. 52, 1977.
- [M1] Mukai, S., Duality between  $D(X)$  and  $D(\hat{X})$  with its application to Picard sheaves, *Nagoya Math. J.*, 81, 1981, 153–175.
- [M2] Mukai, S., Fourier Functor and its application to moduli of bundles on an abelian variety, *Adv. in Pure Math.*, 10, (1987) 515–550.
- [S] C. S. Seshadri, *Fibrés vectoriels sur les courbes algébriques*, rédigé par J. M. Drezet, Astérisque 96, Pub. S.M.F.