

COMPOSITIO MATHEMATICA

MARIE-FRANCE VIGNÉRAS

Erratum à l'article : « Représentations modulaires de $GL(2, F)$ en caractéristique l , F corps p -adique, $p \neq l$ »

Compositio Mathematica, tome 101, n° 1 (1996), p. 109-113

http://www.numdam.org/item?id=CM_1996__101_1_109_0

© Foundation Compositio Mathematica, 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://www.compositio.nl>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Erratum à l'article: Représentations modulaires de $GL(2, F)$ en caractéristique l , F corps p -adique, $p \neq l$. *

MARIE-FRANCE VIGNÉRAS
8 Rue des Ecoles, 75005 Paris, France

Received: April 4 1995; accepted in final form: August 8 1995

La démonstration du Lemme 38 de l'article ci-dessus n'est complète que si $q \neq 1$ modulo l . Voici une autre démonstration qui est valable pour tout q , établie grâce à l'aide de Hervé Jacquet, et de [JL]**, équivalente à une *relation de congruence sur les facteurs* ϵ .

Soient $p \neq l$ deux nombres premiers, et F un corps local non archimédien de corps résiduel à $q = p^f$ éléments. Soit π une représentation irréductible cuspidale de $G = GL(2, F)$ sur $\overline{\mathbf{Q}}_l$, de caractère central ω_π à valeurs l -entières (i.e. dans $\overline{\mathbf{Z}}_l^*$). On identifie le centre de G à F^* par l'application diagonale. Soit $\psi: F \rightarrow \overline{\mathbf{Q}}_l^*$ un caractère additif lisse de F , de noyau l'anneau des entiers O_F . Le modèle de Kirillov $K(\pi, \psi)$ est le $\overline{\mathbf{Q}}_l$ -espace vectoriel $C_c^\infty(F^*)$ des fonctions localement constantes à support compact $f: F^* \rightarrow \overline{\mathbf{Q}}_l$, munie d'une action de G isomorphe à π , telle que

$$\left(\pi \begin{pmatrix} ad & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} f \right) (x) = \omega_\pi(d) f(ax), \quad (1)$$

$$\left(\pi \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f \right) (x) = \psi(bx) f(x), \quad (2)$$

pour $a, d, x \in F^*$, $b \in F$. Le Lemme 38 résulte du théorème suivant:

THÉORÈME. *Le $\overline{\mathbf{Z}}_l$ -module L des fonctions du modèle de Kirillov à valeurs l -entières, est stable par G .*

* Compositio Math. 72:33–36, 1989.

** Jacquet H., Langlands R. Automorphic forms on $GL(2)$. Springer-Verlag Lecture Notes in Math.114, 1970.

Preuve. (a) Réduction. Les valeurs de ψ et de ω_π étant l -entières, le $\overline{\mathbb{Z}}_l$ -module L est stable par le groupe B des matrices triangulaires supérieures. On a $G = B \cup BwB$, où

$$w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il suffit de montrer que $\pi(w)L \subset L$. On a

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w = w \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

pour $a \in F^*$. Donc (1) implique que la valeur en a de $\pi(w)f$ est égale à la valeur en 1 de $\pi(w)\phi$, où $\phi(x) = \omega_\pi(a)f(a^{-1}x)$ appartient à L . Il suffit de montrer que la valeur en 1 de $\pi(w)f$ est l -entière, pour tout $f \in L$.

(b) Rappel. L'action de $\pi(w)$ est décrite dans [JL] grâce à une transformation de Fourier sur $C_c^\infty(M(2, F))$ pour la mesure de Haar μ normalisée par $M(2, 0_F)$ (i.e. le volume de $M(2, 0_F)$ est 1):

$$\hat{f}(x) = \int_{M(2, F)} f(y)\psi \operatorname{tr}(xy) \, dy,$$

où $\operatorname{tr}: M(2, F) \rightarrow F$ est la trace. La mesure est auto-duale:

$$f(0) = \int_{M(2, F)} \hat{f}(x) \, dx.$$

Une fonction est à valeurs l -entières si et seulement si sa transformée de Fourier est à valeurs l -entières.

Soit $\phi(g)$ un coefficient de π et $f \in C_c^\infty(G)$. Notons $|x|_F$ la valeur absolue de $x \in F^*$, et $\det: G \rightarrow F^*$ le déterminant. La fonction nulle hors de G et égale à

$$f(\det g)\phi(g)|\det g|_F^{-1}$$

pour $g \in G$, appartient à $C_c^\infty(M(2, F))$. Sa transformée de Fourier est égale à 0 hors de G et égale à [JL Lemma 13.1.1, p. 419] à

$$(\pi(w)f)(\det g)\phi(g^{-1})\omega_\pi^{-1}(\det g), \quad (2)$$

pour $g \in G$.

(c) Lemme préliminaire. Il existe un coefficient ϕ de π , à valeurs l -entières, tel que $\phi(1) = 1$.

On choisit un sous-groupe ouvert compact K de pro-ordre inversible modulo l , tel que $\pi^K \neq 0$ (π a un vecteur K -invariant non nul). Comme les valeurs de ω_π sont l -entières, un modèle quelconque V de π contient un $\overline{\mathbb{Z}}_l G$ -réseau M avec les propriétés (article loc.cit. Lemme 31 p. 60):

- M^K est un $\overline{\mathbf{Z}}_l$ -module libre non nul de rang fini.
- $V^K = M^K \otimes_{\overline{\mathbf{Z}}} \overline{\mathbf{Q}}_l$.
- $\pi(e_K)M = M^K$, où e_K est la mesure de Haar normalisée de K .

Notons \tilde{V} le dual lisse de V , muni de l'action contragrédiente $\tilde{\pi}$, et \tilde{M}^K l'image de $\text{Hom}_{\overline{\mathbf{Z}}}(M^K, \overline{\mathbf{Z}}_l)$ par $v' \rightarrow \tilde{v}' := v'\pi(e_K)$. Alors

- \tilde{M}^K est un $\overline{\mathbf{Z}}_l$ -module libre non nul de rang fini.
- $(\tilde{V})^K = \tilde{M}^K \otimes_{\overline{\mathbf{Z}}} \overline{\mathbf{Q}}_l$.

On choisit une base (v_i) de M^K , de base duale (v'_i) . On prend $\phi(g) = \langle \tilde{v}_1, \pi(g)v_1 \rangle$.

(d) Démonstration du théorème. Avec ce coefficient, on déduit de (1) que $(\pi(w)f)(1) \in \overline{\mathbf{Z}}_l$ pour tout $f \in L$. □

Dans notre article, nous avons utilisé une transformée de Fourier formelle sur $C_c^\infty(F^*)$. Le groupe des unités O_F^* est un groupe profini, commutatif, isomorphe au produit de $(\mathbf{Z}/l^a\mathbf{Z})$ et d'un groupe profini H de pro-ordre premier à l , où $q - 1 = l^a m$, $(m, l) = 1$. Si μ est la mesure de Haar normalisée par H , étendue en une mesure de Haar sur O_F^* , et si $\chi \in \text{Hom}(O_F^*, \overline{\mathbf{Q}}_l^*)$ est un caractère lisse, la transformée de Fourier d'une fonction $\phi \in C_c^\infty(O_F^*)$ est

$$\hat{\phi}(\chi) = \int_{O_F^*} \phi(x)\chi(x) dx.$$

La transformée de Fourier d'une fonction de $C_c^\infty(O_F^*)$ à valeurs l -entières est l -entière. La réciproque n'est pas vraie si $a = 0$.

En effet, ϕ est invariante par un sous-groupe d'indice fini H' de H , et

$$\hat{\phi}(\chi) = [H : H']^{-1} \sum_{x \in O_F^*/H'} \phi(x)\chi(x).$$

Elle est nulle si χ n'est pas H' -invariante, et l'on a la formule d'inversion

$$\begin{aligned} \sum_{\chi} \hat{\phi}(\chi) &= [H : H']^{-1} \sum_{x \in O_F^*/H'} \phi(x) \sum_{\chi} \chi(x) = [H : H']^{-1} [O_F^* : H'] \phi(1), \\ \sum_{\chi} \hat{\phi}(\chi) &= l^a \phi(1). \end{aligned} \tag{3}$$

Donc si les valeurs de $\hat{\phi}$ sont l -entières, on a $\phi(1) \in \overline{\mathbf{Z}}_l$ si et seulement si la transformée de Fourier de ϕ vérifie la relation de congruence $l^{-a} \sum_{\chi} \hat{\phi}(\chi) \in \overline{\mathbf{Z}}_l$.

La transformée de Fourier formelle de $f \in C_c^\infty(F^*)$ en χ est la somme formelle (finie)

$$\hat{f}(\chi, X) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n X^n, \quad a_n = \int_{O_F^*} f(p_F^n x)\chi(x) dx,$$

où p_F est une uniformisante de O_F , et X une indéterminée. Celle de $f(p_F^{-m}x)$ est $\sum_{n \in \mathbf{Z}} a_{n-m} X^n = X^m \hat{f}(\chi, X)$. Celle de $f(x^{-1})$ est $\hat{f}(\chi^{-1}, X^{-1})$.

La transformée de Fourier formelle de $\pi(\omega)f$ en χ est ([JL] 2.10 p. 46, 2.18.1 p. 79)

$$\epsilon(\pi', \psi) \hat{f}(\chi^{-1} \omega_{\pi}^{-1} |_{O_F^*}, X^{-1}), \tag{4}$$

où χ est identifié à un caractère de F^* trivial sur p_F , $\pi' = \pi \otimes \chi^{-1} \det$, $\epsilon(\pi, \psi) = c(\pi, \psi) X^m$ est le traditionnel facteur $\epsilon(\pi, s, \psi) = c(\pi, \psi) q^{-ms}$ de Jacquet-Langlands (on peut identifier π à une représentation complexe, pour $s \in \mathbf{C}$, et l'on pose $X = q^{-s}$), et $m = m(\pi)$ est un entier > 0 (le conducteur de π).

(4) est égal à $c(\pi', \psi)$ fois la transformée de Fourier formelle de $f(p_F^{m(\pi')} x^{-1})$ en $\chi \omega_{\pi}$. Si f est à valeurs entières, le théorème dit que $\pi(\omega)f$ est à valeurs l -entières; par (3) et (4), il est équivalent à certaines congruences entre les facteurs $\epsilon(\pi \otimes \chi^{-1} \det, \psi)$.

Voici un cas particulier. Si χ est trivial sur H , le conducteur de $\pi \otimes \chi$ est égal à celui de π . On identifie le groupe des caractères $\text{Hom}(O_F^*, \overline{\mathbf{Q}}_l^*)$ triviaux sur H au groupe \mathcal{X} des caractères de $\mathbf{Z}/l^a \mathbf{Z}$. On choisit f invariante par H . On déduit de (2) que

$$l^a (\pi(\omega)f)(1) = \sum_{x \in O_F^*/H} f(p_F^m x^{-1}) \omega_{\pi}(x) \sum_{\chi \in \mathcal{X}} c(\pi', \psi) \chi(x). \tag{4}$$

En choisissant différents f , on obtient des relations congruences sur les facteurs ϵ .

COROLLAIRE. *Pour tout $x \in O_F^*$, la somme*

$$l^{-a} \sum_{\chi \in \mathcal{X}} \epsilon(\pi \otimes \chi^{-1} \det, \psi) \chi(x)$$

est l -entière.

Cette congruence se ramène, à la congruence classique des caractères $\chi \in \hat{H}$ d'un groupe fini H

$$|H|^{-1} \sum_{\chi \in \hat{H}} \chi(h) \in \mathbf{Z}, \quad h \in H,$$

en utilisant la correspondance de Langlands, et la propriété que $\epsilon(\pi, \psi) \in \overline{\mathbf{Z}}_l^*$ [loc. cit.]. Soit s une représentation irréductible de dimension 2 du groupe de Weil absolu W_F de F , et $\tau: W_F^{ab} \rightarrow F^*$ un isomorphisme du corps de classes local. Si s n'est pas modérément ramifiée, alors [Deligne-Henniart*, Th. 4.2, p. 108]

$$\epsilon(s \otimes \chi \tau, \psi) = \epsilon(s, \psi) \chi(c),$$

* *Invent. Math.* **64** (1981), p. 89–118

où $c \in F^*$ ne dépend que de s . Si s est modérément ramifiée, elle est induite d'un caractère modérément ramifié μ de l'extension quadratique non ramifiée de F , à valeurs dans $\overline{\mathbf{Z}}_l^*$. Par torsion par un caractère non ramifié, on peut supposer que μ est triviale sur p_F , et alors

$$\epsilon(s \otimes \chi\tau, \psi) = \sum_{x \in \mathbf{F}_{q^2}^*} \mu(x) \chi(x^{1+q}) \psi((x + x^q)/p_F).$$

Il est clair dans les deux cas, que la congruence pour $\epsilon(s \otimes \chi\tau, \psi)$ résulte de la congruence classique des caractères d'un groupe fini.