CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

P. Y. LEDUC

Radical et primitivité des catégories

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 10, nº 3 (1968), p. 347-350

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1968__10_3_347_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE *Vol. X,3*
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

RADICAL ET PRIMITIVITE DES CATEGORIES

par P.Y. LEDUC

Extension aux catégories additives du théorème suivant : Le quotient d'un anneau par son radical est produit sous-direct d'anneaux primitifs.

1. Introduction.

Dans [2] on dit qu'une catégorie additive $\mathcal{P}$ est primitive lorsqu'il existe une famille $(\theta_X)_{X \in Ob \mathcal{P}}$ de foncteurs additifs de $\mathcal{P}$ vers Ab satisfaisant aux axiomes suivants :

(P1) Pour tout objet non-nul X, $\theta_X \neq 0$ et, dans la catégorie des foncteurs additifs de $\mathcal{P}$ vers Ab, 0 et θ_X sont les seuls sous-objets de θ_X ;

(P2) Pour tout couple (X, A) d'objets de $\mathcal{P}$ et tout $x : X \to A$, si $\theta_X(x) = 0$, alors $x = 0$.

Puis on démontre que, si $\mathcal{P}$ est une catégorie primitive, il existe un «corpoïde» $\mathcal{E}$ tel que $\mathcal{P}$ s'identifie à une sous-catégorie «dense» de la catégorie des foncteurs additifs de $\mathcal{E}$ vers Ab, ce qui généralise au cas des catégories le théorème de densité de Jacobson.

On peut alors se demander si le concept de radical [1] d'une catégorie est lié à celui de catégorie primitive de la «même manière» que dans le cas des anneaux.

2. Quelques remarques préliminaires.

Précisons tout d'abord que toutes les catégories considérées seront supposées petites (sauf, évidemment, la catégorie Ab des groupes abéliens) et additives (bien que l'existence de sommes directes ne soit pas requise).

On remarque, pour commencer, que la donnée d'un idéal à gauche $\mathcal{J}$ d'une catégorie $\mathcal{C}$ équivaut à la donnée d'une famille $(\Phi_X)_{X \in Ob\,\mathcal{C}}$ où, pour chaque X, Φ_X est un sous-foncteur (dans la catégorie des foncteurs covariants additifs de $\mathcal{C}$ vers Ab et de leur transformations naturelles) de $M_{\mathcal{C}}(X,-)$. En fait, $\Phi_X(A) = M_{\mathcal{C}}(X,A) \cap \mathcal{J}$ pour chaque A.

Rappelons enfin que dans [2] il est démontré que le radical d'une catégorie $\mathcal{C}$ est l'intersection des idéaux à gauche maximaux de $\mathcal{C}$, un idéal à gauche $\mathcal{J}$ de $\mathcal{C}$ étant dit maximal lorsque, (Φ_X) étant la famille de foncteurs correspondant,

1°) pour tout X et tout foncteur additif S,

$$\Phi_X < S \leqslant M_{\mathcal{C}}(X,-) \Longrightarrow S = M_{\mathcal{C}}(M,-),$$

où $\leqslant$ est la relation « est un sous-foncteur de », et

2°) X non nul $\Longrightarrow \Phi_X < M_{\mathcal{C}}(X,-)$.

3. Construction de catégories primitives.

Soit $\mathcal{J}$ un idéal à gauche de $\mathcal{C}$. On définit l'idéal *bilatère* $\mathcal{J} \div \mathcal{C}$ de $\mathcal{C}$ en posant, pour chaque couple (X,A) d'objets de $\mathcal{C}$,

$$M_{\mathcal{J} \div \mathcal{C}}(X,A) = \{ x \in M_{\mathcal{C}}(X,A) \mid (\forall Y \in Ob\,\mathcal{C})\,[\,x M_{\mathcal{C}}(Y,X) \subseteq M_{\mathcal{J}}(Y,A)]\}.$$

On vérifie aussitôt que la famille des $M_{\mathcal{J} \div \mathcal{C}}(X,A)$, (X,A) variant dans $Ob\,\mathcal{C} \times Ob\,\mathcal{C}$, définit bien un idéal bilatère de $\mathcal{C}$, et, d'autre part, que l'on a toujours $\mathcal{J} \div \mathcal{C} \subseteq \mathcal{J}$.

PROPOSITION 1. *Soit $\mathfrak{M}$ un idéal à gauche maximal d'une catégorie additive $\mathcal{C}$. La catégorie quotient $\mathcal{C}/_{(\mathfrak{M} \div \mathcal{C})}$ est primitive.*

En effet, posons $\mathcal{P} = \mathcal{C}/_{(\mathfrak{M} \div \mathcal{C})}$ et soit $\mathfrak{D}$ l'image canonique de $\mathfrak{M}$ dans $\mathcal{P}$. On définit un idéal à gauche $\mathfrak{D} : \mathcal{P}$ de $\mathcal{P}$ en posant, pour chaque couple (X,A),

$$M_{\mathfrak{D}\,:\,\mathcal{P}}(X,A) = \{ x \in M_{\mathcal{P}}(X,A) \mid x M_{\mathcal{P}}(X,X) \subseteq M_{\mathfrak{D}}(X,A)\}$$

et on vérifie que cet idéal à gauche est nul. La conclusion résulte donc du fait suivant.

LEMME. *Si $\mathcal{P}$ est une catégorie qui possède un idéal à gauche maximal $\mathcal{D}$ tel que $\mathcal{D} : \mathcal{P}$ soit nul, alors $\mathcal{P}$ est primitive, et réciproquement.*

En effet, par hypothèse, pour tout couple (X,A) et tout $x \in M_{\mathcal{P}}(X,A)$, la condition $x M_{\mathcal{P}}(X,X) \subseteq M_{\mathcal{D}}(X,A)$ entraîne $x = 0$. Posons donc, pour chaque couple (X,A), $\theta_X(A) = M_{\mathcal{P}}(X,A)/M_{\mathcal{D}}(X,A)$; on voit alors que la famille $(\theta_X)_{X \in Ob\,\mathcal{P}}$ de foncteurs de $\mathcal{P}$ vers Ab vérifie la condition $(P2)$. Quant à la condition $(P1)$, elle résulte de la maximalité de $\mathcal{D}$. On démontre la réciproque de manière analogue.

4. Produits sous-directs.

Soient $(\mathcal{C}_i)_{i \in I}$ une famille de catégories, $\mathcal{O}$ un ensemble, $(w_i : Ob\,\mathcal{C}_i \to \mathcal{O})_{i \in I}$ une famille de bijections, et appelons *produit au dessus de* $\mathcal{O}$ la sous-catégorie pleine de $\prod_{i \in I} \mathcal{C}_i$ dont les objets sont les familles $(A_i)_{i \in I}$ telles que l'application $i \to w_i(A_i)$ soit constante. Pour chaque $j \in I$, désignons par p_j la projection canonique du produit au-dessus de $\mathcal{O}$ de $(\mathcal{C}_i)_{i \in I}$ sur $\mathcal{C}_j$.

DEFINITION. *Toute sous-catégorie $\mathcal{R}$ du produit au-dessus de $\mathcal{O}$ de $(\mathcal{C}_i)_{i \in I}$, telle que, pour chaque $j \in I$, p_j restreinte à $\mathcal{R}$ est surjective, est appelée un produit sous-direct de $(\mathcal{C}_i)_{i \in I}$ au-dessus de $\mathcal{O}$.*

PROPOSITION 2. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie dont le radical est nul et soit $(\mathfrak{M}_i)_{i \in I}$ la famille de ses idéaux à gauche maximaux. $\mathcal{C}$ est produit sous-direct au-dessus de $Ob\,\mathcal{C}$ de la famille des catégories $\mathcal{C}/_{(\mathfrak{M}_i \div \mathcal{C})}$, $i \in I$.*

Cela résulte immédiatement du fait que l'intersection des idéaux $\mathfrak{M}_i \div \mathcal{C}$ est nulle, celle des $\mathfrak{M}_i$ l'étant déjà par hypothèse.

Des propositions 1 et 2 découle le théorème suivant :

THEOREME. *Toute catégorie additive $\mathcal{C}$ dont le radical est nul est produit sous-direct au-dessus de $Ob\,\mathcal{C}$ d'une famille de catégories primitives.*

REMARQUE. Par définition, le radical $\mathcal{J}$ d'une catégorie $\mathcal{C}$ est le plus grand des idéaux $\mathcal{J}$ de $\mathcal{C}$ tels que l'on ait

$$(P) \qquad M_{\mathcal{J}}(A,A) = rad\, M_{\mathcal{C}}(A,A), \quad A \in Ob\,\mathcal{C}.$$

D'autre part, on voit que $rad(\mathcal{C}/_{rad}\mathcal{C})$ est toujours nul et que $F(rad\,\mathcal{C}) \subseteq rad\,\mathcal{C}'$ pour tout foncteur additif $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ vérifiant

$$FM_{\mathcal{C}}(A, B) = M_{\mathcal{C}'}(FA, FB), \quad (A, B) \in Ob\,\mathcal{C} \times Ob\,\mathcal{C}.$$

Bien sûr, il y a aussi un plus petit idéal $\mathcal{I}_o$ satisfaisant à (P), mais de nombreux exemples montrent que ces deux idéaux ne coïncident pas toujours et que $\mathcal{I}_o$ peut être nul sans que l'intersection des idéaux $\mathfrak{M}_i \div \mathcal{C}$ de la proposition 2 ne le soit. On voit donc qu'il est nécessaire, pour avoir les propriétés usuelles des radicaux, de prendre $\mathcal{I}$ pour radical, et non pas un idéal plus petit.

Références.

[1] G.M. KELLY. *On the radical of a category,* J. Austral. Math. Soc., 4 (1964), 299-307.

[2] P.Y. LEDUC. *Catégories semi-simples et catégories primitives.* Can. J. Math. 20 (1968), 612-628.