CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

MICHEL COSTE
GÉRARD MICHON

Petits et gros topos en géométrie algébrique

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 22, nº 1 (1981), p. 25-30
<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1981__22_1_25_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

3^e COLLOQUE SUR LES CATEGORIES
DEDIE A CHARLES EHRESMANN
Vol. XXII-1 (1981)

PETITS ET GROS TOPOS EN GEOMETRIE ALGEBRIQUE

par Michel COSTE & Gérard MICHON

La théorie des spectres exposée dans la thèse du premier auteur [2] n'est pas d'un abord très agréable. Le but de ce texte est d'en présentrer brièvement une autre approche. Cette approche a été développée par le second auteur - influencé par la lecture de «Groupes algébriques» de Gabriel et Demazure - dans des notes non publiées. Elle recoupe des considérations de Joyal sur les homéomorphismes locaux dans un topos. Nous finissons en montrant comment le topos étale réel s'introduit naturellement dans ce contexte.

Le point de vue adopté ici est nettement géométrique. La construction du spectre apparait alors comme un moyen de représenter les variétés affines et les variétés obtenues à partir de celles-ci par un procédé formel de recollement comme des topos annelés ou anneaux «locaux» d'un certain type (cf. schémas, topos étale d'un schéma, ou espaces algébriques d'Artin). Nous espérons que ceci donne un caractère moins indigeste à la théorie.

Dans tout ce qui suit, k désigne un anneau commutatif de base et M la catégorie des variétés algébriques affines sur k, c'est-à-dire la duale de la catégorie des k-algèbres de présentation finie.

I. LES ETALÉS.

On se donne dans M un ensemble Et de morphismes que l'on veut considérer comme des isomorphismes locaux. Dans les exemples considérés ce seront soit les immersions ouvertes soit les morphismes étales. Les morphismes de Et seront appelés étalés élémentaires. On suppose qu'ils ont les propriétés suivantes, naturelles vu ce que l'on pense d'eux et sa-

tisfaites par les immersions ouvertes et les morphismes étales.

1° Tout isomorphisme est un étalé élémentaire.

2° Le composé de deux étalés élémentaires est un étalé élémentaire.

3° Les étalés élémentaires sont stables par changement de base.

4° Si le composé $u \circ v$ est un étalé élémentaire ainsi que v, u en est aussi un.

Dans la terminologie de Bénabou, Et est un calibrage sur M.

Les étalés élémentaires servent à fabriquer des recouvrements : On se donne pour chaque variété affine V un ensemble de familles d'étalés élémentaires sur V qui seront les recouvrements de V. On demande comme d'habitude que les isomorphismes soient couvrants, que les recouvrements soient stables par changement de base et qu'ils aient un caractère local.

On est alors en possession d'une *donnée de localisation sur* M. Une donnée de localisation n'est donc pas autre chose qu'une topologie de Grothendieck sur M dans laquelle on a spécifié les morphismes qui servent à fabriquer les recouvrements. Il y a en Géométrie algébrique deux données de localisation bien connues : la topologie de Zariski avec les immersions ouvertes et la topologie étale avec les morphismes étales.

Soit $\tilde{M}$ le topos des faisceaux sur M pour la topologie de la donnée de localisation. On notera $\epsilon : M \to \tilde{M}$ le foncteur canonique. Les objets de $\tilde{M}$ sont obtenus par recollement de variétés affines ; le mode d'emploi de la colle est donné par la topologie sur M.

Choisissons maintenant une variété affine V. Soit Et/V la sous-catégorie pleine de M/V formée des étalés élémentaires sur V. Et/V hérite d'une topologie de Grothendieck par la donnée de localisation. Soit $\widetilde{Et/V}$ le topos de faisceaux pour cette topologie. Les objets de $\widetilde{Et/V}$ sont obtenus en recollant des étalés élémentaires sur V ; il est donc naturel de les considérer comme les *étalés sur* V.

Le plongement $i : Et/V \hookrightarrow M/V$ est exact à gauche, continu et cocontinu ([1], Exposé III). Il se prolonge en un plongement

$$\Sigma_i : \widetilde{Et/V} \hookrightarrow \widetilde{M/V} = \tilde{M}/\epsilon V$$

qui nous permettra d'identifier les étalés sur V à des objets de $\tilde{M}$ au-dessus de V. $\sum_i$ est exact à gauche, il a un adjoint à droite $i^{\#}$ (le foncteur «étalé» associé) qui a lui-même un adjoint à droite $\prod_i$. On a ainsi deux deux morphismes géométriques :

$$(i^{\#}, \sum_i): \tilde{M}/\epsilon V \longrightarrow \widetilde{Et/V}, \quad (\prod_i, i^{\#}): \widetilde{Et/V} \longrightarrow \tilde{M}/\epsilon V$$

et le composé $i^{\#} \circ \sum_i$ est isomorphe à l'identité.

Les relations entre $\widetilde{Et/V}$ et $\tilde{M}/\epsilon V$ sont les mêmes que celles entre le petit topos et le gros topos d'un espace topologique ([1] Exposé IV, Section 4.10). Il y a d'ailleurs dans SGA 4 un exercice dont le contenu est à peu de choses près ce qui vient d'être raconté. (Devinette : Trouver un point commun entre la Samaritaine et SGA 4.)

On sait donc ce que sont les étalés sur une variété affine. Les étalés sur un objet quelconque X de $\tilde{M}$ se définissent comme les morphismes $Y \to X$ dont l'image réciproque par tout morphisme $\epsilon V \to X$ est étalée sur V. Les étalés ont les propriétés 1 à 4 des étalés élémentaires. Ils acquièrent aussi un caractère local : Si $(X_j \to X)_{j \in J}$ est une famille couvrante, $Y \to X$ est étalé quand chaque $Y \times_X X_j \to X_j$ l'est.

On arrive maintenant à la notion de *variété* attachée à la donnée de localisation. Une variété est un objet X de $\tilde{M}$ qui est recouvert par les variétés affines étalées sur X. L'avantage des variétés par rapport aux autres objets de $\tilde{M}$ est que l'on peut répéter pour celles-ci ce que l'on a fait pour les variétés affines : Si X est une variété, soit Et/X la sous-catégorie pleine de M/X formée des affines étalés sur X. $\widetilde{Et/X}$ est le topos des étalés sur X (on peut remarquer que si Y est etalé sur une variété X, Y est aussi une variété). On a les mêmes foncteurs $\sum_i$, $i^{\#}$ et $\prod_i$ entre le petit topos $\widetilde{Et/X}$ et le gros topos $\tilde{M}/X$.

II. REPRESENTATION D'UNE VARIETE COMME TOPOS ANNELE EN ANNEAUX «LOCAUX».

Il faut tout d'abord préciser ce que sont les anneaux «locaux». Soit $(\underline{E}, O_{\underline{E}})$ un topos annelé en k-algèbres. On peut l'identifier au foncteur

exact à gauche $M \to \underline{E}$ qui envoie une variété affine V sur l'objet $V(O_{\underline{E}})$ des $O_{\underline{E}}$-points de V. $(\underline{E}, O_{\underline{E}})$ sera «local» si ce foncteur est continu pour la topologie sur M, c'est-à-dire si chaque fois que $(U_i \to V)_{i \in I}$ est un recouvrement, la famille

$$(U_i(O_{\underline{E}}) \to V(O_{\underline{E}}))_{i \in I}$$

est surjective. Ceci donne dans le cas de la topologie de Zariski les anneaux locaux sans guillemets et dans le cas de la topologie étale les anneaux locaux stricts (ou henséliens de corps résiduel séparablement clos).

$\tilde{M}$ est le topos classifiant les k-algèbres «locales», ce qui veut dire que la donnée d'un topos annelé en k-algèbres «locales» $(\underline{E}, O_{\underline{E}})$ revient à celle du morphisme géométrique $\underline{E} \to \tilde{M}$ dont le foncteur image inverse associe à un objet X de $\tilde{M}$ l'objet $X(O_{\underline{E}})$ des $O_{\underline{E}}$-points de X. Remarquons que se donner un $O_{\underline{E}}$- point $p: 1 \to X(O_{\underline{E}})$ de X revient à se donner une factorisation

$$\begin{tikzcd} \underline{E} \arrow[r] \arrow[dr] & \tilde{M}/X \arrow[d] \\ & \tilde{M} \end{tikzcd}$$

Soit $(\underline{E}, O_{\underline{E}})$ et $(\underline{F}, O_{\underline{F}})$ deux topos annelés en k-algèbres locales. Un morphisme de $(\underline{E}, O_{\underline{E}})$ dans $(\underline{F}, O_{\underline{F}})$ est un morphisme géométrique $\phi: \underline{E} \to \underline{F}$ avec un morphisme de k-algèbres $f: \phi^* O_{\underline{F}} \to O_{\underline{E}}$. Ce morphisme sera «local» si pour tout étalé élémentaire $U \to V$ le carré

$$\begin{tikzcd} U(\phi^* O_{\underline{F}}) \arrow[r] \arrow[d] & U(O_{\underline{E}}) \arrow[d] \\ V(\phi^* O_{\underline{F}}) \arrow[r] & V(O_{\underline{E}}) \end{tikzcd}$$

est cartésien. On récupère ainsi les morphismes locaux sans guillemets pour les deux données de localisation déjà considérées.

Venons en maintenant à la représentation d'une variété X comme topos annelé en anneaux «locaux». Le plus gros du travail a déjà été fait. On a construit le topos $\widetilde{Et/X}$ et un morphisme géométrique

$$\widetilde{Et/X} \longrightarrow \tilde{M}/X \longrightarrow \tilde{M}$$

qui donne la k-algèbre «locale» cherchée. Explicitons : la k-algèbre «locale» générique dans $\bar{M}$ est ϵA^1, la droite affine avec sa structure d'anneau. Son image réciproque dans $\bar{M}/X$ est $\epsilon A^1 \times X \to X$. Nous noterons O_X l'étalé associé sur X. Soit Y une variété étalée sur X. Les sections de O_X au-dessus de Y sont exactement les morphismes de Y dans ϵA^1 dans le topos $\bar{M}$, c'est-à-dire les «fonctions» sur Y. Ainsi avec une donnée de localisation vient une notion de fonction et O_X doit être vu comme le faisceau des fonctions sur X. Pour les deux données de localisation connues, les fonctions sont les fonctions régulières.

On a donc construit à partir de la variété X un topos annelé en k-algèbres «locales» $(\widetilde{Et/X}, O_X)$. Les propriétés suivantes montrent qu'il s'agit là d'une bonne représentation :

1° Soit $(\underline{E}, O_{\underline{E}})$ un topos annelé en k-algèbres «locales». Il y a une bijection (si on laisse tomber les «à isomorphisme près») entre les $O_{\underline{E}}$-points de X et les morphismes locaux de $(\underline{E}, O_{\underline{E}})$ dans $(\widetilde{Et/X}, O_X)$. Si $X = \epsilon V$, un $O_{\underline{E}}$-point de X est un morphisme de k-algèbres de $k[V]$ dans $\Gamma(\underline{E}, O_{\underline{E}})$ et on reconnait là la propriété universelle du spectre.

Les choses se passent ainsi : Donnons-nous $p : 1 \to X(O_{\underline{E}})$. On obtient un morphisme géométrique

$$\underline{E} \longrightarrow \bar{M}/X \longrightarrow \widetilde{Et/X}.$$

Soit $O_{X,p}$ l'image réciproque de O_X par ce morphisme ; $O_{X,p}$ est l'anneau «local» de X en p, et on a un morphisme «local» $O_{X,p} \to O_{\underline{E}}$. Ce dernier provient de la transformation naturelle $\sum_i \circ\, i^{\#} \Rightarrow Id$:

$$\begin{tikzcd}
& \widetilde{Et/X} \arrow[dr] \arrow[d, phantom, "\Downarrow"] & \\
\bar{M}/X \arrow[ur] \arrow[rr, bend right, "Id"'] & {} & \bar{M}/X
\end{tikzcd}$$

Pour montrer que l'on a bien une bijection, il faut observer que si on a un morphisme «local» $f : O_{\underline{E}} \to O'_{\underline{E}}$, un $O_{\underline{E}}$-point p de X et son image q par f, les anneaux locaux $O_{X,p}$ et $O_{X,q}$ sont isomorphes :

$$\begin{tikzcd}
\underline{E} \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\Downarrow f"] & \bar{M}/X \arrow[r] & \widetilde{Et/X}
\end{tikzcd}$$

f local entraîne $f.\sum_i$ iso.

2° Soit Y une autre variété. Il y a bijection entre les morphismes de X dans Y dans $\bar{M}$ et les morphismes locaux de $(\widetilde{Et/X}, \mathcal{O}_X)$ dans $(\widetilde{Et/Y}, \mathcal{O}_Y)$.

III. LE TOPOS ÉTALE REEL.

Si on se place sur un corps de base algébriquement clos k, la donnée de localisation étale peut se décrire ainsi: les étalés élémentaires sont les morphismes étales et les recouvrements sont les familles de morphismes étales $(U_i \to V)_{i \in I}$ telles que les $U_i(k)$ recouvrent $V(k)$. En remplaçant simplement k par un corps réel clos (par exemple R) on obtient la donnée de localisation étale réelle. Le topos étale réel d'une variété est le petit topos que l'on a construit. Les anneaux «locaux» sont les anneaux locaux henséliens de corps résiduel réel clos, les morphismes «locaux» sont les morphismes locaux ordinaires et les fonctions associées à la donnée de localisation sont les fonctions de Nash (ou analytiques-algébriques). Une particularité remarquable est le fait que le topos étale réel est un topos de faisceaux sur un espace topologique. Pour plus de détails voir [3]; pour le moment seul le cas des variétés affines est traité explicitement.

Pour conclure on peut remarquer que - abstraction faite de la terminologie géométrique - tout ce que l'on a utilisé de M est le fait que c'est une petite catégorie à limites projectives finies. On a donc là un formalisme passe-partout qui peut-être rendra service dans d'autres domaines que la géométrie algébrique classique ou réelle.

1. M. ARTIN, A. GROTHENDIECK & J.L. VERDIER, Théorie des topos et cohomologie étale des schémas (SGA 4), *Lecture Notes in Math.* 269, Springer.

2. M. COSTE, Localization, spectra and sheaf representation, *Lecture Notes in Math,* 753, Springer (1979).

3. M. COSTE & M.-F. COSTE-ROY, Le topos étale réel d'un anneau, Ce volume.

M. COSTE: Cf. article précédent.

G. MICHON: Département de Mathématiques
Université de Dijon, B.P. 138
21000 DIJON