

# GROUPE DE TRAVAIL D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

ALAIN ESCASSUT

## Spectre maximal d'une algèbre de Krasner

*Groupe de travail d'analyse ultramétrique*, tome 1 (1973-1974), exp. n° 12, p. 1-14

[http://www.numdam.org/item?id=GAU\\_1973-1974\\_\\_1\\_\\_A9\\_0](http://www.numdam.org/item?id=GAU_1973-1974__1__A9_0)

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1973-1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## SPECTRE MAXIMAL D'UNE ALGÈBRE DE KRASNER

par Alain ESCASSUT

### Introduction.

Cet article a pour objet d'étudier les idéaux maximaux de codimension infinie d'une algèbre d'éléments analytiques au sens de KRASNER. Soit un infraconnexe fermé borné  $D$  d'un corps algébriquement clos ultramétrique complet  $K$  ; en utilisant les résultats de [2] concernant la caractérisation des semi-normes multiplicatives continues de l'algèbre de Krasner  $H(D)$  par des filtres circulaires de  $D$ , et grâce aux résultats de [8] montrant que tout idéal maximal de  $H(D)$  définit au moins une semi-norme multiplicative continue, nous chercherons à associer à chaque idéal maximal de codimension infinie  $\mathfrak{M}$  un filtre circulaire particulier  $\mathfrak{F}$  tel que  $\mathfrak{M}$  soit l'idéal des éléments  $f \in H(D)$  tels que  $\lim_{\mathfrak{F}} f(x) = 0$ . On retrouvera naturellement les problèmes classiques d'analyticité, et on utilisera fréquemment la notion de  $T$ -filtre [3].

Ce problème est en rapport avec celui évoqué par B. GUENNEBAU) concernant l'existence de plusieurs valeurs absolues continues dans une extension  $\Gamma$  de  $K$  munie d'une structure de  $K$ -algèbre de Banach, et nous tenterons de confirmer, dans le cas des algèbres  $H(D)$ , sa conjecture selon laquelle si le corps résiduel de  $K$  ou si le groupe des valeurs de  $K$  est non dénombrable, alors  $\Gamma$  n'admet qu'une seule valeur absolue continue.

### I. Caractérisation des idéaux maximaux.

#### 1. Les idéaux maximaux de codimension 1.

Considérons une algèbre de Banach d'éléments analytiques  $H(D)$  sur un fermé borné  $D$  de  $K$  dont l'application identique sur  $D$  est notée  $x$ . Il est clair que, pour tout point  $a \in D$ , l'idéal  $\mathfrak{J}(a)$  des éléments de  $H(D)$ , nuls au point  $a$ , est un idéal maximal de codimension 1 et, d'après le théorème IV.2 de [1] et le théorème 1.3 de [4], il est clair que  $\mathfrak{J}(a)$  est engendré par le polynôme  $x - a$  si  $a \in \overset{\circ}{D}$ , et que  $(a)$  n'est pas de type fini si  $a \in D - \overset{\circ}{D}$ . Réciproquement, pour tout idéal maximal  $\mathfrak{M}$  de codimension 1 de  $H(D)$ , l'homomorphisme  $\varphi$  de  $H(D)$  sur  $K$ , tel que  $\text{Ker } \varphi = \mathfrak{M}$ , est continu, et si l'on note  $a = \varphi(x)$ , il est clair que  $\varphi(f) = 0$  si, et seulement si,  $f(a) = 0$ , donc  $\mathfrak{M} = \mathfrak{J}(a)$ .

#### 2. Rappels.

Rappelons très brièvement quelques résultats et définitions de [2]. Dans tout cet article, on désignera par  $K$  un corps algébriquement clos ultramétrique complet.

Soit  $A$  une  $K$ -algèbre normée dont la norme est notée  $\|\cdot\|$ . On notera  $\text{Mult}(A, \|\cdot\|)$  l'ensemble des semi-normes multiplicatives de  $A$  continues pour la norme  $\|\cdot\|$ .

Il est clair que l'ensemble  $\text{Ker } \varphi$  des  $x \in A$  tels que  $\varphi(x) = 0$  ( $\varphi \in \text{Mult}(A, \|\cdot\|)$ ) est un idéal premier. On notera  $\text{Mult}_m(A, \|\cdot\|)$  l'ensemble des  $\varphi \in \text{Mult}(A, \|\cdot\|)$  tels que  $\text{Ker } \varphi$  soit un idéal maximal de  $A$ , et l'on notera  $\text{Mult}_a(A, \|\cdot\|)$  l'ensemble des  $\varphi \in \text{Mult}(A, \|\cdot\|)$  tels que  $\text{Ker } \varphi$  soit un idéal maximal de codimension 1.

Le théorème 1 de [8] a pour conséquence la proposition I.1.

**PROPOSITION I.1.** - Pour tout idéal maximal d'une  $K$ -algèbre de Banach  $A$ , le corps  $\Gamma = A/\mathfrak{M}$ , muni de sa structure de  $K$ -algèbre de Banach quotient, admet au moins une valeur absolue continue  $|\cdot|$  et, si  $\mathfrak{q}$  désigne la surjection canonique de  $A$  sur  $\Gamma$ , l'application  $\varphi : x \rightarrow |\mathfrak{q}(x)|$  est telle que  $\text{Ker } \varphi = \mathfrak{M}$ .

L'étude de  $\text{Mult}(H(D), \|\cdot\|_D)$  (où  $D$  est un fermé borné et où  $\|\cdot\|_D$  désigne la norme de la convergence uniforme sur  $D$ ) a été faite dans [2] et [6]. Nous allons en rappeler les principaux résultats qui utilisent notamment la notion de filtre circulaire.

Précisons quelques notations.

Soient  $a \in K$ , et  $r \geq 0$ . On notera  $d(a, r)$  l'ensemble des  $\xi \in R$  tels que  $|\xi - a| \leq r$ , appelé disque circonferencié de centre  $a$  de diamètre  $r$ . On notera  $C(a, r)$  l'ensemble des  $\xi \in K$  tels que  $|\xi - a| = r$  (appelé cercle de centre  $a$  de rayon  $r$ ). Enfin, soit  $a \in K$ , et soient  $r_1, r_2 \in R$  tels que  $0 \leq r_1 \leq r_2$ . On notera  $\Gamma(a, r_1, r_2)$  l'ensemble des  $\xi \in K$  tels que  $r_1 \leq |\xi - a| \leq r_2$ .

D'autre part, on appellera classe d'un disque circonferencié ou d'un cercle de diamètre  $r$  tout disque non circonferencié de diamètre  $r$  inclus dans ce disque ou ce cercle.

On appelle filtre circulaire de  $K$  un filtre de  $K$  qui admet un système générateur de la forme  $\mathfrak{F} \cup \hat{\mathfrak{F}}$  (que l'on nomme système générateur canonique), où  $\mathfrak{F}$  est une suite strictement décroissante de disques circonferenciés  $d_n$  (où l'on note  $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(d_n)$ ), et où  $\hat{\mathfrak{F}}$  est la famille des couronnes  $\Gamma(a, r_1, r_2)$  telles que  $a \in \bigcap_{d \in \mathfrak{F}} d$  et  $r_1 < r < r_2$ . Le nombre  $r$  est appelé diamètre de  $\mathfrak{F}$ ; on note  $\Delta(\mathfrak{F})$  l'ensemble  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} d_n$ , et les points de  $\Delta(\mathfrak{F})$  sont appelés centres de  $\mathfrak{F}$ . De plus, on dit qu'un filtre circulaire est large si son diamètre est  $> 0$  (c'est-à-dire si ce n'est pas un filtre de Cauchy).

Nous résumerons les résultats de [2] et [6] par le théorème I.2.

**THÉORÈME I.2.** - Soit  $D$  un fermé borné. Pour tout  $\varphi \in \text{Mult}(H(D), \|\cdot\|_D)$ , il existe un filtre circulaire unique  $\mathfrak{F}_\varphi$  sécant à  $D$ , tel que  $\varphi(\mathfrak{F}) = \lim_{\mathfrak{F} \cap D} |f(x)|$ , et l'application  $\varphi \rightarrow \mathfrak{F}_\varphi$  est une bijection de  $\text{Mult}(H(D), \|\cdot\|_D)$  sur l'ensemble

des filtres circulaires de  $K$  sécants à  $D$  . De plus,  $\varphi \in \text{Mult}_a(H(D), \|\cdot\|_D)$  si, et seulement si,  $\mathfrak{F}_\varphi$  est un filtre de Cauchy ; alors, si  $\varphi \in \text{Mult}_a(H(D), \|\cdot\|_D)$ ,  $\mathfrak{F}_\varphi \cap D$  est le filtre des voisinages d'un point  $a \in D$ , et l'on a  $\varphi(f) = |f(a)|$  pour tout  $f \in H(D)$  .

Nous considèrerons uniquement des filtres circulaires sécants à l'ensemble  $D$  considéré, et il est immédiat de voir que si deux filtres circulaires de  $K$  ont une même intersection avec  $D$ , ils sont égaux. On nommera donc filtre circulaire de  $D$  l'intersection avec  $D$  d'un filtre circulaire de  $K$  sécant à  $D$ , et on pourra confondre sans inconvénient tout filtre circulaire de  $K$  sécant à  $D$  avec son intersection avec  $D$  .

Alors si  $\mathfrak{F}$  est un filtre circulaire de  $D$ , on notera  $\Delta(\mathfrak{F}, D)$  l'ensemble  $\Delta(\mathfrak{F}) \cap D$  (où l'on considère  $\mathfrak{F}$  comme filtre circulaire de  $K$ ).

D'autre part, nous dirons ici qu'un filtre circulaire  $\mathfrak{F}$  est entouré par un filtre circulaire  $\mathfrak{S}$  si l'un des éléments de  $\mathfrak{F}$  est inclus dans  $\Delta(\mathfrak{S})$  .

Enfin, on a défini dans [2] la notion de filtre monotone de  $K$  que l'on peut résumer de la façon suivante : un filtre  $\mathfrak{S}$  de  $K$  est décroissant s'il admet un système générateur de la forme  $\mathfrak{F} \cap \Delta(\mathfrak{F})$ , où  $\mathfrak{F}$  est un filtre circulaire large de  $K$ , et un filtre  $\mathfrak{S}$  est croissant s'il admet un système générateur de la forme  $\mathfrak{F} \cap d$ , où  $\mathfrak{F}$  est un filtre circulaire et où  $d$  est l'une des classes du disque  $\Delta(\mathfrak{F})$ . Alors  $d$  est le plus petit disque appartenant à  $\mathfrak{S}$  .

Enfin on appelle filtre monotone de  $K$  un filtre croissant ou décroissant. Alors il est clair qu'avec les notations ci-dessus, le filtre  $\mathfrak{F}$  servant à définir le filtre décroissant ou croissant  $\mathfrak{S}$  est le seul filtre circulaire sécant à  $\mathfrak{S}$  . On l'appelle filtre circulaire associé à  $\mathfrak{S}$ , et nous dirons ici qu'un filtre monotone  $\mathfrak{S}$  est entouré par un filtre circulaire  $\mathfrak{F}'$  si son filtre circulaire associé  $\mathfrak{F}$  est entouré par  $\mathfrak{F}'$  . De même nous dirons que  $\mathfrak{F}'$  est entouré par  $\mathfrak{S}$  si  $\mathfrak{F}'$  est entouré par  $\mathfrak{F}$  .

Alors si  $D$  est un fermé borné de  $K$ , on appelle filtre monotone de  $D$  l'intersection avec  $D$  d'un filtre monotone de  $K$  sécant à  $D$  . D'autre part, si  $\mathfrak{S}$  est un filtre décroissant de  $D$  et si  $\mathfrak{F}$  est son filtre circulaire associé, on appelle plage de  $\mathfrak{S}$  l'ensemble  $\mathcal{P}(\mathfrak{S}) = \Delta(\mathfrak{F}, D)$  ; si  $\mathfrak{S}$  est un filtre croissant de  $D$ , et si  $\mathfrak{F}$  est son filtre circulaire associé, on appelle plage de  $\mathfrak{S}$  l'ensemble  $\mathcal{P}(\mathfrak{S}) = (Cd) \cap D$ , où  $d$  est le plus petit disque appartenant à  $\mathfrak{S}$  . Enfin, pour tout filtre monotone  $\mathfrak{F}$  de  $D$ , on appelle chapeau de  $\mathfrak{F}$ , noté  $C(\mathfrak{F})$ , le complémentaire de  $\mathcal{P}(\mathfrak{F})$  dans  $D$  .

On dit qu'un élément  $f \in H(D)$  est annulé par un filtre  $\mathfrak{F}$  de  $D$  si

$$\lim_{\mathfrak{F}} f(x) = 0 ;$$

alors l'idéal des éléments annulés par  $\mathfrak{F}$  sera noté  $\mathfrak{I}(\mathfrak{F})$  .

On a défini dans [2] l'expression  $w_{\mathfrak{F}}(f, \mu)$  associée à un filtre décroissant  $\mathfrak{F}$

que l'on utilisera fréquemment, ainsi que les notions d'éléments strictement annulés et auto-annulés par un filtre monotone [3]. On sait qu'un filtre monotone admet des éléments strictement annulés et des éléments auto-annulés si, et seulement si, c'est un T-filtre ([3], théorème I.6).

### 3. Filtres circulaires distingués.

Nous allons caractériser les idéaux maximaux de codimension infinie par les filtres circulaires distingués que nous allons définir.

Nous dirons qu'un filtre circulaire  $\mathfrak{F}$  d'un infraconnexe  $D$  est sous-distingué s'il possède les deux propriétés suivantes :

(i)  $\Delta(\mathfrak{F}, D)$  est vide ou égal à la réunion d'une famille de chapeaux de T-filtres croissants,

(ii) Tout T-filtre décroissant de  $\Delta(\mathfrak{F}, D)$  est sécant à au moins un chapeau de T-filtre croissant de  $\Delta(\mathfrak{F}, D)$ .

De plus, nous dirons qu'un filtre circulaire sous-distingué est distingué s'il possède la propriété (iii).

(iii)  $\Delta(\mathfrak{F}, D)$  est égal à  $D$ , ou bien à la plage d'un T-filtre décroissant de  $D$ , ou bien à l'intersection d'une suite décroissante de plages de T-filtres décroissants de  $D$ .

LEMME I.3. - Si  $\mathfrak{F}$  est un filtre circulaire distingué d'un infraconnexe fermé borné  $D$ ,  $\mathfrak{J}(\mathfrak{F})$  n'est inclus dans aucun idéal maximal de codimension 1.

Preuve. - On a vu que tout idéal maximal de codimension 1 est de la forme  $\mathfrak{J}(a)$  (où  $a \in D$ ). Or, pour tout  $a \in \Delta(\mathfrak{F}, D)$  il existe un T-filtre  $\mathfrak{C}$  croissant de  $\Delta(\mathfrak{F}, D)$  de centre  $a$ , et il existe donc un élément  $f \in H(D)$  auto-annulé par  $\mathfrak{C}$ , tel que  $f(a) \neq 0$ , de sorte que  $f \in \mathfrak{J}(\mathfrak{F})$  et  $\mathfrak{J}(\mathfrak{F}) \not\subseteq \mathfrak{J}(a)$ . De même, pour tout  $a \in D - \Delta(\mathfrak{F}, D)$ , grâce à la condition (iii), il existe un T-filtre décroissant  $\mathfrak{C}'$  entourant  $\mathfrak{F}$ , tel que  $f(a) \neq 0$  de sorte que  $f \in \mathfrak{J}(\mathfrak{F})$  et  $\mathfrak{J}(\mathfrak{F}) \not\subseteq \mathfrak{J}(a)$ .

LEMME I.4. - Deux filtres circulaires distingués distincts définissent des idéaux incomparables.

Preuve. - Soient  $\mathfrak{F}_1$  et  $\mathfrak{F}_2$  deux filtres circulaires distingués distincts. Supposons d'abord  $\mathfrak{F}_1$  entouré par  $\mathfrak{F}_2$ . Alors  $\Delta(\mathfrak{F}_1, D) \neq D$ , donc  $\Delta(\mathfrak{F}_2, D)$ , qui contient strictement  $\Delta(\mathfrak{F}_1, D)$ , admet au moins un T-filtre décroissant  $\mathfrak{C}$  non sécant à  $\Delta(\mathfrak{F}_1, D)$ , et  $\mathfrak{C}$  est donc sécant à un chapeau de T-filtre croissant  $\mathfrak{S}$  de  $\Delta(\mathfrak{F}_2, D)$ . Alors il existe un élément  $f \in H(D)$ , auto-annulé par  $\mathfrak{S}$ , et non annulé par  $\mathfrak{C}$ , de sorte que  $f \notin \mathfrak{J}(\mathfrak{F}_1)$  et  $f \in \mathfrak{J}(\mathfrak{F}_2)$ , et il existe  $g \in H(D)$ , auto-annulé par  $\mathfrak{C}$ , et non annulé par  $\mathfrak{S}$ , de sorte que  $g \notin \mathfrak{J}(\mathfrak{F}_2)$  et  $g \in \mathfrak{J}(\mathfrak{F}_1)$ , ce qui prouve que  $\mathfrak{J}(\mathfrak{F}_1)$  et  $\mathfrak{J}(\mathfrak{F}_2)$  sont incomparables.

LEMME I.5. - Soient  $\mathfrak{F}$  et  $\mathfrak{G}$  deux filtres circulaires de diamètres  $R$  et  $S$  d'un infraconnexe fermé borné  $D$  tels que  $\mathfrak{G}$  entoure  $\mathfrak{F}$ . Alors on a

$$\mathfrak{J}(\mathfrak{F}) \supset \mathfrak{J}(\mathfrak{G}) \quad (\text{resp. } \mathfrak{J}(\mathfrak{F}) \subset \mathfrak{J}(\mathfrak{G}))$$

si, et seulement si,  $\mathfrak{F}$  n'est entouré par aucun T-filtre croissant de diamètre  $r \in ]R, S[$  (resp. décroissant de diamètre  $r \in [R, S[$ ).

Preuve. - Soit  $\mathcal{C}$  un T-filtre croissant entourant  $\mathfrak{F}$  et de diamètre  $r \in ]R, S[$ ; il existe des éléments  $f \in H(D)$  auto-annulé par  $\mathcal{C}$ , donc annulés par  $\mathfrak{G}$  et non annulés par  $(\mathfrak{F})$ , de sorte que  $\mathfrak{J}(\mathfrak{F}) \neq \mathfrak{J}(\mathfrak{G})$ . Réciproquement, si  $\mathfrak{F}$  n'est entouré par aucun T-filtre croissant de diamètre  $r \in ]R, S[$ , la relation

$$w_{\mathfrak{F}}(f, -\log S) = +\infty$$

implique  $w_{\mathfrak{F}}(f, \mu) = +\infty$  pour tout  $\mu \in [-\log S, -\log R[$ , d'où

$$w_{\mathfrak{F}}(f, -\log R) = +\infty \quad \text{et} \quad \mathfrak{J}(\mathfrak{G}) \subset \mathfrak{J}(\mathfrak{F}).$$

De même, si  $\mathcal{C}$  est un T-filtre décroissant entourant  $\mathfrak{F}$ , de diamètre  $r \in [R, S[$ , il existe un élément  $f \in H(D)$  auto-annulé par  $\mathcal{C}$ , et donc annulé par  $\mathfrak{F}$  mais non par  $\mathfrak{G}$ , de sorte que  $\mathfrak{J}(\mathfrak{F}) \neq \mathfrak{J}(\mathfrak{G})$ , et si  $\mathfrak{F}$  n'est entouré par aucun T-filtre décroissant de diamètre  $r \in [R, S[$ , alors  $\mathfrak{J}(\mathfrak{F}) \subset \mathfrak{J}(\mathfrak{G})$ ; le lemme I.5 est donc établi.

LEMME I.6. - Soit  $\mathfrak{F}$  un filtre circulaire maximal d'un infraconnexe fermé borné  $D$  tel que  $\mathfrak{J}(\mathfrak{F})$  soit un idéal maximal de codimension  $\infty$ . Alors  $\mathfrak{F}$  est sous-distingué, et il existe un filtre circulaire distingué  $\mathfrak{G}$  qui entoure  $\mathfrak{F}$ , tel que  $\mathfrak{J}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{J}(\mathfrak{G})$ .

Preuve. - Nous allons montrer que  $\mathfrak{F}$  satisfait nécessairement (i) et (ii). En effet, pour tout  $a \in \Delta(\mathfrak{F}, D)$  il existe  $f \in \mathfrak{J}(\mathfrak{F})$  tel que  $f(a) \neq 0$ ; mais on a évidemment  $v_a(f, -\log R) = +\infty$ ; soit  $\mu_a$  le plus grand des nombres  $\mu$  tels que  $v_a(f, \mu) = +\infty$ . Alors  $f$  est strictement annulé par un T-filtre croissant  $\mathcal{C}_a$  de centre  $a$ , de diamètre  $p^{-\mu_a} \leq r$  de sorte que  $\Delta(\mathfrak{F}, D) \supset \mathcal{C}(\mathcal{C}_a)$ . Or par définition  $\bigcup_{a \in \Delta(\mathfrak{F}, D)} \mathcal{C}(\mathcal{C}_a) \supset \Delta(\mathfrak{F}, D)$ , donc la condition (i) est satisfaite.

Supposons maintenant que la condition (ii) ne soit pas satisfaite. Alors  $\Delta(\mathfrak{F}, D) \neq \emptyset$ , et il existe un T-filtre décroissant  $\mathcal{C}$  de  $\Delta(\mathfrak{F}, D)$ , de diamètre  $r$ , qui n'est sécant à aucun chapeau de T-filtre croissant de  $\Delta(\mathfrak{F}, D)$ . Alors, pour tout  $f \in \mathfrak{J}(\mathfrak{F})$ , on a  $f \in \mathfrak{J}(\mathcal{C})$ , car  $w_{\mathcal{C}}(f, -\log R) = +\infty$ , donc  $w_{\mathcal{C}}(f, \mu) = +\infty$  pour tout  $\mu \in [-\log R, -\log r[$  puisque  $\mathcal{C}$  n'est sécant à aucun chapeau de T-filtre croissant. Donc  $\mathfrak{J}(\mathfrak{F}) \subset \mathfrak{J}(\mathcal{C})$ . Or puisque  $\mathcal{C}$  est entouré par  $\mathfrak{F}$ , il est clair que tout élément  $f \in H(D)$ , strictement annulé par  $\mathcal{C}$  n'appartient pas à  $\mathfrak{J}(\mathfrak{F})$  ce qui contredit le fait que  $\mathfrak{J}(\mathfrak{F})$  soit maximal. Donc la condition (ii) est satisfaite, et  $\mathfrak{F}$  est sous-distingué.

Supposons maintenant que  $\mathfrak{F}$  ne soit pas distingué; alors il ne satisfait pas la condition (iii). Supposons d'abord que  $\mathfrak{F}$  ne soit entouré par aucun T-filtre

décroissant, et soit  $R'$  le diamètre de  $D$ . Soit  $\mathfrak{S}'$  le filtre circulaire de  $D$  de diamètre  $R'$ , qui entoure  $\mathfrak{F}$ . Alors on a  $\mathfrak{J}(\mathfrak{F}) \subset \mathfrak{J}(\mathfrak{S}')$  d'après le lemme 4, donc  $\mathfrak{J}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{J}(\mathfrak{S}')$  puisque  $\mathfrak{J}(\mathfrak{F})$  est un idéal maximal. Supposons enfin qu'il existe des  $T$ -filtres décroissants qui entourent  $\mathfrak{F}$ , et soit  $R''$  la borne inférieure de l'ensemble de leurs diamètres. Alors le filtre circulaire  $\mathfrak{S}''$  de diamètre  $R''$  qui entoure  $\mathfrak{F}$  est tel que  $\mathfrak{J}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{J}(\mathfrak{S}'')$  (toujours grâce au lemme I.4), et le filtre  $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}'$  ou  $\mathfrak{S}''$  que nous avons fait apparaître est sous-distingué puisque  $\mathfrak{J}(\mathfrak{S})$  est maximal, et il est clair que  $\mathfrak{S}$  satisfait la condition (iii) par définition, ce qui prouve le lemme I.6.

**PROPOSITION I.7.** - Soit  $\mathfrak{F}$  un filtre circulaire distingué d'un infraconnexe fermé borné  $D$ . Alors  $\mathfrak{J}(\mathfrak{F})$  est un idéal maximal de codimension infinie de  $H(D)$ .

Preuve de la proposition. - Soit  $\mathfrak{M}$  un idéal maximal contenant  $\mathfrak{J}(\mathfrak{F})$ . Alors  $\mathfrak{M}$  est de codimension infinie, car sinon  $\mathfrak{M}$  serait de la forme  $\mathfrak{J}(a)$  (où  $a \in D$ ), et on aurait donc  $f(a) = 0$  pour tout  $f \in \mathfrak{J}(\mathfrak{F})$ , ce qui contredit le fait que  $\mathfrak{F}$  soit distingué. Alors, d'après le lemme I.6,  $\mathfrak{M}$  est de la forme  $\mathfrak{J}(\mathfrak{S})$ , où  $\mathfrak{S}$  est un filtre circulaire distingué. Mais, d'après le lemme I.4, on a  $\mathfrak{S} = \mathfrak{F}$ .

**THÉORÈME I.8.** - L'application  $\mathfrak{J}$  induit une bijection de l'ensemble des filtres circulaires distingués sur l'ensemble des idéaux maximaux de codimension  $\infty$ .

Preuve. - Grâce au lemme I.4 et à la proposition I.7, il est clair que  $\mathfrak{J}$  induit une injection de l'ensemble des filtres circulaires distingués dans l'ensemble des idéaux maximaux de codimension  $\infty$ . Mais grâce à la proposition I.7 et au lemme I.5, tout idéal maximal de codimension  $\infty$  de  $H(D)$  est de la forme  $\mathfrak{J}(\mathfrak{F})$ , où  $\mathfrak{F}$  est un filtre circulaire distingué, ce qui prouve le théorème I.8.

**COROLLAIRE I.9.** - Un idéal maximal d'une algèbre de Banach  $H(D)$  sans idempotent différent de 0 et 1 est

ou bien principal, de codimension 1, de la forme  $\mathfrak{J}(a) = (x - a)H(D)$ , où  $a \in \mathring{D}$ ;

ou bien de type infini, de codimension 1, de la forme  $\mathfrak{J}(a)$ , où  $a \in D - \mathring{D}$ ;

ou bien de type et de codimension infinis, de la forme  $\mathfrak{J}(\mathfrak{F})$ , où  $\mathfrak{F}$  est un filtre circulaire distingué.

## II. Filtres distingués irréguliers.

### 1. Problème.

Nous allons chercher maintenant à quelle condition on peut avoir un filtre sous-distingué  $\mathfrak{S}$  et un filtre distingué  $\mathfrak{F}$  tels que

$$\mathfrak{J}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{J}(\mathfrak{S}) .$$

PROPOSITION II.1. - Soit  $\mathcal{S}$  un filtre circulaire distingué de diamètre  $S$ , et soit  $\mathcal{F}$  un filtre circulaire sous-distingué de diamètre  $R$  tel que  $\mathfrak{J}(\mathcal{F}) = \mathfrak{J}(\mathcal{S})$ . Alors  $\mathcal{S}$  entoure  $\mathcal{F}$  et, pour tout  $a \in D$  tel que  $w_{\mathcal{F}}(a) \in (-\log S, -\log R)$ ,  $a$  est centre d'un  $T$ -filtre croissant de diamètre  $\leq p$ .

Il est immédiat de voir que  $\mathcal{S}$  entoure  $\mathcal{F}$ , car  $\mathcal{F}$  est entouré par un filtre circulaire distingué  $\mathcal{S}'$  tel que  $\mathfrak{J}(\mathcal{S}) = \mathfrak{J}(\mathcal{F}) = \mathfrak{J}(\mathcal{S}')$ . Or  $\mathfrak{J}(\mathcal{S}) = \mathfrak{J}(\mathcal{S}')$  implique  $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$  d'après le lemme 2. D'autre part, puisque  $\mathcal{S}$  est distingué, pour tout  $a \in \Delta(\mathcal{S}, D)$ ,  $a$  est centre d'un  $T$ -filtre croissant  $\mathcal{C}$  de diamètre  $\rho \leq S$ . Mais puisque  $\mathcal{C}$  n'entoure pas  $\mathcal{F}$ , on a  $-\log \rho \geq w_{\mathcal{F}}(a)$ , ce qui prouve la proposition II.1.

DÉFINITION. - Nous dirons qu'un filtre circulaire distingué  $\mathcal{S}$  d'un infraconnexe fermé borné  $D$  est régulier si  $D$  n'admet pas de filtre circulaire sous-distingué  $\mathcal{F}$ , différent de  $\mathcal{S}$ , tel que  $\mathfrak{J}(\mathcal{F}) = \mathfrak{J}(\mathcal{S})$ . Si  $\mathcal{S}$  n'est pas régulier, nous dirons que  $\mathcal{S}$  est irrégulier.

Remarque. - En particulier, on voit que si  $\mathcal{S}$  est un filtre circulaire irrégulier de diamètre  $R$ , alors  $\Delta(\mathcal{S}, D) \neq \emptyset$  et si  $a \in \Delta(\mathcal{S}, D)$ , la borne supérieure  $R'$  des diamètres de  $T$ -filtres croissants de centre  $a$ , de  $\Delta(\mathcal{S}, D)$  est telle que  $R' < R$  ce qui prouve, d'après la proposition II.1, que, pour tout  $r \in [R', R] \cap |K|$  et pour toute classe  $\Gamma$  du cercle  $C(a, r)$ ,  $\Gamma$  contient au moins un trou de  $D$ .

Inversement, on obtient un exemple de filtre circulaire irrégulier de la façon suivante. Soit  $D$  un infraconnexe fermé de diamètre  $R$  admettant une famille de  $T$ -filtres croissants  $(\mathcal{C}_i)_{i \in I}$  de diamètre  $r_i < R$  (pour tout  $i \in I$ ), telle que la famille  $(C(\mathcal{C}_i))_{i \in I}$  soit une partition de  $D$ , et supposons que les seuls  $T$ -filtres de  $D$  soient la famille  $(\mathcal{C}_i)_{i \in I}$ . Alors le filtre circulaire  $\mathcal{F}$  de  $D$  tel que  $\Delta(\mathcal{F}, D) = D$  est un filtre circulaire distingué par construction car  $\Delta(\mathcal{F}, D)$  n'admet aucun  $T$ -filtre décroissant et que  $\Delta(\mathcal{F}, D) = \bigcup_{i \in I} C(\mathcal{F}_i)$ . Or  $\mathcal{F}$  est irrégulier car, pour tout  $i$ ,  $\mathcal{C}_i$  est associé à un filtre circulaire  $\mathcal{F}_i$  de  $D$  qui n'est entouré par aucun  $T$ -filtre croissant ou décroissant, ce qui prouve que  $\mathfrak{J}(\mathcal{F}) = \mathfrak{J}(\mathcal{F}_i)$ , d'après le lemme I.4, puisque  $\mathcal{F}$  entoure  $\mathcal{F}_i$ . Mais comme  $r_i < R$ ,  $\mathcal{F}_i \neq \mathcal{F}$ , et  $\mathcal{F}$  est donc irrégulier.

L'existence de filtres circulaires réguliers est évidente. Il suffit par exemple de considérer un infraconnexe fermé  $D$  de diamètre  $R$  tel que, pour tout  $a \in D$ , il existe un  $T$ -filtre croissant de diamètre  $R$ . Alors le filtre circulaire maximal  $\mathcal{F}$  de  $D$  tel que  $\Delta(\mathcal{F}, D) = D$  est distingué et régulier de façon évidente.

Par contre, le problème de l'existence de filtre circulaire irrégulier est beaucoup plus délicat. Or ce problème est lié à un autre problème soulevé par B. GUENNEBAUD :

Soit  $(A, \|\cdot\|)$  une  $K$ -algèbre de Banach, et soit  $\mathfrak{M}$  un idéal maximal de codi-

mension infinie ; le corps  $\Gamma = A/\mathfrak{M}$  peut-il être muni de plusieurs valeurs absolues continues pour la norme de  $K$ -algèbre de Banach de  $\Gamma$  quotient de celle de  $A$  ? Si l'on note  $\phi$  la surjection canonique de  $A$  sur  $\Gamma$ , il est clair que l'ensemble des valeurs absolues continues  $w$  du corps normé  $\Gamma$  est en bijection avec l'ensemble des  $f \in \text{Mult}(A, \|\cdot\|)$  tels que  $\text{Ker}(f) = \mathfrak{M}$  par l'application  $w \rightarrow f_w$  telle que  $f_w(x) = w(\phi(x))$ , et l'on est donc ramené, par l'intermédiaire des  $f_w$ , à rechercher deux filtres circulaires maximaux distincts  $\mathfrak{F}_1$  et  $\mathfrak{F}_2$  tels que  $\mathfrak{J}(\mathfrak{F}_1) = \mathfrak{J}(\mathfrak{F}_2) = \mathfrak{M}$ .

Si  $\mathfrak{S}$  est un filtre circulaire irrégulier, alors il existe en effet des filtres circulaires sous-distingués  $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{S}$  tels que  $\mathfrak{J}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{J}(\mathfrak{S})$ , et réciproquement, si  $\mathfrak{J}(\mathfrak{F}_1) = \mathfrak{J}(\mathfrak{F}_2) = \mathfrak{M}$ , alors, d'après le lemme I.4 et la proposition I.7,  $\mathfrak{F}_1$  et  $\mathfrak{F}_2$  sont entourés par un même filtre circulaire distingué  $\mathfrak{S}$  tel que

$$\mathfrak{J}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{J}(\mathfrak{F}_1) = \mathfrak{J}(\mathfrak{F}_2) = \mathfrak{M},$$

et comme  $\mathfrak{F}_1 \neq \mathfrak{F}_2$ , on a au moins  $\mathfrak{F}_1$  ou  $\mathfrak{F}_2 \neq \mathfrak{S}$ , ce qui prouve que  $\mathfrak{S}$  est irrégulier.

On voit donc que le problème posé par B. GUENNEBAUD, lorsqu'il est restreint à l'étude des algèbres de Krasner, se ramène à celui de l'existence de filtres circulaires distingués irréguliers.

## 2. Existence de filtres circulaires distingués irréguliers.

Nous allons résoudre ce problème grâce au théorème II.3. Nous utiliserons à cette occasion le lemme suivant qui est trivial.

**LEMME II.2.** - Soit une famille  $\phi$  de nombres  $> 0$  non dénombrable. Alors il existe  $\delta > 0$ , et il existe une sous-famille  $\phi'$ , non dénombrable, de  $\phi$ , telle  $x \geq \delta$  pour tout  $x \in \phi'$ .

**Preuve.** - Si le lemme était faux, l'ensemble  $\phi_n$  des  $x \in \phi$  tels que  $x \geq \frac{1}{n}$  serait dénombrable pour tout  $n$ , et  $\phi = \bigcup_{n=1}^{\infty} \phi_n$  serait dénombrable.

Soit  $|K| = \{|x| ; x \in K\}$ , et soit  $k$  le corps résiduel de  $K$ .

**THÉOREME II.3.** - Si  $|K|$  ou  $k$  est non dénombrable, tout filtre circulaire distingué d'un infraconnexe fermé borné de  $K$  est régulier. Si  $|K|$  et  $k$  sont dénombrables, il existe des infraconnexes fermés bornés admettant des filtres circulaires distingués irréguliers.

**Preuve.** - Supposons qu'un infraconnexe  $D$  admette un filtre circulaire distingué irrégulier  $\mathfrak{S}$ , de diamètre  $R$ , et soit un point  $0 \in \Delta(\mathfrak{S}, D)$  pris pour origine.

D'après la remarque précédente, il existe un nombre  $R' < R$  qui majore tous les diamètres des  $T$ -filtres croissants de  $\Delta(\mathcal{S}, D)$ , centrés en  $0$ , et tel que, pour tout  $r$  appartenant à l'ensemble  $J = [R', R] \cap |K|$ , toute classe  $\Gamma$  du cercle  $C(r) = \{x \in K; |x| = r\}$  contienne au moins un trou de  $D$ . Nous allons montrer que si  $|K|$  ou  $k$  est non dénombrable, alors  $D$  admet un  $T$ -filtre croissant de centre  $0$ , de diamètre  $R$ , ce qui contredit en effet le fait que  $\mathcal{S}$  soit irrégulier.

Supposons d'abord  $k$  non dénombrable, et montrons que  $\Delta(\mathcal{S}, D)$  admet un  $T$ -filtre croissant de centre  $0$ , de diamètre  $R$ .

Pour cela, remarquons que, pour tout  $r \in J$ , il existe un nombre  $\rho(r) > 0$  et une suite  $\Gamma_n(r)$  de classes de  $C(r)$  contenant chacune au moins un trou de  $D$ ,  $T_n(r)$  de diamètre au moins égal à  $\rho(r)$ . En effet, sinon l'ensemble des classes percées de  $C(r)$  serait dénombrable d'après le lemme II.2, ce qui est faux, puisque toute classe est percée, et que  $k$  est non dénombrable. Nous allons construire le  $T$ -filtre croissant cherché de la façon suivante. Soit  $d_n$  une suite croissante de  $J$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = R$ , et soient  $C_m = C(d_m)$  et  $\rho_m = \rho(d_m)$ .

Pour tout  $m \geq 2$ , soit  $q_{m-1}$  tel que  $(d_{m-1}/d_m)^{q_{m-1}} \times d_m/\rho_m < 1/m$ . Alors il est clair que  $(d_m/\rho_m) \prod_{j=1}^{m-1} (d_j/d_m)^{q_j} < 1/m$  quel que soit  $m \geq 2$ . Considérons maintenant  $q_m$  classes  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{q_m}$  de  $C_m$  contenant au moins chacune un trou de  $D$  de diamètre supérieur ou égal à  $\rho_m$ . Alors, on a trivialement

$$\gamma_D(\Gamma_i, 1) \leq d_m/\rho_m.$$

Alors soit  $\gamma_m = \inf_{1 \leq i \leq q_m} \gamma(\Gamma_i, D, 1)$ . Il est clair que la suite  $(C_m, d_m, q_m, \gamma_m)$  est une suite caractéristique d'un  $T$ -filtre croissant de  $D$  dont le diamètre est  $R$ . La démonstration est donc achevée pour  $k$  dénombrable.

Supposons maintenant que  $|K|$  est non dénombrable. Soit  $r_n$  une suite croissante de  $J$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = R$ , et soit  $r'_n$  une suite croissante de  $J$  telle que  $r_{n-1} < r'_n < r_n$ , quel que soit  $n$ . Puisque  $|K|$  est non dénombrable,

$$J \cap [r_{n-1}, r'_n]$$

est non dénombrable et, d'après le lemme II.2, il existe une suite de nombres  $\rho_n > 0$  et, pour tout  $n$  fixé, il existe une suite  $j \rightarrow (\xi_j^n)$  de  $J$  telle que  $r_{n-1} < \xi_j^n < r'_n$  quel que soit  $j$  et telle que le cercle  $C(\xi_j^n)$  contienne au moins un trou  $T_j^n$  de  $D$  de diamètre supérieur ou égal à  $\rho_n$ . Alors, pour tout  $n$  fixé, choisissons une classe  $\Gamma_j^n$  du cercle  $C(\xi_j^n)$  telle que  $\Gamma_j^n$  contienne un trou  $T_j^n$  de diamètre  $\geq \rho_n$ . Alors, par hypothèse, on a  $\gamma_D(\Gamma_j^n, 1) \leq R/\rho_n$  pour tout  $j \in \mathbb{N}$ , et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Définissons une suite  $d_m$  de la façon suivante. Pour tout  $n$ , soit  $S_n \in \mathbb{N}$  tel que  $(1/\rho_n)(r'_n/r_n)^{S_n} < 1/n$  et soit  $t_n = \sum_{i=1}^n S_i$ . Alors, soit  $d_m = \xi_{m-t_n}^{n+1}$ , et soit  $\gamma_m = \gamma_D(\Gamma_{m-t_n}^{n+1}, 1)$  pour tout  $m$  tel que  $t_n < m \leq t_{n+1}$ . Il est clair que, si  $t_n < m \leq t_{n+1}$ , on a  $\gamma_m \prod_{j=1}^{m-1} d_j/d_m < 1/n$ , ce qui montre que la suite

$(C(d_m), d_m, 1, \gamma_m)$  est une suite caractéristique d'un T-filtre. La première partie du théorème est donc établie.

Montrons maintenant que si  $|K|$  et  $k$  sont dénombrables, alors il existe des infraconnexes fermés bornés admettant un filtre circulaire distingué irrégulier. Pour cela, nous allons construire un infraconnexe  $D$  inclus dans la couronne  $1/2 < |x| < 1$ , tel que, pour tout cercle  $C(0, r)$ , où  $1/2 < r < 1$  et  $r \in |K|$ , et, pour toute classe  $\Gamma$  de  $C(0, r)$ ,  $\Gamma \cap D$ . Soit un infraconnexe dont l'ensemble des trous internes est une suite à distances croissantes qui définit un T-filtre croissant  $\mathcal{C}(\Gamma)$ , de diamètre  $r$ , satisfaisant certaines conditions que nous préciserons ensuite.

Il est clair que la famille des ensembles  $\mathcal{C}(\mathcal{C}(\Gamma))$ , où  $\Gamma$  parcourt l'ensemble  $\Lambda$  des classes de tous les cercles  $C(0, r)$ ,  $r \in ]\frac{1}{2}, 1[ \cap |K|$ , est une partition de  $D$ ; alors nous montrerons que l'on peut imposer aux T-filtres  $\mathcal{C}(\Gamma)$  ( $\Gamma \in \Lambda$ ) des conditions telles que tout T-filtre de  $D$  appartienne à l'ensemble  $\tau$  des T-filtres  $\mathcal{C}(\Gamma)$ ,  $\Gamma \in \Lambda$ , ce qui prouve que le filtre circulaire de  $D$  de centre  $0$ , de diamètre  $1$ , est distingué et irrégulier d'après la remarque qui précède.

Pour tout  $r \in ]\frac{1}{2}, 1[ \cap |K|$ , écrivons  $\log r$  sous sa forme irréductible  $\frac{a}{b} \in \mathcal{Q}$ , et soit  $\ell(r) = a^b$ . Alors il est immédiat de voir que l'application définie sur  $]\frac{1}{2}, 1[ \cap |K|$  par  $r \rightarrow \ell(r)$  est injective. Pour chaque cercle  $C(0, r)$  et pour tout entier  $q \geq 1$ , soit

$$\gamma(r, q) = \sup_{\substack{i=1, \dots, k \\ q_1 + \dots + q_k = q}} \gamma_D(\Gamma_i, q_i),$$

les  $\Gamma_i$  sont des classes quelconques du cercle  $C(0, r)$ .

Nous construirons ultérieurement l'ensemble  $D$  tel que l'on ait, pour tout  $r$  et pour tout  $q \in \mathbb{N}$ ,

$$(1) \quad \log \gamma(r, q) \geq \ell(r)^{2^{(\ell(r)+1)}} \sqrt[q]{q},$$

et nous allons montrer que si cette relation est vraie, pour tout  $r$  et pour tout  $q$ , alors le problème est résolu.

En effet, supposons que  $D$  admette un T-filtre  $\mathfrak{F}$  qui n'appartienne pas à la famille  $\tau$ . Alors  $\mathfrak{F}$  n'est sécant à aucune classe  $\Gamma$  d'aucun cercle  $C(0, r)$  puisque le seul T-filtre d'un ensemble de la forme  $\Gamma \cap D$  appartient à  $\tau$  par construction. Par conséquent,  $\mathfrak{F}$  admet l'origine pour centre; soit  $R$  son diamètre. Nous supposons, pour la démonstration, que  $\mathfrak{F}$  est croissant; si  $\mathfrak{F}$  est décroissant, on obtient naturellement par inversion une démonstration calquée sur celle-ci puisque de toute façon  $\mathfrak{F}$  est centré à l'origine.

Exprimons le fait que  $\mathfrak{F}$  soit un T-filtre croissant.

Il existe une suite  $d_m \in K$  telle que  $d_m < d_{m+1}$  et  $\lim_{m \rightarrow \infty} d_m = R$ , et une suite d'entiers  $q_m$  satisfaisant

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{m-1} (\log R - \log d_j) q_j - \log \gamma_m(q_m) = +\infty$$

où l'on note  $\gamma_m(q_m) = \gamma(d_m, q_m)$ . A fortiori, on a donc

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{m-1} q_j - \log \gamma_m(q_m) = +\infty$$

et, trivialement, il existe un rang  $u$  tel que, pour tout  $m \geq u$ , on ait

$$\sum_{j=1}^{m-1} q_j - \log \gamma_m(q_m) \geq 0,$$

d'où, grâce à (1),

$$(2) \quad \sqrt{q_m} \leq (\sum_{j=1}^{m-1} q_j) / \lambda_m,$$

où l'on pose

$$(3) \quad \lambda_m = \ell(d_m) (2^{\ell(d_m)+1}).$$

Pour tout  $m$ , soit  $h(m) = \sup_{j < m} q_j$ ; alors, d'après (2), on a  $q_m \leq (mh(m)/\lambda_m)^2$ . On en déduit, par récurrence et à l'aide de majorations grossières, en posant  $A = h(u)$ , que la suite  $q_m$  admet une suite majorante de la forme  $(mA)^{2m}/\lambda_m^2$ . En effet, il existe une suite finie  $n_1, \dots, n_s$  telle que  $q_{n_1} = h(m)$ ,  $q_{n_{i+1}} = h(n_i)$ ,  $1 \leq i \leq s-1$ ,  $q_u = h(n_s)$ , et l'on voit par récurrence que

$$q_m \leq (m^2 n_1^2 \dots n_s^{2^{s+1}} h(u)^{2^{s+1}}) / (\lambda_m^2 \lambda_{n_1}^2 \dots \lambda_{n_s}^{2^{s+1}}),$$

d'où a fortiori

$$q_m \leq (m^{\sum_{i=1}^{m-1} 2^i} A^{2^{m-1}}) / \lambda_m^2,$$

car  $s+1 \leq m-u \leq m-1$ ; or  $\sum_{i=1}^{m-1} 2^i \leq 2^{m-1}/\log 2 \leq 2^m$ , d'où finalement

$$(4) \quad q_m \leq (mA)^{2^m} / \lambda_m^2.$$

D'autre part, comme la fonction définie sur  $Q \cap ]1/2, 1[$  par  $r \rightarrow n(r)$  est injective, la suite  $m \rightarrow \gamma(m) = n(d_m)$  est injective et il existe donc une sous-suite  $t \rightarrow m_t$  telle que  $\gamma(m_t) \geq m_t$  pour tout  $t$ . Alors d'après (2) et (3), la relation (4) donne

$$\begin{aligned} q_{m_t} &\leq (A^{2^{m_t}} m_t^{(2^{m_t})}) / [\gamma(m_t) (2^{\gamma(m_t)})]^4 \\ &= (A^{(2^{m_t})} / \gamma(m_t) (2^{\gamma(m_t)})) (m_t^{(2^{m_t})} / \gamma(m_t) (2^{\gamma(m_t)}))^{1/\gamma(m_t) (2^{\gamma(m_t)+1})} \\ &\leq 1/\gamma(m_t) (2^{\gamma(m_t)+1}), \end{aligned}$$

ce qui prouve que  $\lim_{t \rightarrow \infty} q_{m_t} = 0$ , donc  $q_{m_t} < 1$  pour  $t$  assez grand, ce qui est absurde puisque  $q_m > 1$  pour tout  $m$ , par définition.

Construisons maintenant l'ensemble  $D$  tel que, pour toute classe  $\Gamma \in \Lambda$ ,  $\Gamma \cap D$  admette un  $T$ -filtre croissant de diamètre  $r = \text{diam}(\Gamma)$  et tel que l'on ait pour chaque cercle  $C(0, r)$ ,  $\log \gamma(r, q) \geq \ell(r) (2^{\ell(r)+1}) / \sqrt{q}$ .

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ ; nous allons définir un ensemble  $\Delta(\lambda)$  qui servira ensuite de modèle pour construire chaque classe d'un cercle  $C(0, r)$  de l'ensemble  $D$  cherché. Soit  $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots$  une suite de  $K$  telle que  $v(\alpha_n) = \lambda/\sqrt{n}$ , et soit

$\Delta(\lambda)$  l'ensemble des  $x \in K$  tels que  $v(x) > 0$  et  $v(x - \alpha_n) \leq \lambda(\sqrt{n}/2)$ , quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ .

Il est immédiat de voir que  $\Delta(\lambda)$  admet un T-filtre croissant de diamètre 1. En effet  $\Delta(\lambda)$  admet un filtre percé croissant  $\mathfrak{F}$  de diamètre 1, défini pour la suite des trous  $T_n$  de centre  $\alpha_n$ , de diamètre  $\rho_n = \exp(-(\lambda\sqrt{n}/2))$ , et si l'on note  $\delta_n = d(0, T_n)$ , on a  $\log \delta_n = -(\lambda\sqrt{n})$  de sorte que

$$\sum_{j=1}^{n-1} (\log \delta_n - \log \delta_j) = \lambda \left[ \left( \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{j}} \right) - \sqrt{n} \right] \geq \lambda\sqrt{n}$$

et

$$\left( \sum_{j=1}^{n-1} \log \delta_n - \log \delta_j \right) + \log \rho_n \geq \frac{\lambda}{2} \sqrt{n}.$$

Ce qui prouve que  $\mathfrak{F}$  est un T-filtre.

Nous allons maintenant minorer les expressions  $\gamma(\Delta(\lambda), q)$ ,  $q \in \mathbb{N}$ . Nous allons établir la relation

$$(5) \quad \log \gamma(\Delta(\lambda), q) \geq \frac{\lambda\sqrt{q}}{2}.$$

En effet, soient  $a_1, \dots, a_q$  appartenant à des trous internes  $T_{n_1}, \dots, T_{n_q}$  (non nécessairement tous distincts) de  $\Delta(\lambda)$ . Alors, ou bien il existe un indice  $i$  tel que  $n_i \geq q$ , et alors

$$\log \left\| \frac{1}{x - a_i} \right\|_{\Delta(\lambda)} = -\log \rho_{n_i} \geq \frac{\lambda\sqrt{q}}{2}$$

d'où a fortiori

$$\log \left\| 1 / \left( \prod_{i=1}^q (x - a_i) \right) \right\|_{\Delta(\lambda)} \geq \frac{\lambda\sqrt{q}}{2},$$

ou bien  $n_i < q$ , pour tout  $i$ , et alors, pour  $|x| \leq d_q$ , on a  $\left| \prod_{i=1}^q (x - a_i) \right| \leq d_q^q$ , d'où

$$\log \left\| \frac{1}{\prod_{i=1}^q (x - a_i)} \right\|_{\Delta(\lambda)} \geq \lambda q \log d_q = \lambda\sqrt{q}$$

ce qui prouve la relation (5) dans tous les cas.

Avant de construire l'ensemble  $D$ , remarquons encore que, si un infraconnexe  $D_2$  de  $K$  est image d'un infraconnexe  $D_1$  par une similitude  $S$ , on a, pour tout  $q \in \mathbb{N}$ ,  $\gamma(D_2, q) = \gamma(D_1, q)$ . D'autre part, si  $D_1$  admet, par exemple, un T-filtre de centre  $a$ , de diamètre  $r$ , alors  $D_2$  admet un T-filtre de centre  $S(a)$ , de diamètre  $\rho r$ , où  $\rho$  est le rapport de la similitude  $S$ .

Pour tout  $r \in \frac{1}{2}$ ,  $1[$ , on peut indexer les classes du cercle  $C(0, r)$  en une suite  $\Gamma_n$  puisque  $k$  est dénombrable. Soit  $a_n$  une suite de  $C(0, r)$  telle que  $a_n \in \Gamma_n$ ; notons

$$B(r) = \ell(r) (2^{\ell(r)+1})$$

et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $\Delta_{r,n}$  l'image de  $\Delta(2^{n+1} B(r))$  par une similitude de rapport  $r$  qui applique 0 sur  $a_n$ , et soit  $D = \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}, r \in \frac{1}{2}, 1[} \Delta_{r,n} \right)$ . D'après les propriétés des ensembles  $\Delta(\lambda)$  que l'on retrouve dans les  $\Delta_{r,n}$ , il est clair que, pour chaque classe  $\Gamma$  de  $C(0, r)$ ,  $\Gamma \cap D$  possède un T-filtre unique croissant, de diamètre  $r$ ; il reste donc à montrer que  $D$  n'admet pas

d'autre T-filtre que ceux-ci et, pour cela, comme nous l'avons vu, que les expressions  $\gamma(r, q)$  satisfont la relation (1).

En effet, d'après la relation (5), on a

$$\log \gamma(\Delta_{r,n}, q) \geq 2^{n+2} B(r) \frac{\sqrt{q}}{2} = 2^{n+1} B(r) \sqrt{q}.$$

Mais en reprenant les notations précédentes, on a

$$\log \gamma(r, q) = \sup_{\substack{i=1, \dots, k \\ q_1 + \dots + q_k = q}} \log \gamma_D(\Gamma_i, q_i) = \sup_{\substack{i=1, \dots, k \\ q_1 + \dots + q_k = q}} \log \gamma_D(\Delta_{r, n_i}, q_i),$$

ce qui nous donne, pour tout  $i = 1, \dots, k$ ,

$$\sqrt{q_i} 2^{n_i+1} B(r) \leq \log \gamma(r, q),$$

d'où

$$q = \sum_{i=1}^k q_i \leq \left( \frac{\log \gamma(r, q)}{B(r)} \right)^2 \sum_{i=1}^k 2^{-(n_i+1)}.$$

Mais comme  $n_i \neq n_j$  pour  $i \neq j$  (par définition), on a

$$\sum_{i=1}^k 2^{-(n_i+1)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-(n+1)} = 1$$

d'où la relation cherchée  $\sqrt{q} B(r) \leq \log \gamma(r, q)$  et l'ensemble  $D$  est construit.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] ESCASSUT (Alain). - Algèbres d'éléments analytiques en analyse non archimédienne, Indag. Math., Amsterdam (à paraître).
- [2] ESCASSUT (Alain). - Eléments analytiques et filtres percés sur un ensemble infraconnexe (à paraître).
- [3] ESCASSUT (Alain). - T-filtres et ensembles analytiques (à paraître).
- [4] ESCASSUT (Alain). - Algèbres de Krasner intègres et noethériennes (à paraître).
- [5] ESCASSUT (Alain). - Algèbres de Banach ultramétriques et algèbres de Krasner-Tate, "Plongement analytique et algèbres de Banach ultramétriques", Astérisque, 1973, n° 10, p. 1-107.
- [6] GARANDEL (Gérard). - Les semi-normes multiplicatives sur les algèbres d'éléments analytiques au sens de Krasner, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 278, 1974, Série A, p. 823-826.
- [7] GRUSON (Laurent). - Algèbres de Banach ultramétriques, "Colloque Poitou-Aquitaine : Prolongement analytique p-adique [1967. Poitiers] (multigraphié).
- [8] GUENNEBAUD (Bernard). - Algèbres localement convexes sur les corps valués, Bull. Sc. math., 2e série, t. 91, 1967, p. 75-96.
- [9] GUENNEBAUD (Bernard). - Sur une notion de spectre pour les algèbres normées ultramétriques, Thèse Sc. math. Poitiers, 1973.
- [10] KRASNER (Marc). - Prolongement analytique uniforme et multiforme dans les corps valués complets. "Colloques internationaux du C.N.R.S., 143 : Les tendances géométriques en algèbre et théorie des nombres, [1964, Clermont-Ferrand]", p. 97-141. - Paris, Centre national de la Recherche scientifique, 1966.
- [11] MOTZKIN (Elhanan) et ROBBA (Philippe). - Plongement analytique en analyse p-adique, Séminaire de Théorie des Nombres, Faculté des Sciences de Bordeaux, 1968/1969, n° 3 (multigraphié).

- [12] NAGATA (Masayoshi). - Local rings. - New York, J. Wiley and Sons, 1962  
(Interscience Tracts in pure and applied Mathematics, 13).
- [13] ROBBA (Philippe). - Fonctions analytiques sur les corps valués ultramétriques complets : "Plongement analytique et algèbres de Banach ultramétriques",  
Astérisque, 1973, n° 10, p. 109-218.
- [14] SALMON (Pietro). - Serie convergenti su un corpo non archimedeo con applicazione ai fasci analitici, Annali di Matematica pura ed appl., Serie 4,  
t. 65, 1964, p. 113-126.
- [15] TATE (John). - Rigid analytic spaces, Invent. Math., Berlin, t. 12, 1971, p.  
257-289.

(Texte reçu le 7 juin 1974)

Alain ESCASSUT  
8 allée Sirius  
33120 ARCACHON

---