

GROUPE DE TRAVAIL D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

MARIE-CLAUDE SARMANT-DURIX

Existence de fonctions croulantes

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 5 (1977-1978), exp. n° 17, p. 1-10

http://www.numdam.org/item?id=GAU_1977-1978__5__A10_0

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique
(Secrétariat mathématique, Paris), 1977-1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

EXISTENCE DE FONCTIONS CROULANTES

par Marie-Claude SARMANT-DURIX

I. Fonctions s'écroulant pour une seule valeur du spectre

1. Hypothèses.

Nous sommes dans un corps k ultramétriquement valué, complet, algébriquement clos et maximalelement complet [2].

Soient R' et R deux réels positifs tels que $R' < R$. Soit $\{b_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de k tels que :

(i) $R' < |b_i|_p < R, \forall i \in \mathbb{N},$

(ii) $\inf_{b_i \neq b_j} |b_i - b_j|_p = \rho_0 > 0$

(iii) $\Delta = \{x \in k ; R' < |x|_p < R, x \neq b_i, \forall i \in \mathbb{N}\}$ est quasi connexe.

On pose, pour $\rho \in \mathbb{R}^+, \rho < \rho_0,$

$$\Delta_\rho = \{x \in k ; R' < |x|_p < R, |x - b_i|_p > \rho, \forall i \in \mathbb{N}\}.$$

Rappel. - Soit $f(x)$ une fonction analytique sur Δ telle que $f \in H(\Delta_\rho), \forall \rho > 0$. Alors l'équation $f(x) + \alpha = 0$ a un nombre fini de solutions dans Δ_ρ , sauf peut-être au plus pour une valeur α_0 de α . Dans ce cas, $f(x) + \alpha_0$ n'est pas quasi inversible dans Δ_ρ , et

$$\lim_{|x| \rightarrow R, x \in \Delta_\rho} f(x) + \alpha_0 = 0.$$

On dit alors que $f(x) + \alpha_0$ s'écroule pour $|x|_p = R$. Ceci ne peut arriver que si Δ admet un \mathbb{T} -filtre croissant \mathcal{C} , ce que nous supposerons ici. Δ_ρ admet aussi un \mathbb{T} -filtre croissant \mathcal{C}_ρ [1].

2. Valeur d'écroulement d'une fonction croulante simple.

Nous savons [8] que, pour $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, une suite d'éléments de k telle que $a_i - b_i \rightarrow 0$ quand $i \rightarrow +\infty$, la fonction

$$f(x) = \prod_{i=0}^{\infty} \left(\frac{x - a_i}{x - b_i} \right) + \alpha, \text{ où } \alpha \in k,$$

s'écroule pour une valeur de α au plus.

Supposons donc que $f(x) = \prod_{i=0}^{\infty} ((x - a_i)/(x - b_i)) + \alpha$ s'écroule. Nous allons calculer α .

Posons $T = \{x \in k ; |x|_p > 1\}$, T est un trou de Δ_ρ .

Nous savons que $f(x) \in H(\Delta_\rho)$ [8]. Il existe donc $f_T(x) \in H(CT)$ tel que $f - f_T$ se prolonge dans T et soit nul à l'infini (C'est la partie singulière de f relative au trou T) [7].

Posons [4] $s(f, T) = \sup_{|x|=R} |f(x)|$, donc $s(f, T) = 0$. Nous savons que $\|f_T\|_{CT} \leq s(f, T)$, donc $\|f_T\|_{CT} = 0$, et $f_T(x) = 0$.

D'autre part, $\|f - f_T\|_T \leq s(f, T)$, donc $f - f_T = 0$, et $f(x) = 0$ sur T .

Comme $f(x) = 0$ sur T , $\prod_{i=0}^{\infty} ((x - a_i)/(x - b_i)) + \alpha \equiv 0$ sur T . Faisons tendre x vers $+\infty$,

$$\prod_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{x - a_i}{x - b_i} \right) \rightarrow 1.$$

Donc $\alpha = -1$.

3. Fonction croulante ayant une famille de pôles donnée.

La famille des $\{b_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ étant définie comme à l'alinéa 1, elle remplit une condition nécessaire pour qu'il existe une fonction croulante ayant les b_i pour zéros. Voyons si c'est une condition suffisante.

Δ_ρ admet, $\forall \rho < \rho_0$, un T -filtre croissant.

Soient d_0, \dots, d_n, \dots les différentes valeurs de $|b_i|_p$

$$0 \leq d_0 < d_1 < \dots < d_n < d_{n+1} < \dots < R \text{ et } d_n \rightarrow R \text{ si } n \rightarrow +\infty.$$

Soient $b_n^1, \dots, b_n^{k_n}$ les b_i de valeur absolue d_n : Il y en a un nombre fini k_n .

La condition " Δ_ρ admet un T -filtre croissant" est équivalente à la condition [5]:

"Il existe des entiers $q_{n,i}$, $1 \leq i \leq k_n$, tels que, si l'on pose $q_n = \sum_{i=1}^{k_n} q_{n,i}$, on a $\forall i_0$ tel que $1 \leq i_0 \leq k_n$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{d_n}{\rho} \right)^{q_{n,i_0}} \prod_{i=1, i \neq i_0}^{k_n} \left(\frac{d_n}{|b_n^i - b_n^{i_0}|_p} \right)^{q_{n,i}} \prod_{j=0}^{n-1} \left(\frac{d_j}{d_n} \right)^{q_n} \right] = 0.$$

k est maximalement complet, nous savons [3] qu'il existe une série de Taylor g de rayon de convergence R qui admet pour seuls zéros les b_n^i , chacun avec l'ordre de multiplicité $q_{n,i}$.

LEMME 1 [5]. - $\lim_{|x|_p \rightarrow R, x \in \Delta_\rho} |g(x)|_p = +\infty$.

Démonstration. - Posons $P_j(x) = \prod_{i=1}^k (1 - (x/b_j^i))$. Alors

$$g(x) = \prod_{j=1}^n P_j(x) \times g_n(x),$$

où $g_n(x)$ est une série de Taylor qui n'a que des zéros de valeur absolue stricte-

ment supérieure à d_n .

Si $|x| \leq |b_n^i|_p$,

$$|g(x)|_p = \left| \prod_{j=1}^n P_j(x) \right|_p |g_n(x)|_p = A_0 \left| \prod_{j=1}^n P_j(x) \right|_p,$$

où A_0 est une constante.

Posons $x = b_n^{i_0} + h$, avec $|h|_p < \rho_0$.

$$\begin{aligned} |g(b_n^{i_0} + h)|_p &= A_0 \left| \prod_{j=1}^n \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{b_n^{i_0} + h}{b_j^i} \right)^{q_{j,i}} \right|_p \\ &= A_0 \left| \prod_{j=0}^{n-1} \prod_{i=1}^k \left(\frac{b_j^i - b_n^{i_0}}{b_j^i} \right)^{q_{j,i}} \right|_p \left| \prod_{i=1, i \neq i_0}^k \left(\frac{b_n^i - b_n^{i_0}}{b_n^i} \right)^{q_{n,i}} \right|_p \left| \frac{h}{b_n^{i_0}} \right|_p^{q_{n,i_0}} \\ &= A_0 \prod_{j=0}^{n-1} \left(\frac{d_n}{d_j} \right)^{q_n} \prod_{i=1, i \neq i_0}^k \left(\frac{|b_n^i - b_n^{i_0}|_p}{d_n} \right)^{q_{n,i}} \left(\frac{|h|_p}{d_n} \right)^{q_{n,i_0}}. \end{aligned}$$

D'après ce qu'on vient de voir, ceci devient infini avec n . Donc $|g(x)|_p$, qui devient infini pour $|x - b_i|_p = \rho$ lorsque $|b_i|_p \rightarrow R$, devient infini aussi pour $|x - b_i|_p > \rho$ (puisque sa valeur augmente).

LEMME 2. - $g(x)$ étant défini comme ci-dessus, et c étant une constante non nulle, les zéros $a_i(c)$ de l'équation $g(x) - c = 0$ sont tels que

$$a_i(c) - b_i \rightarrow 0, \text{ quand } i \rightarrow +\infty.$$

Démonstration. - Plaçons-nous dans le cercle $|x - b_i|_p < \rho_0$, et posons $x = b_i + h$. Dans ce cercle, nous pouvons développer $g(x)$ en série de Taylor

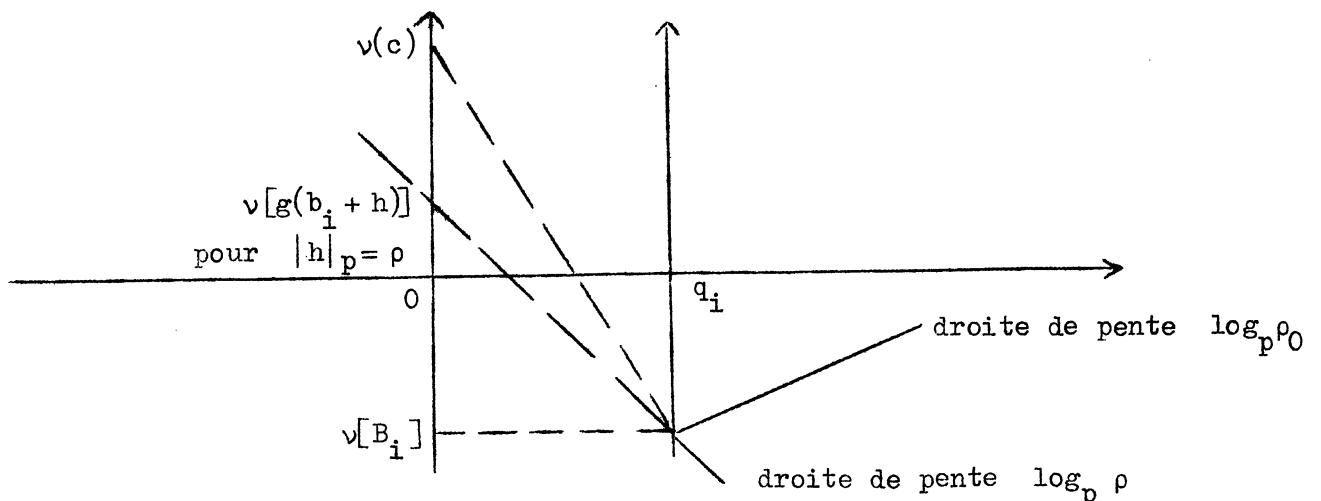
$$g(b_i + h) = B_i h^{q_i} + \dots,$$

et

$$|g(b_i + h)|_p \rightarrow +\infty \text{ avec } i, \text{ lorsque } |h|_p = \rho \text{ constante } < \rho_0.$$

Nous étudions les zéros de l'équation $g(b_i + h) = c$.

Polygône de Newton :



Soit $\rho < \rho_0$. Pour $|h|_p = \rho$, $v[g(b_i + h)] \rightarrow -\infty$, quand $i \rightarrow +\infty$. Donc :
 " $\exists I_0$ tel que $i > I_0$ " implique " $v[g(b_i + h)] < v(c)$ "
 implique " $f(b_i + h) = c$ a q_i zéros $a_{i,1}(c), \dots, a_{i,q_i}(c)$

tous de même valeur absolue $< \rho$, les autres zéros possibles étant tous de valeur absolue $\geq \rho_0$ ".

Résumons nous :

" $\forall \rho > 0$, $\exists I_0$ tel que $i > I_0$ " implique " $|a_{i,k}(c) - b_i| < \rho$ ".

Comme les zéros $a_{i,k}(c)$ de $g(x) = c$ peuvent visiblement être mis en bijection avec ceux de $g(x)$, on pourra introduire le produit infini

$$\prod_0^{\infty} \frac{(x - a_{i,1}(c)) \dots (x - a_{i,q_i}(c))}{(x - b_i)^{q_i}}$$

qui sera défini pour $x \neq b_i$ ($i \in \mathbb{N}$).

LEMME 3. - $(1/g(x)) \in H(\Delta_\rho)$, si $0 < \rho < \rho_0$, et $1/g(x)$ est une fonction croissante.

Remarque. - Pour plus de commodité, nous ferons la démonstration en prenant $g(x)$ avec des pôles simples ; le raisonnement est le même si les b_i sont des pôles multiples, mais les notations sont plus compliquées.

Démonstration. - Choisissons une constante $c \in k$, et posons

$$\varphi(x) = \left(\frac{g(x)}{g(x)} - c \right) \prod_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{x - b_i}{x - a_i(c)} \right).$$

$\varphi(x)$ est une série de Taylor convergente pour $|x| < R$, sans zéro ni pôle ; elle n'appartient pas à $H(\Delta_\rho)$, si $(1/g(x)) \notin H(\Delta_\rho)$.

$$\varphi(x) = \left(1 - \frac{c}{g(x)} \right) \prod_{i=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{b_i - a_i(c)}{x - a_i(c)} \right).$$

Soit $c \in \Delta_\rho$.

$$\forall \varepsilon, \exists r_1 \text{ tel que } r_1 < |x| < R \implies \left| \frac{c}{g(x)} \right|_p < \varepsilon.$$

$$\exists N \text{ tel que } i > N \implies \left| \frac{b_i - a_i(c)}{x - a_i(c)} \right|_p < \frac{|b_i - a_i(c)|_p}{\rho} < \varepsilon,$$

donc

$$r_1 < |x| < R \implies \left| \varphi(x) - \prod_{i=0}^N \left(\frac{x - b_i}{x - a_i(c)} \right) \right|_p < \varepsilon.$$

Posons $r_2 = \sup_{i \leq N} |a_i(c)|_p$. $\prod_0^N ((x - b_i)/(x - a_i(c)))$ est développable en série de Laurent, pour $|x|_p > r_2$,

$$\prod_0^N \left(\frac{x - b_i}{x - a_i(c)} \right) = \prod_0^N \frac{1 - (b_i/x)}{1 - (a_i(c)/x)} = 1 + \frac{\lambda_1}{x} + \frac{\lambda_2}{x^2} + \dots + \frac{\lambda_j}{x^j} + \dots$$

$\varphi(x) - \prod_0^N ((x - b_i)/(x - a_i(c)))$ est développable en série de Laurent, pour $r_2 < |x|_p < R$, si

$$\varphi(x) = \varphi_0 + \varphi_1 x + \varphi_2 x^2 + \dots + \varphi_j x^j + \dots,$$

alors

$$\varphi(x) - \prod_0^N \left(\frac{x - b_i}{x - a_i(c)} \right) = \dots - \frac{\lambda_j}{x^j} \dots + (\varphi_0 - 1) + \varphi_1 x + \dots + \varphi_j x^j + \dots$$

Or :

$$\sup_{r_2 < |x| < R} \left| \varphi(x) - \prod_0^N \left(\frac{x - b_i}{x - a_i(c)} \right) \right|_p = \max \left[\sup_{n \geq 0} |a_n|_p R^n, \sup_{n \leq 0} |a_n|_p r_2^n \right]$$

ce qui exige $|\varphi(0) - 1|_p < \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$, donc $\varphi(0) = 1$, et $|\varphi_j|_p r_2^j < \varepsilon$, $\forall j > 0$.

Lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, $r \rightarrow R$. Pour que $|\varphi_j|_p r_2^j$ tende vers 0 à j constant, il faut que $\varphi_j = 0$, $\forall j > 0$: $\varphi(x)$ est une constante.

Donc $\varphi(x) = \varphi(0) = 1$, et

$$1 - \frac{C}{g(x)} = \prod_0^\infty \frac{x - a_i(c)}{x - b_i}.$$

D'où $(1/g(x)) \in H(\Delta_\rho)$, et la fonction

$$\frac{-C}{g(x)} = \prod_0^\infty \frac{x - a_i(c)}{x - b_i} - 1$$

est une fonction croulante.

Remarque : Autres fonctions croulantes.

(a) Soit $g(x)$ une série de Taylor ayant pour seuls zéros les b_i , et soit $h(x)$ une série de Taylor telle que

$$\frac{g-h}{g} \in H(\Delta_\rho), \quad \forall \rho > 0 \quad \text{et} \quad \frac{g-h}{g} \rightarrow 1, \quad \text{si} \quad |x| \rightarrow R, \quad x \in \Delta_\rho$$

(i. e. $(h/g) \rightarrow 0$, si $|x| \rightarrow R$, $x \in \Delta_\rho$).

Alors $((g-h)/g) - 1$ est une fonction croulante, et on peut mettre $(g-h)/g$ sous la forme : $\prod_{i=0}^\infty ((x - a_i)/(x - b_i))$.

(b) Réciproquement, si la fonction $\prod_{i=0}^\infty ((x - a_i)/(x - b_i)) - 1$ s'écroule, posons $g(x) [\prod_{i=0}^\infty ((x - a_i)/(x - b_i)) - 1] = -h(x)$. Alors

$$\frac{g(x) - h(x)}{g(x)} = \prod_{i=0}^\infty \frac{x - a_i}{x - b_i},$$

et

$$\frac{g(x) - h(x)}{g(x)} \rightarrow 1, \quad \text{si} \quad |x| \rightarrow R, \quad x \in \Delta_\rho.$$

On ne peut a priori rien dire de plus : On voit que $h(x)$ n'a pas besoin d'être une constante, et que $\prod_0^\infty ((x - a_i)/(x - b_i)) - 1$ peut s'annuler sur Δ (et même une infinité de fois).

II. Fonctions s'écroulant pour plusieurs valeurs du spectre

1. Hypothèses.

Soient $R_1, R_2 \in \mathbb{R}^+$. On pose

$$\Delta = \{x \in k ; R_1 < |x| < R_2\} .$$

Soit $\{b_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ une suite d'éléments de Δ tels que :

1° $\inf_{i \neq j} |b_i - b_j| = \rho_0 > 0 ,$

2° $\Delta_\rho = \Delta - \bigcup_{i \in \mathbb{I}} C(b_i, \rho)$ ($\rho < \rho_0$) est quasi connexe avec exactement deux T-filtres \mathcal{C}_1^ρ et \mathcal{C}_2^ρ , l'un croissant (\mathcal{C}_2^ρ), l'autre décroissant (\mathcal{C}_1^ρ).

2. Fonctions s'écroulant vers 0 pour deux limites de $|x|_p$.

Soit $g(x)$ une série de Laurent ayant pour zéros les b_i .

Soit $R \in \mathbb{R}^+$ tel que $R_1 < R < R_2$.

Posons :

$$\Delta'_\rho = \{x \in \Delta_\rho ; R_1 < |x| \leq R\} , \quad \Delta' = \{x ; R_1 < |x| \leq R\} ,$$

$$\Delta''_\rho = \{x \in \Delta_\rho ; R \leq |x| < R_2\} , \quad \Delta'' = \{x ; R \leq |x| < R_2\} .$$

On peut considérer g comme le produit de 2 fonctions g_1 et g_2 ,

g_1 ayant pour seuls zéros les b_i pour $|b_i| < R$,

g_2 ayant pour seuls zéros les b_i pour $|b_i| \geq R$

(C'est-à-dire qu'on prend pour g_2 une série de Taylor, convergente pour $|x| < R_2$, et pour g_1 une série de Laurent, convergente pour $|x| > R_1$).

Quand $|x|_p \rightarrow R_2$, $x \in \Delta''_\rho$, alors

$$\begin{cases} |g_2(x)|_p \rightarrow +\infty \\ |g_1(x)|_p \text{ reste fini, mais } \neq 0 \end{cases} ,$$

donc $|g(x)| \rightarrow +\infty$.

D'autre part,

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{g_1} \in H(\Delta''_\rho) \\ \frac{1}{g_2} \in H(\Delta''_\rho) \end{array} \right\} \implies \frac{1}{g} \in H(\Delta''_\rho) .$$

On obtient des résultats analogues sur Δ'_ρ :

$$\lim_{|x|_p \rightarrow R_1, x \in \Delta'_\rho} \frac{1}{g(x)} = 0 , \quad \frac{1}{g} \in H(\Delta'_\rho) .$$

Soit $\alpha \in k$, $\alpha \neq 0$. L'équation $(1/g) - \alpha = 0$ a une infinité de zéros dans Δ'' , dont seulement un nombre fini dans Δ''_ρ , et une infinité de zéros dans Δ' , dont seulement un nombre fini dans Δ'_ρ .

A partir du rang I_2 ($i \geq I_2$), les zéros de $(1/g) - \alpha = 0$ sont dans les cercles $C(b_i, \rho)$. Pour $i \leq I_1$, les zéros de $(1/g) - \alpha$ sont dans les cercles $C(b_i, \rho)$. On peut les indiquer avec les indices i des b_i . Soient a_i ces zéros.

La fonction :

$$\left(\frac{1}{g} - \alpha\right) \times \prod_{i \leq I_1} \left(\frac{x - b_i}{x - a_i}\right) \prod_{i \geq I_2} \left(\frac{x - b_i}{x - a_i}\right)$$

est analytique sur Δ avec un nombre fini de zéros et de pôles.

Quand $|x| \rightarrow R_1$ ou R_2 , $1/g \rightarrow 0$ et

$$\left| \prod_{i \leq I_1} \left(\frac{x - b_i}{x - a_i}\right) \prod_{i \geq I_2} \left(\frac{x - b_i}{x - a_i}\right) \right|_p = 1, \text{ pour } x \in \Delta_\rho.$$

Le nombre de zéros de la fonction ci-dessus est donc égal au nombre de pôles : Si les a_i sont les zéros de $(1/g) - \alpha$ dans Δ , alors :

$$\varphi(x) = \left(\frac{1}{g} - \alpha\right) \prod_{i=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{x - b_i}{x - a_i}\right)$$

est une fonction analytique sans zéro ni pôle dans Δ .

En développant, comme précédemment, $\varphi(x)$ en série de Laurent :

$$\varphi(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi_i x^i, \text{ pour } r_2 < |x| < R_2,$$

avec r_2 suffisamment proche de R_2 , on obtient

$$\left| \sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi_i x^i + \alpha \prod_{-N}^{+N} \left(1 - \left(\frac{a_i - b_i}{x - b_i}\right)\right) \right|_p < \varepsilon,$$

ce qui entraîne $\varphi(0) = -\alpha$, puis $\varphi_i = 0$ pour $i > 0$, et en faisant de même dans un domaine $R_1 < |x| < r_1$, $\varphi_i = 0$ pour $i < 0$.

D'où

$$\frac{1}{g} - \alpha = -\alpha \prod_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{x - a_i}{x - b_i}\right).$$

Lorsque $|x| \rightarrow R_1$ ou R_2 , $x \in \Delta_\rho$, on a donc

$$\prod_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{x - a_i}{x - b_i}\right) \rightarrow 1.$$

3. Fonctions s'écroulant vers des valeurs distinctes pour deux limites de $|x|$.

(a) Existence.

L'intersection des plages des deux T -filtres \mathcal{C}_1^0 et \mathcal{C}_2^0 est vide. Soit

\mathfrak{J}_1 l'idéal des éléments annulés par \mathcal{C}_1^0 ,

\mathfrak{J}_2 l'idéal des éléments annulés par \mathcal{C}_2^0 .

Il n'existe aucun idéal maximal $[i]$ contenant \mathfrak{J}_1 et \mathfrak{J}_2 : $\mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2 = H(\Delta)_\rho$.

Donc, il existe $f_1 \in \mathfrak{J}_1^0$, $f_2 \in \mathfrak{J}_2^0$ tels que $1 = f_1 + f_2$. Et comme

$\lim_{\mathcal{C}_2} f_2(x) = 0$ et $\lim_{\mathcal{C}_1} f_1(x) = 0$, on a aussi

$$\lim_{\mathcal{C}_1} f_2(x) = 1 \text{ et } \lim_{\mathcal{C}_2} f_1(x) = 1.$$

Cherchons donc des f_1 et f_2 possibles.

(b) Mise en évidence.

Reprenons la fonction $g(x)$ du § II.1.

Posons

$$g(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} u_n x^n, \quad h(x) = \sum_0^{\infty} u_n x^n, \quad \varphi(x) = \frac{h(x)}{g(x)}.$$

1° Démontrons que $\varphi(x) \in H(\Delta)_\rho$. - Posons $g(x) = h(x) + k(x)$. Soit R tel que

$$x \in \Delta_\rho, \quad R \leq |x| < R_2 \implies \left| \frac{k(x)}{h(x)} \right|_\rho < 1.$$

Posons $\Delta''_\rho = \{x \in \Delta_\rho; R \leq |x| < R_2\}$, $1/g \in H(\Delta''_\rho)$.

Pour $x \in \Delta''_\rho$, on a $\varphi(x) = 1/((k(x)/h(x)) + 1)$.

$$k(x) \in H(\Delta''_\rho), \quad \frac{1}{h(x)} \in H(\Delta''_\rho) \implies \frac{k(x)}{h(x)} + 1 \in H(\Delta''_\rho).$$

$|(k(x)/h(x)) + 1|_\rho = 1$ sur Δ''_ρ , donc $(k/h) + 1$ est inversible sur Δ''_ρ , et $\varphi = 1/((k/h) + 1) \in H(\Delta''_\rho)$. Posons $\Delta'_\rho = \{x \in \Delta_\rho; R_1 < |x| \leq R\}$. Alors

$$h(x) \in H(\Delta'_\rho), \quad 1/g(x) \in H(\Delta'_\rho) \implies \varphi(x) \in H(\Delta'_\rho).$$

$$\varphi(x) \in H(\Delta'_\rho), \quad \varphi(x) \in H(\Delta''_\rho) \implies \varphi(x) \in H(\Delta_\rho).$$

2° Limites de $\varphi(x)$. - Si $|x|_\rho \rightarrow R_1$, $x \in \Delta_\rho$ alors $|h(x)|_\rho$ est constant $\neq 0$ et $|g(x)|_\rho \rightarrow +\infty$, donc $\varphi(x) \rightarrow 0$.

Si $|x|_\rho \rightarrow R_2$, $x \in \Delta_\rho$ alors $|h(x)|_\rho \rightarrow +\infty$ et $|k(x)|_\rho$ est constant $\neq 0$, donc $(k(x)/h(x)) \rightarrow 0$, et

$$\varphi(x) = \frac{1}{(k(x)/h(x)) + 1} \rightarrow 1.$$

3° Développement en produit. - Soit $\alpha \in k$, $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$.

Sur $\Delta'' = \{x; R \leq |x| < R_2\}$, $\varphi(x) - \alpha$ a une infinité de zéros a_i qui, pour $i > I_2$, sont dans les cercles $C(b_i, \rho)$.

Sur $\Delta' = \{x; R_1 < |x| \leq R\}$, $\varphi(x) - \alpha$ a une infinité de zéros a_i qui, pour $i < I_1$, sont dans les cercles $C(b_i, \rho)$.

La fonction :

$$(\varphi(x) - \alpha) \prod_{-\infty}^{I_1} \frac{x - b_i}{x - a_i} \prod_{I_2}^{+\infty} \frac{x - b_i}{x - a_i}$$

est une fonction analytique munie d'un nombre fini de zéros et de pôles dans Δ .

Si $|x|_\rho \rightarrow R_2$,

$$\varphi(x) - \alpha \rightarrow 1 - \alpha \text{ et } \left| \prod_{-\infty}^{I_1} \frac{x - b_i}{x - a_i} \prod_{I_2}^{+\infty} \frac{x - b_i}{x - a_i} \right|_\rho = 1,$$

pour $|x|_p$ assez proche de R_2 .

De même, si $|x|_p \rightarrow R_1$,

$$\varphi(x) - \alpha \rightarrow -\alpha \text{ et } \prod_{-\infty}^{I_1} \left(\frac{x - b_i}{x - a_i} \right) \prod_{I_2}^{+\infty} \left(\frac{x - b_i}{x - a_i} \right) \Big|_p = 1,$$

pour $|x|_p$ assez proche de R_1 .

La fonction ci-dessus a donc autant de zéros (a_i) que de pôles (b_i). Étudions la fonction

$$\psi(x) = (\varphi(x) - \alpha) \prod_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{x - b_i}{x - a_i} \right).$$

C'est une fonction analytique sans zéro ni pôle dans Δ .

Si $|x|_p \rightarrow R_2$, $|\psi(x)|_p \rightarrow |1 - \alpha|_p$.

Si $|x|_p \rightarrow R_1$, $|\psi(x)|_p \rightarrow |-\alpha|_p \left| \prod_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{b_i}{a_i} \right) \right|_p$.

Développons $\psi(x)$ en série comme au § II.1 : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists r_2$ tel que

$$r_2 < |x| < R_2 \implies |1 - \varphi(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in \Delta_\rho,$$

$\exists N$ tel que

$$\left| \prod_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{x - b_i}{x - a_i} \right) - \prod_{-N}^{+N} \left(\frac{x - b_i}{x - a_i} \right) \right|_p < \varepsilon, \quad \forall x \in \Delta_\rho.$$

Alors

$$r_2 < |x| < R_2, \quad x \in \Delta_\rho \implies \left| \psi(x) - (1 - \alpha) \prod_{-N}^{+N} \left(\frac{x - b_i}{x - a_i} \right) \right|_p < \varepsilon,$$

et par un développement en série de Laurent pour $|x|_p > |b_N|_p$, on obtient

$$\psi(0) = 1 - \alpha \text{ et } \psi_i = 0, \text{ pour } i > 0.$$

De même $\forall \varepsilon > 0$, $\exists r_1$ tel que

$$R_1 < |x| < r_1 \implies |\varphi(x)|_p < \varepsilon.$$

Alors

$$R_1 < |x| < r_1, \quad x \in \Delta_\rho \implies \left| \psi(x) + \alpha \prod_{-N}^{+N} \left(\frac{x - b_i}{x - a_i} \right) \right|_p < \varepsilon.$$

$$\left| \psi(x) + \alpha \prod_{-N}^{+N} \left(\frac{b_i}{a_i} \right) \left(\frac{1 - (x/b_i)}{1 - (x/a_i)} \right) \right|_p < \varepsilon.$$

Et on développe $\prod_{-N}^{+N} ((x - b_i)/(x - a_i))$, pour $|x|_p < |b_N|_p$, en série de Taylor cette fois, ce qui permet de conclure

$$\psi(0) = -\alpha \prod_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{b_i}{a_i} \right) \text{ et } \psi_i = 0, \text{ pour } i < 0.$$

On doit donc avoir :

$$1 - \alpha = -\alpha \prod_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{b_i}{a_i} \right).$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ESCASSUT (A.). - T-filtres, ensembles analytiques et transformations de Fourier p -adique, Annales Inst. Fourier, Grenoble, t. 25, 1975, fasc. 2, p. 45-80.
- [2] KRASNER (M.). - Prolongement analytique uniforme et multiforme dans les corps valués complets, "Colloque international du CNRS, 143 : Les tendances géométriques en algèbre et théorie des nombres" [1964, Clermont-Ferrand], p. 97-141. - Paris, Centre national de la Recherche scientifique, 1966.
- [3] LAZARD (M.). - Les zéros d'une fonction analytique d'une variable sur un corps valué complet. - Paris, Presses universitaires de France, 1962 (Institut des hautes Etudes scientifiques, Publication mathématique, 14, p. 47-76).
- [4] MOTZKIN (E.). - Une classe d'ensembles analytiques p -adiques, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 3e année, 1975/76, n° 2, 8 p.
- [5] MOTZKIN (E.) et ROBBA (P.). - Prolongement analytique en analyse p -adique, Séminaire de Théorie des nombres, Univ. Bordeaux-I (J. Lesca), 1968/69, n° 3.
- [6] MOTZKIN (E.). - Décomposition d'un élément analytique en facteurs singuliers, Annales Inst. Fourier, Grenoble, t. 27, 1977, fasc. 1, p. 67-82.
- [7] ROBBA (P.). - Fonctions analytiques sur les corps valués ultramétriques complets, Astérisque n° 10, 1973, p. 109-218.
- [8] SARMANT (M.-C.). - Répartition des zéros et des pôles d'une fonction analytique, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 4e année, 1976/77, n° 6, 8 p.

(Texte reçu le 3 juillet 1978)

Mme Marie-Claude SARMANT-DURIX
16 boulevard Jourdan
75014 PARIS
