Groupe de travail d'analyse ultramétrique

PHILIPPE ROBBA

Zéros de suites récurrentes linéaires

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 5 (1977-1978), exp. nº 13, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1977-1978__5__A6_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, G. CHRISTOL, P. ROBBA)
5e année, 1977/78, n° 13, 5 p.

3 avril 1978

ZÉROS DE SUITES RÉCURRENTES LINÉAIRES

par Philippe ROBBA

Considérons uns suite récurrente linéaire à coefficients algébriques. D'après un résultat classique de MAHLER [3], si cette suite possède une infinité de termes nuls, alors, sauf pour un nombre fini d'entre eux, les indices des termes nuls appartiennent à une union finie de progressions arithmétiques. Nous allons nous intéresser à deux problèmes concernant les zéros d'une suite récurrente linéaire.

- La proposition "Il y a une infinité de termes nuls" est-elle décidable ?

Dans le cas des suites à termes entiers, une réponse positive a été donnée par BERSTEL et MIGNOTTE [1]. Leur méthode consiste à établir une majoration de la période commune des progressions arithmétiques mentionnées par le théorème de MAHLER. La décidabilité annoncée est un corollaire facile de cette majoration. Pour obtenir cette majoration, ils doivent étudier les ordres des racines de l'unité d'un polynôme à coefficients entiers. Nous allons établir une majoration de la période commune en suivant la méthode MAHLER. Cette démonstration sera également valable dans le cas des suites à coefficients algébriques.

- Dans le cas où la suite n'a qu'un nombre fini de termes nuls, trouver une majoration du nombre de zéros.

Pour les suites à termes entiers, la conjecture de MORGON-WARD [2] affirme qu'il existe une telle majoration qui ne dépend que du degré de la récurrence. Cette conjecture a été démontrée dans le cas des récurrences quadratiques par KUBOTA [2], on a également des résultats partiels dans le cas des récurrences cubiques ([4], par exemple).

Nous allons établir une majoration due à BARSKY (communication personnelle) qui semble une méthode d'attaque intéressante de cette conjecture.

1. Notations et résultats préliminaires.

1.1 On note $\overline{\mathbb{Q}}$ la cloture algébrique de $\mathbb{Q}$.

Il existe une correspondance bien connue (voir, par exemple, [5]) entre suites récurrentes, fractions rationnelles et exponentielles-polynômes.

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite récurrente linéaire, à termes algébriques, vérifiant la relation

$$a_0\, u_{n+h} + a_1\, u_{n+h-1} + \dots + a_h\, u_n = 0\ , \quad n \geq 0\ , \tag{1.1}$$

avec $a_0 \neq 0$, $a_h \neq 0$, $a_i \in \overline{\mathbb{Q}}$, $u_n \in \overline{\mathbb{Q}}$.

Le polynôme caractéristique de la relation de récurrence est

(1.2) $$Q(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_h X^h ,$$

son degré h est le degré de la récurrence.

Il existe un polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$, de degré inférieur à celui de Q, entièrement déterminé par $u_0 \dots u_{h-1}$ tel que

(1.3) $$\frac{P(X)}{Q(X)} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n X^n .$$

Si l'on pose $Q(X) = a_0(1-\alpha_1 X)^{r_1} \dots (1-\alpha_s X)^{r_s}$ où les α_i sont distincts, la décomposition en éléments simples de P/Q montre que

(1.4) $$u_n = \sum_{i=1}^{s} R_i(n)\alpha_i^n , \quad n \geq 0 ,$$

où les polynômes R_i sont de degré inférieur à r_i.

Les résultats suivants sont également classiques.

1.2 LEMME. - *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite récurrente vérifiant (1.1). Si h termes consécutifs $u_n \dots u_{n+h-1}$ sont nuls, la suite est identiquement nulle.*

(C'est presque évident).

1.3 COROLLAIRE. - *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite récurrente vérifiant (1.1). Soit (1.4) l'expression de u_n comme valeur d'une exponentielle-polynôme. Si h termes consécutifs sont nuls, alors les polynômes $R_1, \dots, R_s$ sont identiquement nuls.*

1.4 LEMME. - *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite récurrente vérifiant (1.1). Soient M un entier ≥ 1 et $k \in \{0, 1, \dots, M-1\}$. La suite $(v_n)_{n\geq 0}$ définie par $v_n = u_{nM+k}$ est récurrente de degré $\leq h$.*

Démonstration. - En effet, on déduit de (1.4)

(1.5) $$v_n = \sum_{i=1}^{s} S_i(n)\beta_i^n ,$$

avec $\beta_i = \alpha_i^M$ et $S_i(X) = R_i(MX+k)\alpha_i^k$, ce qui montre que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ vérifie une relation de récurrence de polynôme caractéristique

$$Q^M(X) = (1-\alpha_1^M)^{r_1} \dots (1-\alpha_s^M)^{r_s} .$$

2. Période d'une suite récurrente linéaire.

2.1 Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite récurrente linéaire. On appelle *période* M de cette suite le ppcm des raisons des progressions arithmétiques infinies d'indices de termes nuls (on pose $M = 0$ si la suite n'a qu'un nombre fini de termes nuls).

2.2 THÉORÈME. - *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite vérifiant la relation de récurrence (1.1) de degré h. Soit M sa période. Supposons que les coefficients $a_0 \dots a_h$ appartiennent à une extension K de $\mathbb{Q}$ de degré d. On a la majoration*

$$M \leqslant 2^{hd+1} .$$

Remarque. - Dans le cas des suites à coefficients entiers, c'est-à-dire $d = 1$, BERSTEL et MIGNOTTE obtiennent la majoration $M \leq \exp(2h\sqrt{3 \log h})$. Notre majoration est donc meilleure.

Démonstration. - Soit (1.4) l'expression de u_n comme valeur d'une exponentielle-polynôme.

Considérons alors la partition de $\{1, \ldots, s\}$ en classes d'équivalences $\mathfrak{I}$ définies par $i, j \in \mathfrak{I}$ si, et seulement si, α_i/α_j est une racine de l'unité, et désignons par $\alpha_{i_{\mathfrak{I}}}$, pour chaque classe $\mathfrak{I}$, un élément distingué de $\mathfrak{I}$. Ecrivons (1.5) sous la forme

$$u_n = \sum_{\mathfrak{I}} f_{\mathfrak{I}}(n)\alpha_{i_{\mathfrak{I}}}^n \quad \text{avec} \quad f_{\mathfrak{I}}(n) = \sum_{i\in\mathfrak{I}} R_i(n)(\alpha_i/\alpha_{i_{\mathfrak{I}}})^n .$$

Considérons un plongement de K dans $\underset{\sim}{C}_2$. Les α_i appartiennent à une extension algébrique de $\underset{\sim}{Q}_2$ de degré $\leq dh$. Comme par ailleurs, pour tout i, $\alpha_i/\alpha_{i_{\mathfrak{I}}}$ est de module 1 (car est une racine de l'unité), il existe un entier $N \leq 2^{hd+1}$ tel que $|1 - (\alpha_i/\alpha_{i_{\mathfrak{I}}})^N|_2 \leqslant 1/4$, pour tout i.

Il en résulte que, pour k entier fixé, la fonction $f_{\mathfrak{I}k}$ définie par

$$f_{\mathfrak{I}k}(x) = f_{\mathfrak{I}}(xN + k) = \sum_{i\in\mathfrak{I}} R_i(xN + k)(\alpha_i/\alpha_{i_{\mathfrak{I}}})^k \, ((\alpha_i/\alpha_{i_{\mathfrak{I}}})^N)^x$$

est analytique dans le disque unité $D(0, 1^+)$.

Soit alors k tel que $M\underset{\sim}{N} + k$ soit une progression arithmétique d'indices de termes nuls de la suite. Considérons la nouvelle partition de $\{1, \ldots, s\}$ en classes d'équivalences H, définies par $i, j \in H$ si, et seulement si, $\alpha_i^M = \alpha_j^M$. Pour chaque classe H, désignons par α_{i_H} un élément distingué de H. Il est clair que chaque classe d'équivalence H est contenue dans une classe $\mathfrak{I}$.

On a

$$u_{nM+k} = \sum_H R_H(n)(\alpha_{i_{\mathfrak{I}}}^M)^n ,$$

où $R_H(X) = \sum_{i\in H} R_i(MX + k)\alpha_i^k$. Il résulte alors du corollaire 1.2 que $R_H(n) = 0$, pour tout n. Par conséquent, pour tout n,

$$f_{\mathfrak{I}k}(nM) = \sum_{i\in\mathfrak{I}} R_i(nMN + k)(\alpha_i/\alpha_{i_{\mathfrak{I}}})^{nMN+k}$$

$$= \frac{1}{\alpha_{i_{\mathfrak{I}}}^{nMN+k}} \sum_{H\subset\mathfrak{I}} \alpha_{i_H}^{nMN} \sum_{i\in H} R_i(nMN + k)\alpha_i^k = \frac{1}{\alpha_{i_{\mathfrak{I}}}^{nMN+k}} \sum_{H\subset\mathfrak{I}} \alpha_{i_H}^{nMN} R_H(nN) = 0 .$$

Si $M \neq 0$, la fonction analytique $f_{\mathfrak{I}k}$ a une infinité de zéros dans le disque $D(0, 1^+)$ donc est identiquement nulle. Ceci étant vrai, pour tout $\mathfrak{I}$, on a $u_{nN+k} = 0$, pour tout n.

Ceci montre que $\underset{\sim}{N}N + k$ est une progression arithmétique d'indices de termes nuls pour chaque k pour lequel $M\underset{\sim}{N} + k$ est une progression arithmétique de même nature. Il résulte alors de la minimalité de M que M divise N et donc $M \leq 2^{hd+1}$, ce qui nous donne la majoration annoncée.

2.3 COROLLAIRE. - Il existe un algorithme permettant de décider si une suite récurrente (à termes algébriques) possède une infinité de termes nuls.

Démonstration [1]. - Soient h et d définis comme au théorème 2.2. On a $M \leq 2^{hd+1}$.

Toute progression arithmétique infinie maximale d'indices de termes nuls est, d'après les lemmes 1.2 et 1.4, caractérisée par le fait que ses h premiers termes sont nuls. De plus la raison d'une telle progression est majorée par 2^{dh+1} . Pour déterminer si la suite (u_n) possède une infinité de termes nuls, il suffit donc de calculer les $(h+1)2^{hd+1}$ premiers termes de la suite et déterminer les progressions arithmétiques d'indices de termes nuls de longueur h qui apparaissent parmi les $(h+1)2^{hd+1}$ premiers termes.

3. Nombres de zéros d'une suite récurrente linéaire.

3.1 Pour simplifier, nous ne considérerons que des suites à termes entiers (ou rationnels), mais les majorations se généralisent au cas des suites à termes algébriques (et alors le degré des coefficients de la récurrence intervient). On peut donc supposer que les coefficients a_i de la récurrence sont entiers et on peut se ramener au cas $a_0 = 1$ (en remplaçant la suite (u_n) par la suite $(a_0^{h-n} u_n)$). On considère donc une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ vérifiant la relation

(3.1) $$u_{n+h} + a_1 u_{n+h-1} + \dots + a_h u_n = 0 , \quad n \geq 0 ,$$

avec $a_i \in \mathbb{Z}$, $a_h \neq 0$.

3.2 THÉORÈME (BARSKY). - Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite récurrente (à termes entiers ou algébriques) vérifiant la relation (3.1) de degré h . Soit p le plus petit nombre premier ne divisant pas a_h . Posons

$$\gamma = p^h(h - 1 + \frac{1}{p-2} ((p-1)([\log_p h] + 1) - 1)) , \text{ si } p \neq 2 ,$$
$$\gamma = 2^{h+1}(h - 1 + \log_2 h) \qquad , \text{ si } p = 2 .$$

Alors si la suite (u_n) a plus de γ termes nuls, elle possède une infinité de termes nuls.

Démonstration. - Soit (1.4) l'expression de u_n comme fonction d'une exponentielle polynôme. Avec notre hypothèse sur p , on a

$$|a_0|_p = |a_h|_p = 1 = \sup_i |a_i|_p .$$

Le polygone de Newton (respectivement le polygone de valuation) nous dit alors que les racines α_j du polynôme caractéristique Q sont toutes de module 1 . De plus, ces racines appartiennent à une extension algébrique de $\mathbb{Q}_p$ de degré au plus h .

Il existe donc $N \leq p^h$ tel que l'on ait

(3.2) $$|\alpha_i - 1| \leq p^{-1} \text{ , pour tout } i \text{ .}$$

Si $p = 2$, il existe $N \leq 2^{h+1}$ tel que l'on ait

(3.2 bis) $$|\alpha_i - 1| \leq 1/4 \text{ , pour tout } i \text{ .}$$

Alors, pour tout $k \in \{0 , 1 , \ldots , N - 1\}$, les fonctions f_k définies par

$$f_k(x) = \sum_{i=1}^{s} R_i(h + xN)\alpha_i^k(\alpha_i^N)^x$$

sont analytiques dans le disque $D(0 , 1^+)$. Si on a supposé que la suite (u_n) n'a qu'un nombre fini de zéros, ces fonctions f_k ne sont jamais identiquement nulles. Tenant compte de (3.2) (respectivement (3.2 bis), si $p = 2$), [6] nous dit que le nombre de zéros de la fonction exponentielle-polynôme f_k, dans $D(0 , 1^+)$, est majoré par

$$h - 1 + \frac{1}{p - 2}\,((p - 1)([\log_p h] + 1) - 1) \quad \text{si} \quad p \neq 2$$

et

$$h - 1 + [\log_2 h] \quad \text{si} \quad p = 2 \text{ .}$$

Ces majorations sont à fortiori valables pour les suites $n \longrightarrow u_{k+nN}$, restrictions à $\underset{\sim}{N}$ des fonctions f_k. Comme on a N telles sous-suites à considérer, on en déduit que le nombre de zéros de la suite (u_n) est borné par

$$p^h(h - 1 + \frac{1}{p - 2}\,((p - 1)([\log_p h] + 1) - 1)) \quad \text{si} \quad p \neq 2$$

$$2^{h+1}(h - 1 + \log_2 h) \quad \text{si} \quad p = 2 \text{ .}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERSTEL (J.) et MIGNOTTE (M.). - Deux propriétés décidables des suites récurrentes linéaires, Bull. Soc. math. France, t. 104, 1976, p. 175-184.

[2] KUBOTA (K. K.). - On the conjecture of Morgan-Ward, Acta Arithm., Warszawa, t. 33, 1977, p. 11-28, p. 29-48, p. 99-109.

[3] MAHLER (K.). - Eine arithmetische Eigenshaft der Taylor-Koeffizienten rationalen Funktionen, Konink. nederl. Akad. Wetensch., Proc., t. 38, 1935, p. 50-60.

[4] PICON (P. A.). - Sur les termes nuls d'une suite récurrente cubique, R. A. I. R. O., 8e année, R-3, 1974, p. 47-61.

[5] PISOT (C.). - Quelques aspects de la théorie des entiers algébriques. - Montréal les Presses universitaires de Montréal, 1963 (Séminaire de Mathématiques spéciales. Eté 1963, 5).

[6] ROBBA (P.). - Nombre de zéros des fonctions exponentielles-polynômes, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 4e année, 1976/77, n° 9, 3 p.

(Texte reçu le 5 septembre 1978)

Philippe ROBBA
138 rue Nationale
75013 PARIS