

GROUPE DE TRAVAIL D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

ALEXEJ A. PANČIŠKIN

Le prolongement p -adique analytique des fonctions L de Rankin

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 9, n° 3 (1981-1982), exp. n° J14, p. J1-J6

http://www.numdam.org/item?id=GAU_1981-1982__9_3_A15_0

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique
(Secrétariat mathématique, Paris), 1981-1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LE PROLONGEMENT p-ADIQUE ANALYTIQUE DES FONCTIONS L DE RANKIN

By Alexej A. PANČIŠKIN (*)

[Université de Moscou]

1. Posons $q = e^{2\pi iz} = e(z)$, et soient

$$f = \sum_{n \geq 1} a_n q^n \quad \text{et} \quad g = \sum_{n \geq 1} b_n q^n \quad (\text{Im}(z) > 0),$$

deux formes holomorphes paraboliques des poids k et l pour le groupe $\Gamma = \text{SL}_2(\mathbb{Z})$, qui sont fonctions propres des opérateurs de Hecke, où $a_1 = b_1 = 1$. Les séries de Dirichlet $L_f(s) = \sum_{n \geq 1} a_n n^{-s}$ et $L_g(s) = \sum_{n \geq 1} b_n n^{-s}$ admettent un développement en produit eulérien, et sont associées à des représentations l -adiques $\rho_{f,l}$ et $\rho_{g,l}$ du groupe $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Les analogues p-adiques de telles séries ont été construits par Ju. I. MANIN [5]. Dans ce qui suit, nous généralisons cette construction pour le cas de série $D_{f,g}(s) = \sum_{n \geq 1} c_n n^{-s}$, associée au produit tensoriel $\rho_{f,l} \otimes \rho_{g,l}$.

Selon la théorie des représentations automorphes, cette série correspond à une certaine représentation du groupe adélique $G = \text{GL}_2 \times \text{GL}_2$ sur \mathbb{Q} [3]. Notons que les fonctions L p-adiques automorphes n'ont été étudiées jusqu'à présent que pour le cas où $G = \text{GL}_1$ ou GL_2 sur un corps des nombres (totalement réel ou de "CM-type") (voir [6], [4]).

Rappelons que

$$(1.1) \quad D_{f,g}(s) = \zeta(2s - k - l + 2) L_{f,g}(s),$$

où $\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} n^{-s}$ est la fonction zêta de Riemann et $L_{f,g}(s) = \sum_{n \geq 1} a_n b_n n^{-s}$ est la convolution des séries $L_f(s)$ et $L_g(s)$. On peut écrire $D_{f,g}(s)$ comme produit eulérien $\prod_p (F_p(p^{-s}))^{-1}$ avec

$$F_p(X) = \prod_{i,j=1}^2 (1 - \alpha_i^{(p)} \beta_j^{(p)} X),$$

où

$$((1 - \alpha_1^{(p)} p^{-s})(1 - \alpha_2^{(p)} p^{-s}))^{-1} = (1 - a_p p^{-s} + p^{k-1-2s})^{-1}$$

et

$$((1 - \beta_1^{(p)} p^{-s})(1 - \beta_2^{(p)} p^{-s}))^{-1} = (1 - b_p p^{-s} + p^{l-1-2s})^{-1}$$

(*) Alexej A. PANČIŠKIN, Faculté de Mathématiques, Université d'Etat, MOSKVA 11723 (Union soviétique).

sont les facteurs locaux de L_f et de L_g . Pour des caractères de Dirichlet χ arbitraires, notons $D_{f,g}(s, \chi) = \sum_{n \geq 1} \chi(n) c_n n^{-s}$. La méthode de Rankin [3] permet d'étudier les propriétés analytiques (complexes) de $D_{f,g}$. Cette méthode fournit aussi des formules pour les valeurs de $D_{f,g}$ aux entiers critiques (au sens de DELIGNE [2]) : pour $m = 0, 1, \dots, ((k-1)/2) - 1$, les nombres

$$D_{f,g}(k-1-m, \chi) \omega_{f,g,m}^{-1}$$

sont algébriques, où $\omega_{f,g,m} = \pi^{2k-2m-1} \langle f, f \rangle$ est le "facteur transcendant", et $\langle f, f \rangle$ est le carré scalaire de f (dû à PETERSSON) [8].

Nous allons voir que cette méthode permet la construction du prolongement p -adique analytique de $D_{f,g}$.

2. Soient p un nombre premier, \mathbb{C}_p le complété d'une clôture algébrique du corps des nombres p -adiques, et $X = \text{Hom}_{\text{cont}}(Z_p^*, \mathbb{C}_p^*)$ l'ensemble des caractères de Dirichlet primitifs de conducteur p^M (M non négatif quelconque) et l'ensemble X^{tors} de caractères d'ordre fini de X .

Rappelons que X^{tors} est discret dans X , muni de la structure de variété p -adique analytique [5].

THÉOREME. - Supposons que $k > 1$, et que la racine $\rho^{(p)} = \alpha_1^{(p)} \beta^{(p)}$ du polynôme $X^4 F_p(X^{-1})$ est une unité p -adique algébrique. Alors, pour chaque nombre $m = 0, 1, \dots, ((k-1)/2) - 1$, il existe une fonction analytique p -adique bornée $D_{f,g,m}^{(p)} : X \rightarrow \mathbb{C}_p$ qui prolonge l'application

$$(2.1) \quad \chi \mapsto \frac{p^{M(k-m-2)}}{(\rho^{(p)})^M} G(\chi) D_{f,g}(k-1-m, \bar{\chi}) \omega_{f,g,m}^{-1}$$

de X^{tors} dans \mathbb{C}_p (ou dans $\bar{\mathbb{Q}}$). Cette fonction est unique.

Ici $G(\chi) = \sum_{u=1}^{p^M-1} \chi(u) e(u/p^M)$ est la somme de Gauss, et p^M désigne le conducteur de χ .

La construction de ce prolongement utilise la théorie de l'intégration non archimédienne [6]. Nous démontrons l'existence des distributions p -adiques bornées $\mu_{f,g,m}$ sur Z_p^* telles que, pour tout $\chi \in X^{\text{tors}}$, l'intégrale $\int_{Z_p^*} \chi \mu_{f,g,m}$ est égale à la valeur de l'application (2.1) en χ . Le théorème résultera de la propriété générale des distributions p -adiques bornées μ : la fonction

$$\chi \in X \mapsto \int_{Z_p^*} \chi \mu \in \mathbb{C}_p$$

est bornée et analytique sur X , et les valeurs aux $\chi \in X^{\text{tors}}$ définissent cette fonction de manière unique [5].

3. Construction de distributions : Tout d'abord nous définissons certaines

distributions μ_s à valeurs complexes, attachées à la série $D(s) = D_{f,g}(s)$, $s \in \mathbb{C}$. Pour $x \in \mathbb{Q}$, posons $D(s, x) = \sum_{n \geq 1} e(nx) c_n n^{-s}$ (cette série est la fonction holomorphe sur \mathbb{C}).

Proposition-définition.

(a) Pour le sous-ensemble compact ouvert $a + (p^M)$ dans Z_p^* posons

$$(3.1) \quad \mu_s(a + (p^M)) = \frac{p^{M(s-1)}}{(\rho(p))^M} \left[D(s, \frac{a}{p^M}) + \sum_{i=2}^4 k_{i,s} D(s, \frac{a}{p^{M-i+1}}) \right]$$

où $k_{i,s} = -p^{(1-i)s} \sum_{j=i}^4 A_{p,j} / (\rho(p))^{j-i+1}$, $i = 2, 3, 4$, et $A_{p,j}$ sont des coefficients du polynôme

$$F_p(X) = \sum_{i=0}^4 A_{p,i} X^i \\ = 1 - a_p b_p X + (p^{l-1} a_p + p^{k-1} b_p - 2p^{k+l-2}) X^2 + p^{k+l-2} a_p b_p X^3 + p^{2(k+l-2)} X^4.$$

Alors l'identité (3.1) définit une distribution sur Z_p^* à valeurs complexes.

(b) Pour les caractères χ de Dirichlet primitifs de conducteurs p^M , on a

$$(3.2) \quad \int_{Z_p^*} \chi \mu_s = \frac{p^{M(s-1)}}{(\rho(p))^M} G(\chi) D_{f,g}(s, \bar{\chi})$$

avec les notations comme ci-dessus).

Cette proposition est la généralisation facile du résultat correspondant pour les séries de Hecke [5], et on omet la démonstration, qui est similaire.

Maintenant on introduit les distributions $\mu_{f,g,m}$ d'après la règle suivante :

$$(3.3) \quad \mu_{f,g,m}(U) = \omega_{f,g,m}^{-1} \mu_{k-1-m}(U), \text{ où } m = 0, 1, \dots, ((k-l)/2) - 1.$$

U est un sous-ensemble compact de Z_p^* . Il est possible de montrer, que les nombres (3.3) sont algébriques et que leurs dénominateurs sont uniformément bornés. En vertu de (3.1), il suffit de prouver l'algébricité et l'intégralité des nombres $p^{M(k-2-m)} D(k-1-m, (a/p^M)) \omega_{f,g,m}^{-1}$ après la multiplication par un entier positif A , indépendant de M .

4. On considère ici des entiers positifs N au lieu de p^M , et on suppose que tout facteur premier de N appartient à un ensemble fini fixé S .

PROPOSITION. - Les nombres

$$(4.1) \quad N^{k-2-m} D(k-1-m, \frac{a}{N}) \omega_{f,g,m}^{-1}$$

sont algébriques, et leurs dénominateurs sont bornés.

Pour démontrer ceci on note, grâce à l'identité (1.1), que

$$(4.2) \quad D(s, \frac{a}{N}) = \sum_{d_1, d_2 \pmod{N}} e\left(\frac{d_1 d_2^2 a}{N}\right) \sum_{\substack{n_1 \geq 1 \\ n_1 \equiv d_1 \pmod{N}}} n_1^{k+l-2-2s} \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \equiv d_2 \pmod{N}}} a_n b_n n^{-s}.$$

En utilisant la définition de la fonction $\Gamma(s)$ on obtient l'expression suivante (pour $\text{Re}(s)$ assez grand) :

$$(4.3) \quad (4\pi)^{-s} \Gamma(s) \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \equiv d_2 \pmod{N}}} a_n b_n n^{-s+m} \\ = \int_{|x| \leq \frac{1}{2}} f(z) \theta^m g_{d_2, N}(z) y^{s-1} dx dy \quad (z = x + iy, y > 0),$$

où

$$g_{d_2, N}(z) = \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \equiv d_2 \pmod{N}}} b_n q^n, \quad \theta = q \frac{d}{dq}$$

(l'opérateur de Ramanujan). Les propriétés modulaires de f , $g_{d, N}$ et θ permettent de transformer l'intégration dans (4.3) en l'intégration sur le domaine fondamentale $D_0(N^2)$ du sous-groupe $\Gamma_0(N^2)$ de $\Gamma = \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ formé des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dont le coefficient c est divisible par N^2 (comme dans [8]). En posant $s = k - 1$ et appliquant (4.2), on obtient l'expression, pour $(4)^{1-k} (k - 2)! D(k - 1 - m, \frac{a}{N})$ en termes de produit scalaire de Petersson :

$$[\bar{\Gamma} : \bar{\Gamma}_0(N^2)] \times \langle f, F_{a, N}^{(m)} \rangle,$$

où $\bar{\Gamma} = \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$, $\bar{\Gamma}_0(N^2) \{ \pm 1 \} / \{ \pm 1 \}$, et $F_{a, N}^{(m)}$ est une forme modulaire de poids k pour $\Gamma_0(N^2)$ de la forme

$$F_{a, N}^{(m)}(z) \\ = \frac{\Gamma(k - l - 2m)}{\Gamma(k - l - m)} \sum_{v|N} v^{-(k-l-2m)} \times \sum_{\substack{w \pmod{N} \\ (w, N) = v}} C_m(g(z + \frac{w^2 a}{N}), G_{k-l-2m}(Nvz; 0, \frac{w}{v}; \frac{N}{v})).$$

On désigne ici par

$$G_r(z; a_1, a_2; A) = \sum_{\substack{c \equiv a_1 \pmod{A} \\ d \equiv a_2}} (cz + d)^{-r}$$

la série d'Eisenstein (a_1, a_2, A, r sont entiers, $A \geq 1, r \geq 2$; pour définir G_2 dans le cas $r = 2$, on utilise la sommation due à HECKE comme dans [7]) et $C_m = C_m^{l, k-l-2m}$ est l'opérateur de Cohen [4] : par définition, pour les fonctions holomorphes h_1, h_2 sur H , on a

$$C_m^{l, k-l-2m}(h_1, h_2) \\ = \sum_{r=0}^m (-1)^{m-r} \binom{m}{r} \frac{\Gamma(l+m) \Gamma(k-l-m)}{\Gamma(l+r) \Gamma(k-l-m-r)} e^r h_1 e^{m-r} h_2.$$

Puisque les coefficients de $\pi^{-r} G_r$ sont algébriques [3], l'algébricité des nombres $\pi^{-(k-l-2m)} \langle f, F_{a, N}^{(m)} \rangle / \langle f, f \rangle$ de (4.1) et des valeurs des distributions $\mu_{f, g, m}$ se

déduit de la théorie de Hecke-Petersson.

Pour démontrer la propriété d'intégralité, notons que les nombres (4.1) sont égaux à $4^{k-1} N^{k-2-m} \omega_{f,g,m}^{-1} \langle f, \text{Tr}_1^{N^2} F_{a,N}^{(m)} \rangle$ où $\text{Tr}_1^{N^2}$ est la trace : $\text{Tr}_1^{N^2} = \sum_{\alpha \in \Gamma_0(N^2)} \gamma$

Maintenant il suffit de montrer que les dénominateurs des coefficients de la forme modulaire

$$\pi^{-(k-\lambda-2m)} N^{k-2-m} \text{Tr}_1^{N^2} F_{a,N}^{(m)}$$

sont bornés. On a

$$\text{Tr}_1^{N^2} = \text{Tr}_N^{N^2} \cdot \text{Tr}_1^{N_0}, \text{ où } N_0 = \prod_{p|N} p$$

et

$$\text{Tr}_{N_0}^{N^2} = \sum_{b=1}^{N^2/N_0} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ bN_0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'autre part,

$$H_{N^2} \text{Tr}_{N_0}^{N^2} = E_{N_0}^{N^2} H_{N_0} \text{ où } H_A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ A & 0 \end{pmatrix} \text{ pour } A \geq 1$$

et

$$E_{N_0}^{N^2} = \sum_{b=1}^{N^2/N_0} \begin{pmatrix} N_0/N^2 & -bN_0/N^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Evidemment si $H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A(n) q^n$ est une série de Fourier

$$E_{N_0}^{N^2} H(z) = (N_0/N^2)^{(k/2)-1} \sum_{n \geq 0} A(nN^2/N_0) q^n \quad [7].$$

Notons que les opérateurs $\text{Tr}_1^{N_0}$ et H_{N_0} dépendent de S , mais ne dépendent pas de N , et que H_{N^2} est l'involution.

Si l'on introduit la série

$$A(n) q^n = \pi^{-(k-\lambda+2m)} F_{a,N}^{(m)} k_{N^2}^H = \pi^{\lambda+2m-k} (Nz)^{-k} F_{a,N}^{(m)}(-1/N^2 z),$$

le calcul direct montre que les dénominateurs des nombres $N^{-m} A(nN^2/N_0)$ ne dépendent pas de N ; ceci entraîne la proposition (et le théorème).

Signalons en conclusion que le résultat similaire a lieu pour les séries de Rankin sur un corps totalement réel.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] COHEN (H.). - Sums involving the values at negative integers of L-functions of quadratic characters, Math. Annalen, t. 217, 1975, p. 271-285.

- [2] DELIGNE (P.). - Valeurs des fonctions L et périodes des intégrales, "Automorphic forms, representations and L -functions," part 2, p. 313-346. - Providence, American mathematical Society, 1979 (Proceedings of Symposia in pure Mathematics, 33).
 - [3] JACQUET (H.). - Automorphic forms on $GL(2)$, part II. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1972 (Lecture Notes in Mathematics, 278).
 - [4] KATZ (N. M.). - p -adic L -functions for CM -fields, *Invent. Math.*, t. 49, 1978, p. 199-297.
 - [5] MANIN (Ju. I.). - Les périodes des formes paraboliques et les séries p -adiques de Hecke, [en russe] *Mat. Sbornik*, t. 92, 1973, p. 378-401 ; [en anglais] *Math. of the URSS-Sbornik*, t. 92, 1979, p. 371-393.
 - [6] MANIN (Ju. I.). - L'intégration non archimédienne et les fonctions L p -adiques de Jacquet-Langlands, [en russe] *Uspekhi Mat. Nauk*, t. 31, 1979, p. 5-54 ; [en anglais] *Russian math. Surv.*, t. 31, fasc. 1, 1976, p. 5-57.
 - [7] MANIN (Ju. I.) et PANČIŠKIN (A. A.). - Convolution des séries de Hecke et leurs valeurs aux entiers, [en russe] *Mat. Sbornik*, t. 104, 1977, p. 617-651 ; [en anglais] *Math. of the URSS Sbornik*, t. 104, 1977, p. 519-537.
 - [8] SHIMURA (G.). - The special values of the zéta-fonctions associated with cusp forms, *Commun. pure appl. Math.*, t. 29, 1976, p. 783-304.
-