GILLES CHRISTOL

Diagonales de fractions rationnelles et équations différentielles

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 10, n° 2 (1982-1983), exp. n° 18, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1982-1983__10_2_A4_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, G. CHRISTOL, P. ROOBA)
10e année, 1982/83, n° 18, 10 p.

9 mai 1983

DIAGONALES DE FRACTIONS RATIONNELLES ET EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

par Gilles CHRISTOL (*)

Introduction.

Parmi les équations différentielles à coefficients dans le corps $\mathbb{Q}(x)$, certaines "proviennent de la géométrie" (voir [4]). Il apparaît sur les exemples que leurs solutions au voisinage de l'origine sont des "diagonales de fractions rationnelles" (voir ci-dessous). Inversement, DWORK a démontré que la diagonale d'une fraction rationnelle, qui intervient "naturellement" dans la démonstration d'APÉRY de l'irrationalité de $\zeta(3)$, est solution d'une équation différentielle qui vient de la géométrie ([4], [5]). Ces observations suggèrent la conjecture, volontairement un peu vague, suivante :

Les équations différentielles minimum satisfaitent par des diagonales de fractions rationnelles sont celles qui proviennent de la géométrie.

On sait que les équations différentielles qui proviennent de la géométrie ont, pour tout nombre premier p, une structure de Frobenius forte. Ceci implique en particulier que, pour presque tout p, leurs solutions au voisinage du point générique t ($|t| = 1$) convergent dans le disque $D(t, 1^-)$. DWORK conjecture d'ailleurs que cette dernière propriété caractérise les équations différentielles qui proviennent de la géométrie. Afin de tester notre conjecture, il faudrait montrer que :

Toute diagonale de fraction rationnelle satisfait une équation différentielle à coefficients dans le corps $\mathbb{Q}(x)$,

Les équations différentielles ainsi trouvées ont une structure de Frobenius forte pour presque tout p.

Nous allons effectivement démontrer ces résultats dans les "bons cas".

Techniquement l'opération "diagonalisation" se ramène au calcul d'un résidu, c'est-à-dire à une intégration sur un "cycle évanescent" [3], de telle sorte que notre problème revient à l'étude de la variation en fonction du paramètre de la "période" ainsi obtenue. Nos calculs s'inspireront donc fortement des travaux de DWORK.

Signalons pour terminer deux faits qui soutiennent notre conjecture. On sait que

(*) Gilles CHRISTOL, 5 allée des Gradins, 91350 GRIGNY.

les diagonales des fractions rationnelles à deux variables sont les fonctions algébriques sur $\mathbb{Q}(x)$ [6].

Par ailleurs, les solutions analytiques bornées dans le disque $D(0\ ,\ 1^-)$ des équations différentielles qui possèdent une structure de Frobenius forte (resp. pour presque tout p , les diagonales de fractions rationnelles) sont des éléments algébriques, c'est-à-dire des limites uniformes sur le disque $D(0\ ,\ 1^-)$ de fonctions algébriques [1].

1. Diagonales de fractions rationnelles.

Soit P et Q deux polynômes de l'anneau $\mathbb{Q}[x\ ,\ \underset{\sim}{y}]$ où $\underset{\sim}{y}$ désigne les μ variables $(y_1\ ,\ \ldots\ ,\ y_\mu)$. Nous supposerons toujours dans la suite que $Q(0,0)\neq 0$ de telle sorte que la fraction rationnelle (à $\mu+1$ variables) P/Q soit développable en série entière :

$$P/Q = \sum_{n,\underset{\sim}{m}} a_{n,\underset{\sim}{m}}\ x^n\ \underset{\sim}{y}^{\underset{\sim}{m}}$$

avec la convention habituelle : $\underset{\sim}{y}^{\underset{\sim}{m}} = y^{m_1} \ldots y_\mu^{m_\mu}$. Nous appellerons diagonale de la fraction rationnelle P/Q la série entière :

$$\Delta(P/Q) = \sum_n a_{n;n,\ldots,n}\ \lambda^n\ .$$

En fait, la variable x ne joue, dans cette définition, aucun rôle particulier, mais des raisons techniques vont nous obliger à perdre la symétrie entre les variables x et y_i .

A titre d'exemple, nous laissons le lecteur vérifier que la série

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 \lambda^n$$

qui apparait dans les travaux d'APÉRY sur l'irrationalité de $\zeta(3)$ est la diagonale de chacune des deux fractions rationnelles suivantes :

$$1/(1-x)[(1-y_1)(1-y_2)(1-y_3)(1-y_4) - xy_1\ y_2] \quad (\mu = 4)$$

$$1/(1-xy_1)(1-y_2-y_3-xy_2\ y_3)(1-y_4-y_5-y_1\ y_4\ y_5) \quad (\mu = 5)\ .$$

Il est clair que l'opérateur Δ se prolonge au cas où le numérateur de la fraction rationnelle contient des puissances négatives des variables. Ainsi, pour tout multi-indice $\underset{\sim}{\alpha}$ de $\underset{\sim}{Z}^\mu$, on aura

$$\Delta(\underset{\sim}{y}^{\underset{\sim}{\alpha}}\ P/Q) = \sum_{n,m} a_{n;n-\alpha_1,\ldots,n-\alpha_\mu}\ \lambda^n\ .$$

Soit f une fraction rationnelle dont on peut calculer la diagonale, et soit g une fraction rationnelle du corps $\mathbb{Q}(\lambda)$. On a alors

(1) $$\Delta(g(xy_1 \dots y_\mu)\, f(x , \underset{\sim}{y})) = g(\lambda)\, \Delta(f) .$$

Par ailleurs, si on pose

$$\partial_i = y_i \frac{d}{dy_i} \quad , \quad \partial_x = x \frac{d}{dx} \quad , \quad \partial_\lambda = \lambda \frac{d}{d\lambda} ,$$

un calcul élémentaire montre que

(2) $$\partial_\lambda(\Delta(f)) = \Delta(\partial_i(f)) = \Delta(\partial_x(f)) .$$

On constate en particulier que, pour tout indice i $(= 1 , \dots , \mu)$, on a

(3) $$\Delta((\partial_i - \partial_x)(f)) = 0 .$$

Cette formule est fondamentale pour la suite de ce papier.

2. Changement de variables.

Pour des raisons techniques, nous sommes obligés de travailler avec les variables $xy_1 \dots y_\mu$, $\underset{\sim}{y}$ au lieu des variables x et $\underset{\sim}{y}$. Ce changement est cependant assez naturel dans le problème qui nous occupe. Dans le cas $\mu = 1$ (fractions rationnelles à 2 variables), où l'on sait que les diagonales sont exactement les fonctions algébriques, c'est le nouveau dénominateur R que nous allons introduire qui est le plus significatif, alors que le dénominateur initial Q s'en déduit : le polynôme $R(x , y)$ est, à peu près, au moins dans les bons cas, le polynôme minimal tel que $R(x , f) = 0$.

On constate facilement qu'il existe un polynôme R de l'anneau $\underset{\sim}{Q}[\lambda , \underset{\sim}{y}]$, et un multi-indice $\underset{\sim}{\alpha}$ de $\underset{\sim}{N}^\mu$ tels que

$$R(xy_1 \dots y_\mu , \underset{\sim}{y}) = \underset{\sim}{y}^{\underset{\sim}{\alpha}}\, Q(x , \underset{\sim}{y}) .$$

Grâce à la formule (1), on peut définir l'opération Δ sur les fractions rationnelles S/R^r , pour tout entier r et tout polynôme S de l'anneau $\underset{\sim}{Q}(\lambda)[x , \underset{\sim}{y}]$, en posant

$$\Delta(S/R^r) = \Delta[\underset{\sim}{y}^{-r\underset{\sim}{\alpha}}\, S(xy_1 \dots y_\mu , x , \underset{\sim}{y})/Q^r(x , \underset{\sim}{y})] .$$

Les formules évidentes suivantes

(4) $$\begin{aligned} \partial_i(S(xy_1,\dots,y_\mu , x , \underset{\sim}{y})) &= (\partial_i + \partial_\lambda)(S)(xy_1,\dots,y_\mu , x , \underset{\sim}{y}) \\ \partial_x(S(xy_1,\dots,y_\mu , x , \underset{\sim}{y})) &= (\partial_x + \partial_\lambda)(S)(xy_1,\dots,y_\mu , x , \underset{\sim}{y}) \end{aligned}$$

montrent que la formule (3) s'écrit aussi

(3 bis) $$\Delta((\partial_i - \partial_x)(S/R^r)) = 0 .$$

Nous notons $d_x(S)$ (resp. $d_{\underset{\sim}{y}}(S)$) le degré du polynôme S en la variable x (resp. par rapport à l'ensemble des variables y_i) et nous posons, pour tout nombres entiers r , c , d ,

$$M_{r,c,d} = \{\Delta(S/R^r) \; ; \; d_x(S) \leqslant c \; , \; d_{\underset{\sim}{y}}(S) \leqslant (r-1)\, d_{\underset{\sim}{y}}(R) + d\} \; .$$

La formule $S/R^r = SR/R^{r+1}$ et les égalités

$$d_x(SR) = d_x(S) + d_x(R) = d_x(S) \; , \quad d_{\underset{\sim}{y}}(SR) = d_{\underset{\sim}{y}}(S) + d_{\underset{\sim}{y}}(R)$$

montrent que $M_{r,c,d} \subset M_{r+1,c,d}$. Nous considérons alors l'ensemble

$$M_{c,d} = \bigcup_{r=1}^{\infty} M_{r,c,d}$$

LEMME. - <u>L'ensemble</u> $M_{c,d}$ <u>est un espace vectoriel sur le corps</u> $\underset{\sim}{Q}(\lambda)$ <u>qui est stable par la dérivation</u> ∂_λ <u>et qui contient</u> $\Delta(P/Q)$ <u>si</u>

$$c \geqslant d_x(P) \; , \quad d \geqslant d_{\underset{\sim}{y}}(P) + \sum \alpha_i \; .$$

Le fait que $M_{c,d}$ soit un $\underset{\sim}{Q}(\lambda)$ espace vectoriel résulte immédiatement de la formule (1). D'autre part, on a

$$\Delta(P/Q) = \Delta(\underset{\sim}{y}^{\alpha}\, P/R) \subset M_{1,d_x(P),d_{\underset{\sim}{y}}(P)} + \sum \alpha_i \subset M_{c,d}$$

si les entiers c et d vérifient la condition du lemme.

Maintenant les formules (2) et (4) donnent

$$\partial_\lambda(\Delta(S/R^r)) = \Delta((\partial_x + \partial_\lambda)(S/R^r)) = \Delta(S_1/R^{r+1})$$

avec

$$S_1 = (\partial_x + \partial_\lambda)(S)\; R - r\; S\; \partial_\lambda(R) \; ,$$

c'est-à-dire, puisque les opérateurs ∂ conservent les degrés,

$$d_x(S_1) \leqslant d_x(S) \quad \text{et} \quad d_{\underset{\sim}{y}}(S_1) \leqslant d_{\underset{\sim}{y}}(S) + d_{\underset{\sim}{y}}(R) \; .$$

Ceci prouve l'inclusion

$$\partial_\lambda(M_{r,c,d}) \subset M_{r+1,c,d} \; ,$$

et achève la démonstration du lemme.

Pour démontrer que la série $\Delta(P/Q)$ vérifie une équation différentielle linéaire à coefficients dans $\underset{\sim}{Q}(\lambda)$ il suffit donc, d'après ce lemme, de montrer que l'espace vectoriel $M_{c,d}$ est de dimension finie [1]. Nous ne savons le faire que sous l'hypothèse très restrictive suivante :

(H) On pose $R_0 = R$ et $R_i = \partial_i(R)$, et on suppose qu'il existe un entier C tel que, pour tout polynôme S de l'anneau $\underset{\sim}{Q}(\lambda)[\underset{\sim}{y}]$, tel que $d_y(S) \geq C$, il existe des polynômes A_i dans $\underset{\sim}{Q}(\lambda)[\underset{\sim}{y}]$ tels que

$$S = \sum_{i=0}^{\mu} A_i\, R_i \,, \quad d_{\underset{\sim}{y}}(A_i) \leq d_{\underset{\sim}{y}}(S) - d_{\underset{\sim}{y}}(R)$$

L'hypothèse (H), avec $C = (\mu + 1)\, d_{\underset{\sim}{y}}(R) - \mu$, est satisfaite si, et seulement si, les $\mu + 1$ hypersurfaces <u>projectives</u> définies par les polynômes R_i n'ont de point commun sur aucune extension algébrique du corps $\underset{\sim}{Q}(\lambda)$ ([7], corollaire p. 169) c'est-à-dire si, et seulement si, l'hypersurface projective d'équation

$$y_0^{d_y(R)}\, R(\lambda\ ;\ \ldots\ ,\ \frac{y_i}{y_0}\ ,\ \ldots) = 0$$

n'a pas de point singulier et n'est tangente à aucune variété linéaire d'équation

$$y_{i_1} = \ldots = y_{i_k} = 0 \qquad (0 \leq i_j \leq \mu)\ .$$

LEMME. - <u>Si l'hypothèse</u> (H) <u>est vérifiée, alors, pour</u> $r \leq 1$ <u>et pour</u> $d \geq C - r d_y(R)$, <u>on a</u> $M_{r+1,c,d} \subset M_{r,c,d}$.

Soit A un polynôme de l'anneau $\underset{\sim}{Q}(\lambda)[\underset{\sim}{y}]$ et n un entier. D'après la formule (3 bis), on a

$$0 = \Delta[(\partial_i - \partial_x)(x^n A/R^r)] = \Delta[x^n(\partial_i(A) - nA)/R^r] - r\, \Delta[x^n AR_i/R^{r+1}]\ .$$

Si $d_{\underset{\sim}{y}}(A) \leq (r-1)\, d_{\underset{\sim}{y}}(R) + d$, et si $n \leq c$, la série $\Delta[x^n(\partial_i(A) - nA)/R^r]$ appartient à l'espace vectoriel $M_{r,c,d}$. Il en est alors de même de la série $\Delta(x^n AR_i/R^{r+1})$.

En appliquant l'hypothèse (H) au polynôme $\underset{\sim}{y}^{\underset{\sim}{m}}$ (ou aux polynômes $y_1^C + \underset{\sim}{y}^{\underset{\sim}{m}}$ et y_1^C), on constate qu'il existe des polynômes $A_{i,\underset{\sim}{m}}$ de l'anneau $\underset{\sim}{Q}(\lambda)[\underset{\sim}{y}]$ tels que

$$\underset{\sim}{y}^{\underset{\sim}{m}} = \sum_{i=0}^{\mu} A_{i,\underset{\sim}{m}}\, R_i \,, \quad d_{\underset{\sim}{y}}(A_{i,\underset{\sim}{m}}) \leq \sup(\textstyle\sum m_i\ ,\ C) - d_{\underset{\sim}{y}}(R)\ .$$

En particulier, si $\sum m_i \leq d + r d_{\underset{\sim}{y}}(R)$, ce nombre étant suppérieur à C, on a

$$d_{\underset{\sim}{y}}(A_{i,\underset{\sim}{m}}) \leq d + (r-1)\, d_{\underset{\sim}{y}}(R)\ .$$

---

[1] On peut démontrer que ce résultat est général. Il suffit pour cela de montrer que $\bigcup_{c,d} M_{c,d}$ s'interprète, comme un espace de cohomologie de De Rham d'une variété affine (communication de DELIGNE).

Par suite, pour tout multi-indice $(n, \underset{\sim}{m})$ tels que

$$n \leq c \ , \ \sum m_i \leq d + r\, d_{\underset{\sim}{y}}(R)$$

la série

$$\Delta(x^n \underset{\sim}{y}^{\underset{\sim}{m}}/R^{r+1}) = \sum_{i=0}^{\mu} \Delta(x^n A_i R_i/R^{r+1})$$

appartient à l'espace vectoriel $M_{r,c,d}$. Ces séries formant une base de l'espace vectoriel $M_{r+1,c,d}$, le lemme est démontré.

COROLLAIRE. - <u>Si l'hypothèse</u> (H) <u>est vérifiée, alors l'espace vectoriel</u> $M_{c,d}$ <u>est de dimension finie.</u>

Quitte à éventuellement augmenter le nombre d, et donc à augmenter la dimension de l'espace vectoriel $M_{c,d}$, on peut supposer que

$$d \geq C - d_{\underset{\sim}{y}}(R) \ .$$

Le lemme ci-dessus montre alors que l'on a, pour tout entier $r \geq 2$,

$$M_{r,c,d} \subset M_{r-1,c,d} \subset \dots \subset M_{1,c,d} \ ,$$

c'est-à-dire $M_{c,d} \subset M_{1,c,d}$. Mais maintenant, il est évident que l'espace vectoriel $M_{1,c,d}$ est de dimension finie, à savoir $(c+1)\binom{d+\mu}{\mu}$.

En regroupant nos résultats, nous avons en fait démontré que la série $\Delta(P/Q)$ satisfait, lorsque l'hypothèse (H) est vérifiée, une équation différentielle linéaire à coefficients dans le corps $\underset{\sim}{Q}(\lambda)$ d'ordre au plus

$$(d_x(P)+1)[\sup(d_y(P) + \sum \alpha_i + 1 \ , \ \mu(d_y(R)-1))]^{\mu} \ .$$

Il est évident sur les exemples que nous avons pu traiter que cette majoration est très mauvaise.

3. Structure de Frobenius.

Dans ce paragraphe, nous fixons un nombre premier p. Nous munissons les anneaux de fractions rationnelles de la norme de Gauss p-adique définie, pour les polynômes, par la formule

$$|P| = \sup |\text{coefficient de } P| \ .$$

De plus, nous supposerons que

$$|Q(0,0)| = |Q| = 1$$

(cette condition est en fait vérifiée pour presque tout p).

Cette condition entraine d'une part que les coefficients de la série $\Delta(P/Q^r)$ sont bornés et d'autre part que l'on a les majorations

$$|\Delta(P/Q^r)| \leq |P| \;;\; |\Delta(S/R^r)| \leq |S|$$

si l'on pose

$$|\sum a_n \lambda^n| = \sup(|a_n|) .$$

Pour toute série $f = \sum a_n \lambda^n$ du corps $\underset{\sim}{Q}((\lambda))$, nous posons :

$$\varphi(f) = f(\lambda^p) \;;\; \psi(f) = \sum a_{np} \lambda^n .$$

On trouve

$$(5) \qquad \psi \circ \varphi(f) = f \;;\; \varphi \circ \psi(f) = \frac{1}{p} \sum_{\xi^p=1} f(\xi\lambda) \;,\; f = \sum_{s=1}^{p-1} \lambda^s \varphi \circ \psi(\lambda^{-s} f) .$$

Par ailleurs, on vérifie facilement que les opérateurs φ et ψ envoient le corps $\underset{\sim}{Q}(\lambda)$ dans lui-même. La dernière formule ci-dessus montre en outre que les λ^s $(0 \leq s < p)$ forment une base de l'extension $\underset{\sim}{Q}(\lambda)/\varphi[\underset{\sim}{Q}(\lambda)]$.

LEMME. - <u>Pour tout polynôme</u> S <u>de</u> $\underset{\sim}{Q}(\lambda)[x , \underset{\sim}{y}]$, <u>on a</u>

$$\Delta[S(\lambda , x , \underset{\sim}{y})/R^r(\lambda^p , \underset{\sim}{y}^p)] = \sum_{a=0}^{p-1} \lambda^a \varphi(\Delta S_a/R^r) ,$$

<u>avec</u>

$$d_x(S_a) \leq \frac{1}{p} d_x(S) \;,\; d_{\underset{\sim}{y}}(S_a) \leq \frac{1}{p} d_{\underset{\sim}{y}}(S)$$

(nous utilisons la notation $\underset{\sim}{y}^p$ pour $(y_1^p , \ldots , y_\mu^p)$).

Soit a l'entier tel que $0 \leq a < p$, $n = a \pmod p$. Si l'un des entiers m_i n'est pas congru à a modulo p , on a

$$\Delta(\lambda^{-a} x^n \underset{\sim}{y}^{\underset{\sim}{m}}/R^r(\lambda^p , \underset{\sim}{y}^p)] = \Delta[x^{n-a} \underset{\sim}{y}^{\underset{\sim}{m}-a-p r \underset{\sim}{\alpha}}/Q^r(x^p , \underset{\sim}{y}^p)]$$

$$= \Delta[\sum_{k,\underset{\sim}{\ell}} a_{k,\underset{\sim}{\ell}} x^{n-a+kp} \underset{\sim}{y}^{\underset{\sim}{m}-a-pr\underset{\sim}{\alpha}+p\underset{\sim}{\ell}}] ,$$

$$= 0$$

et le lemme est trivial dans ce cas. Si on a $n = a + kp$, $\underset{\sim}{m} = a + p\underset{\sim}{\ell}$ (avec $0 \leq k \leq n/p$, $0 \leq \ell_i \leq m_i/p)$, on trouve

$$\Delta[\lambda^{-a} x^n \underset{\sim}{y}^{\underset{\sim}{m}}/R^r(\lambda^p , \underset{\sim}{y}^p)] = \Delta[x^{kp} \underset{\sim}{y}^{p\underset{\sim}{\ell}}/R^r(x^p , \underset{\sim}{y}^p)] = \varphi[\Delta(x^k \underset{\sim}{y}^{\underset{\sim}{\ell}}/R^r)] ,$$

et le lemme est encore démontré dans ce cas. Le cas général se démontre alors en utilisant la $\underset{\sim}{Q}(\lambda)$-linéarité de l'opérateur Δ et la formule (5-3).

LEMME. - Pour tout série $f = \Delta(S/R^{p^k})$ de l'espace vectoriel $M_{p^k,c,d}$ $(k \geq 1\ ,\ \ d \geq d_{\underset{\sim}{y}}(R))$, il existe une série g de l'espace vectoriel $M_{p^k,(c/p),d}$ telle que $|\psi(f) - g| \leq |p|^{k-1}\ |S|$.

Par hypothèse, on a :

$$d_x(S) \leq c\ ,\quad d_{\underset{\sim}{y}}(S) \leq d + (p^k - 1)\ d_{\underset{\sim}{y}}(R)\ .$$

En remarquant que $[\Delta(P/Q)](\xi\lambda) = \Delta[P/Q(\xi x\ ,\ \underset{\sim}{y})]$, la formule (5-2) s'écrit

$$\varphi \circ \psi(f) = \frac{1}{p} \sum_{\xi^p=1} \Delta[S(\xi\lambda\ ,\ \xi x\ ,\ \underset{\sim}{y})/R^{p^k}(\xi\lambda\ ,\ \underset{\sim}{y})]$$

$$= \Delta[S'(\lambda\ ,\ x\ ,\ \underset{\sim}{y})/ \prod_{\xi^p=1} R^{p^k}(\xi\lambda\ ,\ \underset{\sim}{y})]\ ,$$

avec

$$S' = \frac{1}{p} \sum_{\xi^p=1} S(\xi\lambda\ ,\ \xi x\ ,\ \underset{\sim}{y}) \prod_{\zeta^p=1,\ \zeta\neq\xi} R^{p^k}(\zeta\lambda\ ,\ \underset{\sim}{y})\ ,$$

c'est-à-dire, en particulier,

$$|S'| \leq |p|^{-1}\ |S|\ ,\quad d_x(S') \leq d_x(S) \leq c$$

$$d_{\underset{\sim}{y}}(S') \leq d_{\underset{\sim}{y}}(S) + (p - 1)\ p^k\ d_{\underset{\sim}{y}}(R) \leq d + (p^{k+1} - 1)\ d_{\underset{\sim}{y}}(R)\ .$$

Pour toute racine p-ième ξ de l'unité, on a

$$|\xi - 1| \leq |p|^{1/(p-1)}\ .$$

Comme $|R| = 1$ par hypothèse, on trouve

$$|R(\xi\lambda\ ,\ \underset{\sim}{y}) - R(\lambda\ ,\ \underset{\sim}{y})| \leq |p|^{1/(p-1)}\ ,$$

soit

$$|\prod_{\xi^p=1} R(\xi\lambda\ ,\ \underset{\sim}{y}) - R^p(\lambda\ ,\ \underset{\sim}{y})| \leq |p|^{1/(p-1)}$$

c'est-à-dire aussi

$$|\prod_{\zeta^p=1} R(\xi\lambda\ ,\ \underset{\sim}{y}) - R(\lambda^p\ ,\ \underset{\sim}{y}^p)| \leq |p|^{1/(p-1)}\ .$$

D'où on déduit, par un raisonnement classique,

$$|\prod_{\xi^p=1} R^{p^k}(\xi\lambda , \underset{\sim}{y}) - R^{p^k}(\lambda^p , \underset{\sim}{y}^p)| \leqslant |p|^k .$$

On obtient donc (c'est ici qu'on utilise la condition $|Q(0 , 0)| = 1$) :

$$|\varphi \circ \psi(f) - \Delta[S'/R^{p^k}(\lambda^p , \underset{\sim}{y}^p)]| \leqslant |p|^k |S'| \leqslant |p|^{k-1} |S| .$$

D'après le lemme précédent, on sait qu'il existe des polynômes S_a tels que

$$\Delta[S'/R^{p^k}(\lambda^p , \underset{\sim}{y}^p)] = \sum_{a=0}^{p-1} \lambda^a \varphi(\Delta(S_a/R^{p^k})) .$$

En appliquant l'opérateur ψ , qui diminue les normes, à la différence considérée, on trouve :

$$|\psi(f) - \Delta(S_0/R^{p^k})| \leqslant |p|^{k-1} |S| ;$$

avec

$$d_x(S_0) \leqslant \frac{1}{p} d_x(S') \leqslant c/p ,$$

$$d_{\underset{\sim}{y}}(S_0) \leqslant \frac{1}{p} d_{\underset{\sim}{y}}(S') \leqslant d/p + (p^k - \frac{1}{p}) d_{\underset{\sim}{y}}(R) \leqslant d + (p^k - 1) d_{\underset{\sim}{y}}(R) ,$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

Nous notons E le corps des éléments analytiques dans le disque générique, c'est-à-dire le complété du corps $\underset{\sim}{Q}(\lambda)$ pour la norme de Gauss. Le complété de l'espace vectoriel $M_{c,d}$, pour la norme sup des valeurs absolues des coefficients, n'est autre que le E-espace vectoriel

$$\mathfrak{M}_{c,d} = M_{c,d} \otimes_{\underset{\sim}{Q}(\lambda)} E .$$

Les opérateurs ψ et φ se prolongent à ces différents ensembles par continuité.

COROLLAIRE. - <u>Si l'hypothèse</u> (H) <u>est vérifiée, l'opérateur</u> ψ <u>envoie l'espace vectoriel</u> $\mathfrak{M}_{c,d}$ $(d \geqslant \sup(d_y(R) , C-d_y(R)))$ <u>dans lui-même.</u>

Comme l'hypothèse (H) est vérifiée, tout élément f de l'espace vectoriel $M_{c,d}$ appartient à $M_{1,c,d}$, et peut donc s'écrire $\Delta(S/R) = \Delta(SR^{p^k-1}/R^{p^k})$. D'après le lemme précédent, pour tout nombre k , il existe un élément g_k de l'espace vectoriel $M_{p^k,(c/p),d} \subset M_{c,d}$ tel que

$$|\psi(f) - g_k| \leqslant |p|^{k-1} |SR^{p^k-1}| = |p|^{k-1} |S| .$$

Le corollaire se déduit immédiatement de ce résultat et du fait que l'espace vectoriel $\mathfrak{M}_{c,d}$ est le complété de $M_{c,d}$.

THÉORÈME. - Si l'hypothèse (H) est vérifiée, le module avec connexion formé du E-espace vectoriel $\mathfrak{M}_{c,d}$ $(d \geq \sup(d_Y(R)\ ,\ C-d_Y(R)))$, muni de l'action naturelle des dérivations de l'ensemble $E\ \partial_\lambda$, est invariant par le foncteur de Frobenius.

Comme l'hypothèse (H) est vérifiée, on a vu dans le paragraphe 3 que l'espace vectoriel $M_{c,d}$ était stable par la dérivation ∂_λ . Par continuité, il en est de même de l'espace vectoriel $\mathfrak{M}_{c,d}$. Maintenant, la formule

$$f = \sum_{a=0}^{p-1} \lambda^a\ \varphi \circ \psi(\lambda^{-a}\ f)\ ,$$

qui est vraie pour tout élément de $M_{c,d}$, donc pour tout élément de $\mathfrak{M}_{c,d}$, montre à l'aide du corollaire ci-dessus que

$$\mathfrak{M}_{c,d} \subset E \otimes_{\varphi(E)} \varphi(\mathfrak{M}_{c,d})\ .$$

En regardant les dimensions sur le corps E , on constate que l'inclusion ci-dessus est en fait une égalité. Ceci démontre le théorème (pour une définition du foncteur de Frobenius on pourra consulter [2]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHRISTOL (G.). - Fonctions et éléments algébriques (à paraître).

[2] CHRISTOL (G.). - Systèmes différentiels linéaires p-adiques : Structure de Frobenius faible, Bull. Soc. math. France, t. 109, 1981, p. 83-122.

[3] DELIGNE (P.). - Intégration sur un cycle évanescent, Publ. IHES, 1983.

[4] DWORK (B.). - On Apery's differential operator, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 7/8e année, 1979/81, n° 25, 6 p.

[5] DWORK (B.). - Arithmetic theory of differential equation, "Symposia Mathematica", p. 225-243. - London, New York, Academic Press, 1981 (Institute nazionale di alta Matematica, 24).

[6] FLIESS (M.). - Sur divers produits de séries formelles, Bull. Soc. math. France, t. 102, 1974, p. 181-191.

[7] LAZARD (D.). - Algèbre linéaire sur $K[X_1\ ,\ \dots\ ,\ X_n]$ et éliminations, Bull. Soc. math. France, t. 105, 1977, p. 165-190.