MARIUS VAN DER PUT

Monodromie d'une équation différentielle p-adique

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 15 (1987-1988), p. 6-12
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1987-1988__15__6_0>

Groupe d'Etude d'Analyse Ultramétrique
(1987-1988)

MONODROMIE D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE P-ADIQUE

par Marius van der put

Introduction.

Soit $u' = Mu$ une équation différentielle p-adique munie d'une structure de Frobenius. Pour fixer les idées on prend comme espace de base l'affinoïde

$$D = \{z \in \mathbb{C}_p \mid |z| \leq 1 \quad \text{et} \quad |z-a_i| = 1 \text{ pour } i = 1,\ldots,s\}.$$

Les coefficients de la matrice M sont des fonctions holomorphes sur D et u' désigne $\frac{d}{dz}u$.

D'après B. Dwork et N. Katz on sait que l'équation possède dans chaque disque ouvert U de rayon 1, contenu dans D, une base de solutions. En supposant que l'application de Frobenius est un isomorphisme ("unit-root") on trouve que les solutions sur U sont des fonctions bornées. Par contre, il y a peu de chance de trouver des solutions holomophes sur D.

Le but de l'exposé est d'introduire une notion de monodromie associée à l'équation différentielle. Dans l'exemple au-dessus la monodromie est une représentation continue.

$$m : \pi_1(\bar{D}) \to Gl(g, \mathbb{Z}_p)$$

Ici, $\bar{D} = \mathbb{A}^1 - \{\bar{a}_1;\ldots\bar{a}_s\}$ est la réduction canonique de l'affinoïde D; le groupe fondamental algébrique de $\bar{D}$ est noté par $\pi_1(\bar{D})$; le rang de l'équation différentielle est g. Le noyau de m correspond à une suite d'extensions étales de D telle que l'équation différentielle possède une base de solutions globales sur la limite de cette suite d'extensions étales de D. En d'autres termes, les solutions globales sont des limites de fonctions algébriques sur D.

L'idée de cette représentation m se trouve déjà dans Katz [2]. Récemment,

R. Crew [1] a développé cette idée de Katz. L'article [1] est proche de notre point de vue. Des démonstrations complètes et des exemples seront publiés dans la thèse de L. Van der Marel (1989), Université de Groningen).

§1. Cristaux

Soit k un corps parfait avec car $k = p \neq 0$; soit $W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt sur k et soit K le corps des fractions de $W(k)$. On considère des cristaux sur X/k, où X est une variété lisse et connexe sur k. Comme cette notion est locale sur X pour la topologie de Zariski on suppose que X est affine et donc $X = spec(A_o)$.

Soit $\mathfrak{X} = spf(A)$ un relèvement de X comme schéma formel, affine et lisse sur $W(k)$. La fibre spéciale $\mathfrak{X} \otimes K$ *de* $\mathfrak{X}$ est égale à X et la "fibre générale" $\mathfrak{X}^{an} = Spm(A \otimes K)$ est l'espace affinoïde associé à l'algèbre affinoïde $A \otimes K$. On fixe un relèvement $\varphi : A \to A$ de l'application de Frobenius, $t \to t^p$, de A_o.

Un F-cristal sur X/k est un A-module localement libre M munit d'une connection $\nabla : M \to \Omega_A \otimes M$ et d'une structure de Frobenius $F : A_\varphi \otimes_A M \to M$ tel que :

(i) Ω_A = le module des formes différentielles continues de $A/W(k)$.

(ii) ∇ est intégrable.

(iii) $F \otimes \mathbb{Q}$ est un isomorphisme.

(iv) F est horizontale par rapport à ∇.

On dit que le F-cristal (M, ∇, F) est "unit-root" si en plus

(v) F est un isomorphisme de A-modules.

Théorème 1. Les catégories {"unit-root" F-cristaux sur X/k} **et** {représentations continues p-adiques de $\pi_1(X)$)} **sont équivalentes.**

Remarque. L'idée de ce théorème se trouve dans [2]. Dans [1] on montre un résultat plus général où $\mathbf{Z}_p$ est remplacé par une extension finie.

Esquisse de la démonstration.

On se donne un corps agébriquement clos $\omega \supset A_o$. Soit $A_o^{ét}$ la réunion de toutes les extensions étales de A_o dans ω. Alors $\pi = \pi_1(X) = \pi_1(X, \omega)$, le groupe fondamentale algébrique de X, est le groupe de Galois de l'extension $Fr(A_o^{ét})/Fr(A_o)$. Chaque extension étale de A_o se relève de façon unique en extension étale de A. On écrit $A^{ét}$ pour le complété p-adique de la réunion de toutes les extensions étales de A (contenu dans un corps algébriquement clos $\supset Fr(A)$). On a donc $A^{ét}/(p) = A_o^{ét}$. Le groupe π opère sur $A^{ét}$ et on montre facilement que $(A^{ét})^{\pi} = A$. L'endomorphisme φ de A s'étend de façon unique en un endomorphisme de $A^{ét}$. Ce dernier est encore noté par φ . Remarquons que φ commute avec l'action de π.

Soit $N = A^{ét} \otimes_A M$ et $F : A_o^{ét} \otimes N \to N$ l'extension de l'application F donnée. On regarde F comme application φ-linéaire de N dans N.
Alors il existe une base $e_1,\ldots,e_g$ de N sur $A^{ét}$ telle que $F(e_i) = e_i$ pour tout i. En plus $\{n\in N|F(n) = n\} = \bigoplus_{i=1}^{g} \mathbb{Z}_p e_i$. Cela se montre en vérifiant que la suite des équations $F(m) \equiv m \mod p^k (k = 1,2,\ldots$ et $m\in M)$ donne une suite d'extensions étales de A_o. Toutes les équations sont alors résolubles sur $A^{ét}$.

L'action de π sur N commute avec F et alors $\bigoplus_{i=1}^{g} \mathbb{Z}_p e_i$ est invariant par π. On trouve ainsi une représentation continue $m : \pi \to Gl(g,\mathbb{Z})$. Remarquons que ∇ possède alors une matrice fondamentale à coefficients dans $A^{ét}$.

D'autre part, soit $p : \pi\to Gl(g,\mathbb{Z}_p)$ une représentation continue donnée. On définit (N,∇,F) avec action de π par

(i) $N = A^{ét} \otimes_{\mathbb{Z}_p} (\mathbb{Z}_p)^g$ et $\sigma\in\pi$ opère sur N par la formule $\sigma(a\otimes m) = \sigma(a) \otimes p(\sigma)m$.

(ii) $F(a \otimes m) = \varphi(a) \otimes m$.

(iii) $\nabla(a \otimes m) = da \otimes m$.

Alors ∇ et F commutent avec l'action de π. On peut montrer que $M = N^{\pi}$ est un A-module localement libre de rang g et que $A^{ét} \otimes_A M \tilde{\to} N$. Alors (M,∇,F) est un F-unit root-cristal.

Théorème 2. Soit (M,∇,F) un F-unit-root-cristal sur A. Le groupe de Galois différentiel de (M,∇) est la clôture de Zariski dans $Gl(g,\mathbb{Z}_p)$ du groupe de monodromie de (M,∇,F).

Démonstration.

Le groupe de monodromie est l'image de l'application de monodromie $m : \pi \to Gl(g,\mathbb{Z}_p)$. (M,∇) possède une matrice fondamentale (c_{ij}) à coefficients dans $Fr(A^{\text{ét}})$. Alors $K = Fr(A)(c_{ij})$ est une extension de Picard-Vessiot pour (M,∇) et le groupe différentiel est égal à $DGal(K/Fr(A)) \subset Gl(g,\mathbb{Q}_p)$.

Il est clair que $m(\pi)$ opère sur K et que $m(\pi) \subset DGal(K/Fr(A))$. Pour montrer que la clôture de Zariski de $m(\pi)$ est égale à $DGal(K/Fr(A))$ il suffit de montrer que $K^{m(\pi)} = Fr(A)$. (On admet ici la théorie de Galois pour des connections intégrables. Je ne connais pas de références faciles pour cela).

Il suffit donc de montrer que $Fr(A^{\text{ét}})^{\pi} = Fr(A)$. Il est facile de montrer que $(A^{\text{ét}})^{\pi} = A$. Soit maintenant $\xi \in Fr(A^{\text{ét}})^{\pi}$ et soit

$$I = \{a \in A^{\text{ét}} \mid a\xi \in A^{\text{ét}}\}$$

L'idéal I est fermé, $\neq 0$, invariant par π; $pa \in I \Rightarrow a \in I$. Il suffit de montrer $I \cap A \neq 0$. Pour tout $k \geq 1$ l'idéal $J_k = (I,p^k) \cap A$ de A *est* $\neq 0$. Soit Z_k l'ouvert analytique de $\mathfrak{X}^{an}$ défini par $|f(x)| \leq |p^k|$ pour toutes les f dans J_k. On montre que $\bigcap_{k=1}^{\infty} Z_k$ est un diviseur de $\mathfrak{X}^{an}$. Comme $\mathfrak{X}^{an}$ est affinoïde, il existe un $a \in A$, $a \neq 0$, avec (diviseur de a) $\geq \bigcap_{k=1}^{\infty} Z_k$. Cet élément a appartient à I.

§2. Le lien avec les groupes formels.

Soit A l'anneau du §1. On définit un **groupe de cohomologie formelle de de Rham** par

$$H^1_{FDR}\ (A[[t_1,\dots,t_g]])/A = \frac{\text{les 1-formes fermées}}{\text{les 1-formes exactes}}$$

C'est un A-module (immense et avec beaucoup de torsions) muni d'un ∇,F naturel. Soit $G = Spf(A[[t_1,\dots,t_g]])$ un groupe formel, commutatif, de dimension g et de hauteur g. Le A-module des 1-formes invariante sur G sera noté par Ω.

Théorème 3.

(1) $G \otimes A^{ét} \cong \hat{\mathbb{G}}^g_{m,A^{ét}}$ **(i.e. le produit de g copies du groupe formel multiplicatif sur** $A^{ét}$.

(2) $\Omega \to H^1_{FDR}$ **est injectif et l'image est invariant par** ∇ **et** F.

(3) $(\Omega, \nabla, p^{-1}F$ **est un** F**-unit root-cristal et la représentation p-adique de** $(\Omega, \nabla, p^{-1}F)$ **coïncide avec l'action de** π **sur les "groupe-like elements" de** $G \otimes A^{ét}$.

Démonstration. On admet (1). Alors $G \otimes A^{ét}$ est le spectre formel de $A^{ét}[[s_1, \dots, s_g]]$ où $\mu(1+s_i) = (1+s_i)$ pour $i = 1, \dots, g$. L'ensemble des "groupe-like elements" est égale à $\{(1+s_1)^{a_1} \dots (1+s_g)^{a_g} | a_1, \dots, a_g \in \mathbb{Z}_p\} = \cong \mathbb{Z}_p^g$. On constate que $\nabla \frac{ds_i}{1+s_i} = F \frac{ds_i}{1+s_i} = p \frac{ds_i}{1+s_i}$ et $A^{ét} \otimes \Omega$ est le $A^{ét}$ module libre engendré par $\frac{ds_1}{1+s_1}, \dots, \frac{ds_q}{1+s_q}$.

Les propriétés (2) et (3) du théorème sont maintenant claires.

Situation géométrique.
Soit $J \to Spf(A)$ une famille de variétés abéliennes formellement lisse, telle que la matrice de Hasse-Witt de $J_o := J \otimes A_o$ est inversible.

Alors $H^1_{DR}(J/A)$ est un F-cristal de rang $2g$ et d'après B. Dwork et N. Katz, il existe un "unit-root" sous-cristal $U \subset H^1_{DR}(J/A)$ de rang g. Le sous-cristal U est unique.

Théorème 4. (U, ∇, F) **est isomorphe au dual du cristal** $(\Omega, \nabla, \frac{1}{p} F)$ **obtenu à partir du groupe formel** $\hat{J}$ **sur A.**

§3. Calcul d'un groupe de monodromie.

Une famille de courbes elliptiques $E \to Spf\ A$ (avec les conditions de §2) donne une représentation $\pi \to \mathbb{Z}^*$. Pour le calcul de l'image de cette flèche on peut se ramener à la famille $X(2)$ sur $A = W(\bar{\mathbb{F}}_p) < \lambda, \frac{1}{\lambda(1-\lambda)D_p(\lambda)}>$

où $p \neq 2$ let $D_p(\lambda) = \sum_{i=o}^{(p-1)/2} \begin{bmatrix} (p-1)/2 \\ i \end{bmatrix}^2 \lambda^i$. L'équation affine de cette courbe est $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$.

Théorème. Le groupe de monodromie de la partie "unit-root" de $H^1_{DR}(X(2)/A)$ **est** $\mathbb{Z}_p^*$.

Démonstration. D'après les théorèmes 3 et 4 il suffit de calculer l'action de π sur l'ensemble des "group-like elements" du groupe formel $\hat{X}(2)$ sur $A^{ét}$.La réduction modulo p de ce groupe formel possède la même action de π $\tau = \lambda-\lambda_o$ et on regarde l'inclusion $A/(p) = \bar{\mathbb{F}}[\lambda, \frac{1}{\lambda(1-\lambda)D_p(\lambda)}]$ dans $\bar{\mathbb{F}}_p((\tau))$. Il existe un choix du paramètre t et un groupe formel G sur $\bar{\mathbb{F}}_p[[\tau]]$ avec $[p](t) = \tau t^p + \varepsilon t^{p^2} + \ldots$; $\varepsilon \in \bar{\mathbb{F}}_p\|\tau\|^*$, tel que $G \otimes \bar{\mathbb{F}}_p((\tau))$ est le groupe formel de $X(2)$ sur $\bar{\mathbb{F}}_p((\tau))$. On a utilisé ici que la réduction modulo τ dans G est un groupe formel de hauteur 2 et que λ_o est un zéro simple de D_p.

Soit K une clôture séparable de $\bar{\mathbb{F}}_p((\tau))$. Alors $G \otimes K = Spf(K[[s]])$ où $\mu(1+s) = (1+s) \otimes (1+s)$. Le groupe de Galois $Gal(K/\bar{\mathbb{F}}_p((\tau))$ opère sur les "groupes-like elements" = $\{(1+s)^a/a \in \mathbb{Z}_p^*\}$. Il suffit de montrer que cette représentation φ : $Gal(K/\bar{\mathbb{F}}_p((\tau)) \to \mathbb{Z}_p^*$ est surjective.

Posons $s = \sum_{n\geq 1} \lambda_n t^n$ (les $\lambda_n \in K$). L'égalité $[p](s) = s^p$ donne une suite d'équations algébriques pour les λ_{φ^n}. Un calcul explicite avec ces équations montre que $Gal(K/\bar{\mathbb{F}}_p(\tau)) \to \mathbb{Z}_p^* \to (\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})^*$ est surjective. Il s'ensuit que φ est également surjective.

Bibliographie.

[1] R. Crew - F-Isocrystals and p-adic Representations Proc. of symposia in Pure Math. Volume 46 (1987), 111-138.

[2] N. Katz - Travaux de Dwork, Sém. Bourbaki 409, Lectures Notes in Math., Volume 317, Springer-Verlag, 1973.