RAIRO. INFORMATIQUE THÉORIQUE

J.-P. DELAHAYE

Sur quelques limitations des algorithmes dans le traitement des suites

RAIRO. Informatique théorique, tome 19, nº 1 (1985), p. 3-20
<http://www.numdam.org/item?id=ITA_1985__19_1_3_0>

R.A.I.R.O. Informatique théorique/Theoretical Informatics
(vol. 19, n° 1, 1985, p. 3 à 20)

SUR QUELQUES LIMITATIONS DES ALGORITHMES DANS LE TRAITEMENT DES SUITES (*)

par J.-P. DELAHAYE (1)

Communiqué par A. ARNOLD

Résumé. — *Nous introduisons une relation (I.F.) qui exprime de façon partielle les conditions que doit satisfaire une transformation de suites pour être « calculable ».*

Cette relation qui peut s'interpréter comme une condition de continuité, se révèle être très intéressante car, tout en s'appliquant à des espaces de suites quelconques, elle fournit facilement, sans l'usage de notions récursivistes, des résultats de limitation très précis. C'est ce que nous montrons à propos de problèmes de décidabilité de la périodicité, d'extraction des sous-suites convergentes, d'accélération de la convergence. Nous proposons une définition des transformations de suites quasi-algorithmiques et montrons l'identité entre ces transformations et celle vérifiant (I.F.).

Abstract. — *A relation (I.F.) is given which partially expresses the conditions to be satisfied by a sequence transformation in order to be "calculable". We can apply this relation on general space and without using recursive notions.*

This relation gives us sharp negative results concerning sequence transformations. This is shown for decidability problems of periodicity, for extraction problems of convergent sequences, for acceleration problems. We also propose a definition of quasi algorithmic transformations and we establish the identity between those transformations and the transformations satisfying (I.F.).

Depuis longtemps en analyse numérique s'est posé le problème du traitement numérique des suites. Partant d'une suite infinie (x_n) supposée donnée finiment à chaque instant des calculs, on cherche à engendrer une autre suite qui, par exemple, en accélère la convergence. Il y a bien des années que l'on a remarqué que certains problèmes simples (comme celui de l'accélération de la convergence des suites logarithmiques) résistaient à toutes les tentatives de résolution [5, 6]. Depuis 1979, les choses se sont éclaircies car on a réussi

(*) Reçu en octobre 1983, révisé en décembre 1983.
(1) Université des Sciences et Techniques de Lille-I, U.E.R. d'I.E.E.A., Informatique, 59655 Villeneuve-d'Ascq Cedex (France).

à établir l'impossibilité de la solution de plusieurs problèmes [10, 15]. La méthode utilisée dans la démonstration de ces « résultats négatifs » semble un peu inhabituelle car elle évite le recours aux notions récursivistes qui, *a priori*, semblent de rigueur dans toute démonstration de résultats indiquant l'impossibilité de certains calculs [20].

Notre but dans cet article est de présenter cette méthode sous une forme simplifiée et « self-contained », et de montrer que bien que reposant sur une expression seulement partielle de l'algorithmicité, elle peut donner des résultats très précis. Nous essaierons aussi d'établir quelques liens entre la formulation présentée et celles utilisées en informatique théorique. Il est possible que d'autres liens que ceux indiqués puissent être faits.

Au paragraphe 1, nous introduisons la définition de transformation à information finie, nous donnons des exemples et nous faisons des commentaires.

Au paragraphe 2, nous caractérisons les transformations à informations finies.

Au paragraphe 3, nous montrons en donnant des exemples à propos de trois types de questions rencontrées, en analyse numérique, que les résultats négatifs obtenus par notre méthode peuvent être très précis. Ces résultats portent :

(*a*) sur les problèmes de décidabilité à la limite de la nature périodique ou non d'une suite,

(*b*) sur les problèmes d'extraction de sous-suites convergentes de suites non convergentes,

(*c*) sur les problèmes d'accélération de la convergence.

§ 1. TRANSFORMATIONS DE SUITES

Soient E et F deux ensembles quelconques. Nous désignerons par $E^{\mathbb{N}}$ (resp. $F^{\mathbb{N}}$) l'ensemble des suites infinies d'éléments de E (resp. F).

Nous appellerons *transformations de suites de $E^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $F^{\mathbb{N}}$* toute fonction (partielle) de $E^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $F^{\mathbb{N}}$. Nous noterons $\text{Trans}(E, F)$ l'ensemble de toutes les transformations de suites de $E^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $F^{\mathbb{N}}$.

Soit $T \in \text{Transf}(E, F)$. T peut être considérée comme la donnée d'une infinité $T^{(0)}, T^{(1)}, \ldots, T^{(n)}, \ldots$ de fonctions (partielles) de $E^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans F, appelées composantes de T. Chaque $T^{(i)}$ a un domaine de définition que nous noterons $\text{dom}\, T^{(i)}$ et le domaine de définition de T est $\text{dom}\, T = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \text{dom}\, T^{(i)}$.

Si $(x_n) \in \operatorname{dom} T$, $T(x_n)$ est une suite dont le $i^{\text{ème}}$ terme est $T^{(i)}(x_n)$. Nous utiliserons souvent la notation t_i pour désigner ce $i^{\text{ème}}$ terme.

La transformation $T \in \operatorname{Transf}(E, F)$ sera dite *à information finie* si elle possède la propriété suivante :

$$\text{(I.F.)} \quad \begin{cases} \forall (x_n) \in \operatorname{dom} T, \quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad \exists m \in \mathbb{N}, \quad \forall (y_n) \in E^{\mathbb{N}} \\ (x_0, x_1, \ldots, x_m) = (y_0, y_1, \ldots, y_m) \Rightarrow \begin{Bmatrix} (y_n) \in \operatorname{dom} T^{(p)} \quad \text{et} \\ T^{(p)}(x_n) = T^{(p)}(y_n) \end{Bmatrix} \end{cases}$$

L'ensemble des transformations à information finie sera notée : $If(E, F)$.

Remarques et commentaires

(1) Considérons E muni de la topologie discrète, qui est métrisable par :

$$\begin{aligned} d(x, y) &= 1 \quad \text{si} \quad x \neq y \\ d(x, y) &= 0 \quad \text{si} \quad x = y \end{aligned}$$

$E^{\mathbb{N}}$ est alors naturellement muni de la topologie produit, qui, puisque $\mathbb{N}$ est dénombrable, est une topologie métrisable [21], par exemple par :

$$d((x_n), (y_n)) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^i} d(x_i, y_i)$$

ou par :

$$\begin{aligned} d((x_n), (y_n)) &= 0 \quad \text{si} \quad (x_n) = (y_n) \\ d((x_n), (y_n)) &= 2^{-\min\{n \mid x_n \neq y_n\}} \quad \text{si} \quad (x_n) \neq (y_n) \end{aligned}$$

Les ouverts pour cette topologie sont les ensembles de suites ayant en commun une même « information finie » (à condition de considérer les éléments de E même lorsque $E = \mathbb{R}$ comme des informations élémentaires).

Cette topologie sur $E^{\mathbb{N}}$ en fait un compact si et seulement si E est fini. D'ailleurs, lorsque E est fini, cette topologie coïncide exactement avec celle définie sur les mots purement infinis E^{ω} [4, 19].

L'ensemble des suites finies $E^{(\mathbb{N})}$ peut être complété de deux façons naturelles (au moins) : au sens des c.p.o. et au sens des espaces métriques [7, 8, 9]). Dans chaque cas, on obtient $E^{(\mathbb{N})} \cup E^{\mathbb{N}}$, mais muni de topologies différentes. Cependant, les restrictions à $E^{\mathbb{N}}$ de ces topologies coïncident exactement entre elles et avec celle que nous considérons (des remarques analogues peuvent être faites à propos des arbres finis et infinis [2, 7, 8, 9]).

On a la caractérisation suivante :

Soit $T \in \text{Transf}(E, F)$: T est à information finie si et seulement si T est de domaine fermé, et continue (1).

(2) Il est bien clair que toute transformation « algorithmique » (quel que soit le sens raisonnable qu'on puisse donner à cette notion) vérifiera la propriété (I.F.), car cette propriété exprime simplement que, pour chaque réponse t_k donnée par T, un nombre fini de points a été utilisé et que, par conséquent, si une autre suite (y_n) coïncide avec (x_n) pour tous ces points alors $T^{(k)}(x_n) = T^{(k)}(y_n)$.

Exemples : (*a*) Soit la transformation $T : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ définie par $T^{(k)}(x_n) = x_i$ où :

$$\begin{array}{llll} i = 1\,000 & \text{si} \quad k=0 & \text{et} & x_0 \text{ est pair} \\ i = 10^{1000} & \text{si} \quad k=0 & \text{et} & x_0 \text{ impair} \\ i = k^{x_0 + x_1 + \ldots + x_k} & \text{si} \quad k \neq 0 & & \end{array}$$

Cette transformation est à information finie.

(*b*) $E = F = \mathbb{N}$.

Considérons les transformations (que nous appellerons récursives) définies à partir d'une machine de Turing à trois rubans :

sur le premier sont inscrits les termes de la suite (x_n), ce ruban peut être lu mais non effacé, sur le second, qui est blanc au départ, s'inscrivent les termes de la suite transformée t_n, ce ruban peut être écrit mais non effacé. Sur le troisième, s'effectuent les « calculs intermédiaires », ce ruban peut être écrit, lu ou effacé. Il est clair que toute transformation récursive (en ce sens) est à information finie. L'inverse n'est pas vrai ; on peut aisément construire des transformations à information finie de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ qui ne soient pas récursives. Par exemple, si A est une partie de $\mathbb{N}$ non récursivement énumérable $A = \{t_0, t_1, \ldots, t_n, \ldots\}$, la transformation constante $T : (x_n) \to (t_n)$ est à information finie (car constante) mais pas récursive.

Notre définition de transformation à information finie est donc très large. Puisque dans le cas $E = F = \mathbb{N}$ elle contient celle de transformation récursive, cela signifie que tous les résultats négatifs que nous obtiendrons avec notre formulation faible (résultats de la forme : il n'existe pas de transformation à information finie réalisant tel traitement sur la famille $\mathscr{S}$) donneront des résultats négatifs récursifs analogues (résultats de la forme : il n'existe pas de transformation récursive réalisant tel traitement sur la famille $\mathscr{S}$).

---

(1) Arrivé à (I.F.) par des voies tout à fait différentes, nous n'avions pas conscience de cette interprétation. C'est A. Arnold qui nous l'a indiquée.

Pour une traduction récursive des résultats positifs, par contre, à chaque fois il serait nécessaire de regarder si l'algorithme utilisé dans la démonstration est récursif ou non ; le plus souvent cela est évident.

Les avantages de notre formulation faible sont cependant multiples :

— nous ne serons pas obligés d'énoncer nos résultats avec $E=F=\mathbb{N}$, ni même avec E, F dénombrables,

— la simplicité de la condition (I.F.) se retrouvera dans les démonstrations,

— la nature exacte des résultats négatifs que nous obtiendrons ne sera pas masquée par des notions récursives en fait inutiles : si certains traitements sont impossibles, cela est dû à la nature du flux d'information et non pas à la relative rareté des fonctions récursives dans l'ensemble de toutes les fonctions.

(3) Le fait qu'une condition de continuité exprime (partiellement) une condition de calculabilité n'est pas nouveau. On rencontre des situations analogues dans [1, 22].

§ 2. TRANSFORMATIONS QUASI-ALGORITHMIQUES : ÉQUIVALENCE AVEC LES TRANSFORMATIONS A INFORMATION FINIE

Nous allons établir une caractérisation des transformations à information finie. Cette caractérisation montre qu'une transformation est à information finie si et seulement s'il existe une sorte d'algorithme (que nous appelons « quasi-algorithme ») qui en effectue le calcul.

Nous appellerons *quasi-algorithmes de* $E^{\mathbb{N}}$ *à valeurs dans* $F^{\mathbb{N}}$ la donnée de $A=(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, f_n fonction (totale) de E^{n+1} dans $F\cup\{\perp\}$ $(\perp\notin F)$.

Pour toute suite $(x_n)\in E^{\mathbb{N}}$ on considère la suite $(z_n)\in(F\cup\{\perp\})^{\mathbb{N}}$ définie par :

$$z_0=f_0(x_0),\qquad z_1=f_1(x_0,x_1),\ \ldots,\ z_n=f_n(x_0,x_1,\ldots,x_n),\ \ldots$$

Si $z_n\neq\perp$ une infinité de fois, on dit que (x_n) appartient au domaine de A (dom A) et on note alors $A(x_n)$ la suite $(A^{(m)}(x_n))_m\in F^{\mathbb{N}}$ obtenue en ne gardant de (z_n) que les termes différents de $\perp$:

$$\begin{aligned}
&A^{(0)}(x_n)=z_{i_0} \quad \text{avec} \quad \forall j<i_0 : z=\perp \quad \text{et} \quad z_{i_0}\neq\perp\\
&A^{(m)}(x_n)=z_{i_m} \quad \text{avec} \quad \forall j>i_{m-1} : j<i_m \Rightarrow z_j=\perp \quad \text{et} \quad z_{i_m}\neq\perp .
\end{aligned}$$

On appelle transformation associée à A (et on note ${}^{\tau}A$) la transformation de suites T de $E^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $F^{\mathbb{N}}$ qui, pour $(x_n)\in$dom A donne $T^{(m)}(x_n)=(z_{i_m})$.

On dit qu'une transformation de suites T de $E^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $F^{\mathbb{N}}$ est quasi algorithmique s'il existe un quasi-algorithme A tel que ${}^{\tau}A=T$.

THÉORÈME 5 : *Soit T une transformation de suites de $E^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $F^{\mathbb{N}}$ alors :*

[*T est quasi algorithmique*] $\Leftrightarrow$ [*T est à information finie*].

Démonstration :

$\boxed{\Leftarrow}$ Évident.

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit T une transformation à information finie.

Nous allons construire un quasi-algorithme $A=(f_n)$

$$f_n : E^{n+1} \to F \cup \{ \perp \}$$

Nous montrerons que ${}^{\tau}A = T$.

A chaque suite $(x_m) \in \operatorname{dom} T$ on fait correspondre une suite infinie d'entiers (i_n) définie par :

. i_0 est le plus petit entier tel que :

$$\forall (y_m) \in E^{\mathbb{N}} \qquad (x_0, x_1, \ldots, x_{i_0}) = (y_0, y_1, \ldots, y_{i_0}) \Rightarrow T^{(0)}(x_m) = T^{(0)}(y_m)$$

. i_n est le plus petit entier tel que :

$$i_n > i_{n-1}$$

et

$$\forall (y_m) \in E^{\mathbb{N}} \qquad (x_0, x_1, \ldots, x_{i_n}) = (y_0, y_1, \ldots, y_{i_n}) \Rightarrow T^{(n)}(x_m) = T^{(n)}(y_m)$$

(la suite (i_n) existe car (I.F.) est vérifiée pour T).

Soit $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction totale $f_n = E^{n+1} \to F \cup \{ \perp \}$ de la façon suivante :

Soit $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in E^{n+1}$;

s'il n'existe pas $(x_m) \in \operatorname{dom} T$ tel que $(x_0, \ldots, x_n) = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ on pose :

$$f_n(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \perp ,$$

s'il existe $(x_m) \in \operatorname{dom} T$ tel que $(x_0, \ldots, x_n) = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ on pose :

$$\begin{aligned} f_n(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) &= T^{(n)}(x_m) && \text{si} \quad i_p = n \\ &= \perp && \text{si} \quad n \notin \{ i_k \mid k \in \mathbb{N} \} . \end{aligned}$$

Remarquons d'abord que cette définition ne dépend pas de (x_m). En effet, soit (x_m^1) une autre suite du domaine de T telle que $(x_0^1, \ldots, x_n^1) = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$. Soit (i_n^1) la suite d'entiers qui lui est associée.

Si $n = i_p$ alors, d'après (I.F.) on a :

$$(i_0, i_1, \ldots, i_p) = (i_0^1, i_1^1, \ldots, i_p^1)$$

et

$$T^{(p)}(x_m) = T^{(p)}(x_m^1).$$

Si $n \notin \{ i_k \mid k \in \mathbb{N} \}$ alors $n \notin \{ i_k^1 \mid k \in \mathbb{N} \}$
et donc

$$T_n(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \perp.$$

Reste à établir que, pour le quasi-algorithme $A = (f_n)$ ainsi défini, on a bien ${}^\tau A = T$.

Ceci résulte de ce que, par définition :

$${}^\tau A(x_m) = (f_{i_p}(x_0, \ldots, x_{i_p})) = (T^{(p)}(x_m)).$$

§ 3. LIMITATIONS DES TRANSFORMATIONS A INFORMATION FINIE

Dans ce paragraphe, nous abordons trois types de problèmes pour lesquels il est possible avec la seule définition de transformation à information finie, d'obtenir des résultats de limitation d'une grande précision.

(*a*) Le premier type de problèmes est celui de la détermination « à la limite » de la nature périodique ou turbulente d'une suite,

(*b*) Le second type de problèmes est celui de l'extraction algorithmique de sous-suites convergentes de suites non convergentes,

(*c*) Le troisième type de problèmes est celui de l'accélération de la convergence.

Les résultats présentés ici sont des améliorations sensibles (généralisations, simplifications) de résultats analogues démontrés dans [10, 12, 13, 14, 15].

(a) **Détermination de la nature périodique ou turbulente d'une suite**

Soit E un ensemble quelconque. On considère une question Q (par exemple « (x_n) est-elle périodique ? ») et une famille $\mathcal{S} \subset E^{\mathbb{N}}$. On considère F l'ensemble des réponses possibles à la question Q (par exemple $F = \{ \text{OUI, NON} \}$). Nous dirons que *la question Q est décidable à la limite sur $\mathcal{S}$* s'il existe une transformation à information finie $T : E^{\mathbb{N}} \to F^{\mathbb{N}}$ définie sur $\mathcal{S}$ (i.e. $\mathcal{S} \subset \operatorname{dom} T$) telle que : pour toute suite $(x_n) \in \mathcal{S}$ la suite des réponses (t_n) fournie par T est exacte à partir d'un certain entier. Autrement, nous dirons que *Q est indécidable à la limite sur $\mathcal{S}$*.

REMARQUES : (1) La notion de décidabilité à la limite (« decidability in the limit ») a été introduite et étudiée par Gold en 1965 ([16, 17]) et a donné lieu depuis à un certain nombre de travaux orientés sur les problèmes d'inférence inductive (« inductive inference ») ([3, 18]).

Notre point de vue et nos méthodes diffèrent assez nettement de ceux de ces recherches :

— d'une part, nous n'avons pas à utiliser de notion de récursivité (voir § 1).

— d'autre part, les suites envisagées comme données peuvent être quelconques ; ce ne sont ni nécessairement des suites d'entiers, ni nécessairement des suites récursives,

— enfin les problèmes que nous abordons proviennent de l'analyse numérique et même avec des méthodes différentes n'ont jamais été abordés (à notre connaissance).

(2) Pour distinguer notre notion de décidabilité à la limite de celle plus restrictive de Gold, nous pourrions l'appeler « décidabilité à la limite par des transformations à information finie ». Nous ne le ferons pas pour des raisons évidentes de facilité d'expression.

Soit E un ensemble quelconque.

Considérons les familles de suites :

$Per_p(E)=\{(x_n)\in E^{\mathbb{N}} \mid p$ est le plus petit entier tel que : $\forall n\in\mathbb{N} : x_{n+p}=x_n\}$

(ensemble des suites périodiques de période p)

$$Per(E) = \bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} Per_p(E)$$

(ensemble des suites périodiques)

$\mathscr{U}\, Per_p(E)=\{(x_n)\in E^{\mathbb{N}} \mid p$ est le plus petit entier tel que : $\exists n_0\in\mathbb{N}, \forall n\geq n_0 : x_{n+p}=x_n$

(ensemble des suites ultérieurement périodiques de période p)

$$\mathscr{U}\, Per(E)= \bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} \mathscr{U}\, Per_p(E)$$

(ensemble des suites ultérieurement périodiques).

Supposons maintenant que E est muni d'une structure d'espace métrique dont la distance est notée d.

Pour $(x_n)\in E^{\mathbb{N}}$ on pose :

$$\mathscr{A}(x_n)=\{\hat{x} \mid \forall\varepsilon>0, \quad \forall n\in\mathbb{N}, \quad \exists m\geq n : \quad d(\hat{x}, x_m)\leqslant\varepsilon\}$$

(ensemble des points d'accumulation de (x_n)).

On considère les familles de suites :

$Turb(E)=\{(x_n)\in E^{\mathbb{N}} \mid \mathscr{A}(x_n) \quad \text{est infini}\}$

(ensemble des suites turbulentes)

$Fini_p(E)=\{(x_n)\in E^{\mathbb{N}} \mid \text{card } \mathscr{A}(x_n)=p\}$

(ensemble des suites ayant p points d'accumulation)

$Fini(E)=\bigcup_{p\in\mathbb{N}} Fini_p(E)$

(ensemble des suites ayant un nombre fini de points d'accumulation).

On a bien sûr :

$$\begin{array}{ccccc} Per_p & \subset & Per & & \\ \cap & & \cap & & \\ \mathscr{U}\, Per_p & \subset & \mathscr{U}\, Per & \subset & Fini \end{array} \qquad E^{\mathbb{N}}=Fini\cup Turb$$

mais, attention, on n'a pas : $Per_p \subset Fini_p$ à cause de suites comme $(a, a, b, a, a, b, \ldots)$.

THÉORÈME : *Soit Q la question « (x_n) est-elle périodique ? »*

(i) *Q est décidable à la limite sur :*

$$\bigcup_{p=1}^{l} \mathscr{U}\, Per_p(E)\cup Turb(E)$$

(ii) *Q est décidable à la limite sur :*

$$\mathscr{U}\, Per(E).$$

(j) *Si E est infini, Q est indécidable à la limite sur*

$$Per(E)\cup Turb(E) \qquad (\textit{donc aussi sur } \mathscr{U}\, Per(E)\cup Turb(E))$$

(jj) *Soit $p\in\mathbb{N}^*$ $p>2$. Si* card $E\geq p$, *Q est indécidable à la limite sur :*

$$Fini_p(E).$$

Démonstration de (i) *:*

La transformation définie par :

$$T^{(m)}(x_n)=\text{OUI} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{la suite finie } (x_0, x_1, \ldots, x_m) \text{ est périodique de période } p, \\ p\leq l \end{cases}$$

est une transformation à information finie qui permet de décider à la limite la question Q pour toute suite :

$$(x_n)\in \bigcup_{p=1}^{l} \mathscr{U}\, Per_p(E)\cup Turb(E).$$

En effet : si $(x_n) \in Turb(E)$ alors à partir d'un certain rang $(x_0, \ldots, x_m)$ ne sera plus périodique de période $p \leq l$ et si $(x_n) \in \bigcup_{p=1}^{l} \mathcal{U} Per_p(E)$ alors, pour $m \geq l$ et $m \geq n_0 + l$ (n_0 : début de la répétition périodique), la suite finie $(x_0, \ldots, x_m)$ est périodique de période $p \leq l$ si et seulement si (x_n) l'est.

Démonstration de (ii) :

$$T^{(m)}(x_n) = \text{OUI} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{la suite finie } (x_0, x_1, \ldots, x_m) \text{ est périodique de période } p; \\ p \leq m/2. \end{cases}$$

Démonstration de (j) :

Supposons qu'il existe $T \in If(E)$ décidant à la limite la question Q sur $Per(E) \cup Turb(E)$.

Considérons $(a_n) \in Turb(E)$ (puisque E est infini, une telle suite existe toujours).

. Soit $(x_n^0) = (a_0, a_0, \ldots, a_0, \ldots) \in Per(E)$.

Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $T^{(n_0)}(x_n^0) = \text{OUI}$.

Puisque T est à information finie, il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall (x_n) \in E^{\mathbb{N}} : (x_0, x_1, \ldots, x_{m_0}) = (x_0^0, x_1^0, \ldots, x_{m_0}^0) \Rightarrow T^{(n_0)}(x_n) = T^{(n_0)}(x_n^0)$$

. Soit alors $(x_n^1) \in Turb(E)$ définie par :

$$\forall n \leq m_0 : x_n^1 = x_n^0$$
$$(x_{m_0+1}^1, \ldots, x_{m_0+p}^1, \ldots) = (a_0, a_1, \ldots, a_p, \ldots).$$

Il existe $n_1 > n_0$ tel que : $T^{(n_1)}(x_n^1) = \text{NON}$.

Puisque T est à information finie, il existe $m_1 > 2m_0$ tel que :

$$\forall (x_n) \in E^{\mathbb{N}} : (x_0, x_1, \ldots, x_{m_1}) = (x_0^1, x_1^1, \ldots, x_{m_1}^1) \Rightarrow T^{(n_1)}(x_n) = T^{(n_1)}(x_n^1)$$

. Soit alors $(x_n^2) \in Per(E)$ définie par :

$$\forall n \leq m_1 : \quad x_n^2 = x_n^1$$
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad : x_{n+m_1+1}^2 = x_n^2$$

Il existe $n_2 > n_1$ tel que : $T^{(n_2)}(x_n^2) = \text{OUI}$.

Puisque T est à information finie, il existe $m_2 > 2m_1$ tel que :

$$\forall (x_n) \in E^{\mathbb{N}} : (x_0, x_1, \ldots, x_{m_2}) = (x_0^2, x_1^2, \ldots, x_{m_2}^2) \Rightarrow T^{(n_2)}(x_n) = T^{(n_2)}(x_n^2).$$

etc...

On définit ainsi des suites (x_n^i), des indices n_i, m_i tels que :

$$(\mathrm{A}_i) \qquad n_{i+1} > n_i, \qquad m_{i+1} > 2m_i$$

$$(\mathrm{B}_i) \qquad T^{(n_i)}(x_n^i) = \begin{cases} \text{OUI} & \text{si} \quad i \text{ est pair} \\ \text{NON} & \text{si} \quad i \text{ est impair} \end{cases}$$

$$(\mathrm{C}_i) \qquad (x_0^{i+1}, \ldots, x_{m_i}^{i+1}) = (x_0^i, \ldots, x_{m_i}^i)$$

$$(\mathrm{D}_i) \quad \forall (x_n) \in E^{\mathbb{N}} \quad (x_0, x_1, \ldots, x_{m_i}) = (x_0^i, x_1^i, \ldots, x_{m_i}^i) \Rightarrow T^{(n_i)}(x_n) = T^{(n_i)}(x_n^i).$$

On considère alors la suite (x_n) définie par :

$$(x_n) = (x_0^0, x_1^0, \ldots, x_{m_0}^0, x_{m_0+1}^1, \ldots, x_{m_1}^1, x_{m_1+1}^2, \ldots, x_{m_2}^2, x_{m_2+1}^3, \ldots)$$

Grâce à (A_i) on montre que $(x_n) \in Turb(E)$ alors que, d'après (B_i) (C_i) (D_i) :

$$T^{(n_i)}(x_n) = \begin{cases} \text{OUI} & \text{si} \quad i \text{ est pair} \\ \text{NON} & \text{si} \quad i \text{ est impair}. \end{cases}$$

T n'est donc pas, contrairement aux hypothèses, exact à partir d'un certain rang pour (x_n). Ce qui signifie en particulier que Q n'est pas décidable à la limite sur $Per(E) \cup Turb(E)$.

Démonstration de (jj) :

Établissons le résultat pour $p=2$. Soient a, $b \in E$ $a \neq b$.

On raisonne de façon analogue au cas (j) en considérant :

$$\begin{aligned}
&(x_n^0) = (a, b, a, b, \ldots, a, b, \ldots) \in Per_2(E) \\
&(x_n^1) = (x_0^0, \ldots, x_{m_0}^0, a, b, a, a, b, a, a, a, b, \ldots) \in Fini_2(E) - Per(E) \\
&(x_n^2) = (x_0^1, \ldots, x_{m1}^1, x_0^1, \ldots, x_{m_1}^1, \ldots) \in Per(E) \\
&(x_n^3) = (x_0^2, \ldots, x_{m_2}^2, a, b, a, a, b, a, a, a, b, \ldots) \in Fini_2(E)) - Per(E) \\
&\ldots
\end{aligned}$$

Remarques : (1) La conjonction de (i) et de (j) fournit une idée très précise de ce qui se passe pour la question considérée : chercher à savoir si une suite est périodique sachant qu'on a affaire à une suite qui est ou bien turbulente ou bien ultérieurement périodique de période bornée est possible, alors que, par contre, le même problème sans l'hypothèse « bornée » est impossible.

Des conclusions assez analogues peuvent être faites au vu des résultats concernant les questions : Q' = « (x_n) est-elle ultérieurement périodique? » et Q'' = « (x_n) est-elle asymptotiquement périodique ? » (voir [13]).

(2) Lorsque E est fini (j) ne reste plus vrai. En effet $Turb(E) = \emptyset$ et donc d'après (ii) Q est décidable à la limite sur l'ensemble considéré.

Le cas $p=1$ dans (jj) est plus délicat. On montre que si E est compact, alors

Q est décidable à la limite sur $Fini_1(E)$ (la raison en est que $Fini_1(E)=Conv(E)$ dans ce cas).

Si E n'est pas compact, alors Q est indécidable à la limite sur $Fini_1(E)$ (on procède comme dans la démonstration de (j) en prenant pour (a_i) une suite non convergente ayant un seul point d'accumulation).

(b) Extraction de sous-suites convergentes

Soit $E=F$ un espace métrique.

Nous appellerons transformation de suites (resp. à information finie) *pour l'extraction* définie sur $E^{\mathbb{N}}$, toute transformation de suites T (resp. à information finie) de $E^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $E^{\mathbb{N}}$ telle que : pour toute suite $(x_n)\in \operatorname{dom} T$, $T(x_n)$ est une sous-suite de (x_n). (On dit que (t_n) est une sous-suite de (x_n) s'il existe une fonction (totale) $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que

$$\forall n\in\mathbb{N} : t_n=x_{\alpha(n)}).$$

On dit que la transformation de suites pour l'extraction T *est efficace* sur $\mathcal{S}\in E^{\mathbb{N}}$ si :

$$\forall (x_n)\in\mathcal{S},\qquad T(x_n)\qquad \text{est une sous-suite convergente de } (x_n).$$

Cette définition n'a d'intérêt, bien sûr, que si $\mathcal{S}$ contient des suites non convergentes.

Divers algorithmes d'extraction de sous-suites ont été proposés ces dernières années [10, 13], des résultats sur leur domaine d'efficacité ont été donnés ainsi que des résultats de limitation.

Nous proposons ici deux résultats de limitation. Le premier est d'application très générale (on suppose seulement que E possède au moins p points), le second concernant les espaces ayant des points d'accumulation est le plus fin de tous les résultats de limitation en extraction. C'est un résultat nouveau qui permet de retrouver (lorsqu'il s'applique) tous les résultats connus jusqu'à présent.

THÉORÈME 2 : *Soit $p\in\mathbb{N}$, $p\geq 2$. Soit E un espace métrique ayant au moins p points.*

Il n'existe aucune transformation à information finie pour l'extraction qui soit efficace sur :

$$Fini_1(E)\cup Fini_p(E)$$

(*et donc a fortiori sur $Fini(E)$ ou $E^{\mathbb{N}}$*).

THÉORÈME 3 : *Soit* $p\in\mathbb{N}$, $p\geq 2$. *Soit E un espace métrique ayant au moins p points d'accumulation.*

Il n'existe aucune transformation à information finie pour l'extraction qui soit efficace sur :

$$Fini_p(E).$$

REMARQUES : (1) Lorsque E n'a pas de point d'accumulation, en général, on peut construire un algorithme d'extraction efficace sur $Fini_p(E)$. Par exemple, lorsque E est fini, $E=\{e_1, e_2, \ldots, e_r\}$ on définit : $t_n=e_j$ où j est le plus petit entier de l'ensemble $\{\, l \mid$ la fréquence de e_l dans la suite finie $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ est l'une des p plus grandes $\}$.

(2) Les résultats des théorèmes 2 et 3 sont véritablement très fins, et même étonnants. Par exemple, le théorème 3 signifie en particulier que, même sachant qu'une suite de points possède deux points d'accumulation, il n'existe aucune procédure algorithmique permettant d'extraire une sous-suite de (x_n) convergeant vers l'un des points d'accumulation.

(3) On peut se demander ce que deviendraient les théorèmes 2 et 3 si on souhaitait seulement que $T(x_n)$ converge vers l'un des points d'accumulation de (x_n) sans nécessairement être une sous-suite de (x_n).

On s'aperçoit, en modifiant les démonstrations, que les théorèmes 2 et 3 persistent.

Démonstration du théorème 3 : Pour plus de clarté, nous supposerons que $p=2$.

Soient a, b, $a\neq b$ deux points d'accumulation de E. Il existe deux suites

$$(a_n)\in E^{\mathbb{N}}, \qquad (b_n)\in E^{\mathbb{N}} \qquad \text{avec} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n=a, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n=b$$

composées chacune de points différents :

$$\forall n\in\mathbb{N} \qquad a_n\neq b_n \qquad \text{et} \qquad \{a_n, b_n\}\cap\{a_0, b_0, \ldots, a_{n-1}, b_{n-1}\}=\varnothing$$

Raisonnons par l'absurde en considérant T une transformation de suites à information finie, pour l'extraction qui soit efficace sur $Fini_2(E)$.

. Soit $\qquad (x_n^0)=(a_0, a_1, a_0, a_1, \ldots, a_0, a_1, \ldots)\in Fini_2\,(E)$

Pour $n_0=0$ on a : $T^{(no)}(x_n^0)\in\{a_0, a_1\}$.

Puisque T est à information finie, il existe $m_0\in\mathbb{N}$ tel que :

$$\forall (x_n)\in E^{\mathbb{N}} : (x_0, x_1, \ldots, x_{mo})=(x_0^0, x_1^0, \ldots, x_{mo}^0) \Rightarrow T^{(no)}(x_n^0)=T^{(no)}(x_n).$$

. Soit $(x_n^1) \in Fini_2(E)$ définie par :

$$\forall n \leq m_0 : x_n^1 = x_n^0$$
$$(x_{m_0+1}^1, x_{m_0+2}^1, \ldots) = (b_0, b_1, b_0, b_1, \ldots, b_0, b_1, \ldots)$$

Il existe $n_1 > n_0$ tel que : $T^{(n_1)}(x_n^1) \in \{ b_0, b_1 \}$.

Puisque T est à information finie, il existe $m_1 > 2m_0$ tel que :

$$\forall (x_n) \in E^{\mathbb{N}} : (x_0, x_1, \ldots, x_{m_1}) = (x_0^1, x_1^1, \ldots, x_{m_1}^1) \Rightarrow T^{(n_1)}(x_n^1) = T^{(n_1)}(x_n).$$

. Soit $(x_n^2) \in Fini_2(E)$ définie par :

$$\forall n \leq m_1 : x_n^2 = x_n^1$$
$$(x_{m_1+1}^2, x_{m_1+2}^2, \ldots) = (a_2, a_3, a_2, a_3, \ldots, a_2, a_3, \ldots)$$

Il existe $n_2 > n_1$ tel que : $T^{(n_2)}(x_n^2) \in \{a_2, a_3\}$.

Puisque T est à information finie, il existe $m_2 > 2m_1$ tel que

$$\forall (x_n) \in E^{\mathbb{N}} : (x_0, x_1, \ldots, x_{m_2}) = (x_0^2, x_1^2, \ldots, x_{m_2}^2) \Rightarrow T^{(n_2)}(x_n^2) = T^{(n_2)}(x_n)$$

etc...

On définit ainsi des suites (x_n^i), des indices n_i, m_i tels que :

(A_i) $\quad n_{i+1} > n_i, \quad m_{i+1} > 2m_i$

(B_i) $\quad T^{(2i)}(x_n^{2i}) \in \{ a_{2i}, a_{2i+1} \}$

$\quad T^{(2i+1)}(x_n^{2i+1}) \in \{ b_{2i}, b_{2i+1} \}$

(C_i) $\quad (x_0^{i+1}, \ldots, x_{m_i}^{i+1}) = (x_0^i, \ldots, x_{m_i}^i)$

(D_i) $\quad \forall (x_n) \in E^{\mathbb{N}} \quad (x_0, x_1, \ldots, x_{m_i}) = (x_0^i, x_1^i, \ldots, x_{m_i}^i) \Rightarrow T^{(n_i)}(x_n) = T^{(n_i)}(x_n^i)$

On considère alors la suite (x_n) définie par :

$$(x_n) = (x_0^0, x_1^0, \ldots, x_{m_0}^0, x_{m_0+1}^1, \ldots, x_{m_1}^1, x_{m_1+1}^2, \ldots, x_{m_2}^2, x_{m_2+1}^2, \ldots)$$

Grâce à (A_i) on voit que (x_n) possède deux points d'accumulation qui sont a et b. Grâce à (B_i) (C_i) (D_i) on voit que $(T^{(j)}(x_n))$ possède aussi a et b comme points d'accumulation et que donc : $(T^{(j)}(x_n))$ n'est pas convergente contrairement aux hypothèses faites.

Remarque : En prenant $a_0 = a_1 = \ldots = a$, $b_0 = b_1 = \ldots = b$ dans cette démonstration, on obtient celle du théorème 2.

(c) Accélération de la convergence

. Soit $E = F$ un espace métrique.

. Nous noterons $Conv(E)$ l'ensemble des suites convergentes de points de E.

Si $(x_n) \in Conv(E)$ (resp. $(y_n) \in Conv(E)$; $(z_n) \in Conv(E), \ldots$) nous conviendrons toujours que

$$x = \lim_{n \to \infty} x_n \qquad (\text{resp. } y = \lim_{n \to \infty} y_n, \quad z = \lim_{n \to \infty} z_n, \ldots)$$

$$. \ Conv^*(E) = \{ (x_n) \in Conv(E) \mid \forall n \in \mathbb{N} : x_n \neq x \}$$

. Nous dirons que *la suite* $(t_n) \in Conv(E)$ *accélère la convergence de la suite* $(x_n) \in Conv(E)$ si par définition :

$$\begin{cases} t = x & \text{et} \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \exists m_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall m \geq m_0 : & d(t_m, t) \leq \varepsilon d(x_m, x) \end{cases}$$

Lorsque $(x_n) \in Conv^*(E)$ cela équivaut à :

$$t = x \qquad \text{et} \qquad \lim_{m \to \infty} d(t_m, t)/d(x_m, x) = 0$$

Soit $\mathcal{S} \subset Conv(E)$, nous dirons que $\mathcal{S}$ *est accélérable* s'il existe une transformation $T \in If(E, E)$ telle que, pour toute suite $(x_m) \in \mathcal{S}$ la suite $(t_n) = T(x_m)$ accélère la convergence de la suite (x_m).

Par exemple, la transformation définie par :

$$t_0 = x_0, \qquad \forall n > 0 : t_n = (x_n + x_{n-1})/2$$

accélère la convergence de toutes les suites $(x_n) \in Conv^*(\mathbb{R})$ telles que :

$$\lim_{n \to \infty} (x_{n+1} - x)/(x_n - x) = -1$$

Bien d'autres résultats positifs de ce type sont connus (voir [5, 6, 11, 23]).

Remarque : En général, on dit que $\mathcal{S} \subset Conv(E)$ est accélérable s'il existe une transformation $T : (x_n) \to (t_n)$ accélérant la convergence de chaque suite $(x_n) \in \mathcal{S}$ et telle que le calcul de t_n ne fasse intervenir que $x_0, x_1, \ldots, x_n$ (autrement dit si le quasi-algorithme associé à T est partout défini). La définition que nous avons donnée est donc plus tolérante que celle donnée habituellement, mais, comme nous n'allons énoncer et démontrer que des résultats négatifs (du type $\mathcal{S}$ n'est pas accélérable), ils seront encore vrais avec la définition habituelle.

Par rapport aux résultats analogues déjà établis [13, 14] le théorème 4 que nous énonçons et démontrons maintenant est donc plus général. La même adaptation (aux transformations à information finie) d'autres résultats de [12, 13, 15] n'est cependant pas toujours possible.

On notera E' l'ensemble des points d'accumulation de E.

$$E' = \{ x \in E \mid \forall \varepsilon > 0, \quad \exists y \in E : 0 < d(x, y) < \varepsilon \}$$
$$E'' = (E')'$$

THÉORÈME 4 : (i) *Si* $E' \neq \varnothing$ *alors* $Conv(E)$ *n'est pas accélérable,* (ii) *Si* $E'' \neq \varnothing$ *alors* $Conv^*(E)$ *n'est pas accélérable.*

Démonstration : Nous ne démontrons que (ii) qui est le plus intéressant et le plus difficile des deux énoncés.

Soit $a \in E''$. Il existe $(a^n) \in Conv^*(E')$ tel que $\lim_{n \to \infty} a^n = a$.

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $(a_n^m)_n \in Conv^*(E)$ tel que $\lim_{n \to \infty} a_n^m = a^m$.

On peut supposer que tous les points a_n^m, a^m et le point a sont deux à deux distincts.

Supposons qu'il existe $T \in If(E)$ accélérant la convergence de $Conv^*(E)$.

Soit $(x_n^0) = (a_n^0) \in Conv^*(E)$. Posons :

$$\varepsilon_0 = d(x^0, a) > 0$$

Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\begin{aligned} & d(x_{n_0}^0, x^0) \leq \varepsilon_0/2, \\ & d(t_{n_0}^0, x^0) \leq \varepsilon_0/2, \\ \forall n \geq n_0 \qquad & d(x_n^0, x^0) \leq 1/2^0, \end{aligned}$$

car, par hypothèse, la suite (t_n^0) (suite obtenue par T pour (x_n^0)) accélère (x_n^0).

Des deux premières inégalités, on déduit :

$$d(t_{n_0}^0, a)/d(x_{n_0}^0, a) \geq (\varepsilon_0/2)/(3\varepsilon_0/2) = 1/3$$

Puisque T est à information finie, il existe $m_0 \geq n_0$ tel que :

$$\forall (x_n) \in E^{\mathbb{N}} : \quad (x_0, x_1, \ldots, x_{m_0}) = (x_0^0, x_1^0, \ldots, x_{m_0}^0) \Rightarrow d(t_{n_0}, a)/d(x_{n_0}, a) \geq 1/3$$

((t_n) désignant la suite obtenue par T pour (x_n)).

Soit $(x_n^1) \in Conv^*(E)$ définie par :

$$\begin{aligned} & \forall n \leq m_0 : x_n^1 = x_n^0, \\ & \forall n \in \mathbb{N}^* : x_{m_0+n}^1 = a_{m_0+n}^1. \end{aligned}$$

Posons :

$$\varepsilon_1 = d(x^1, a) > 0.$$

Il existe $n_1 > n_0$ tel que :

$$\begin{aligned} & d(x_n^1, x^1) \leq \varepsilon_1/2, \\ & d(t_{n_1}^1, x^1) \leq \varepsilon_1/2, \\ \forall n \geq n_1 \qquad & d(x_n^1, x^1) \leq 1/2. \end{aligned}$$

Comme précédemment, on en déduit l'existence de $m_1 \geq n_1$ tel que :

$$\forall (x_n) \in E^{\mathbb{N}} : (x_0, x_1, \ldots, x_{m_1}) = (x_0^1, x_1^1, \ldots, x_{m_1}^1) \Rightarrow d(t_{n_1}, a)/d(x_{n_1}, a) \geq 1/3$$

etc...

On définit ainsi des suites (x_n^i), des indices n_i, m_i tels que :

$$(\mathrm{A}_i) \qquad n_{i+1} > n_i, \qquad m_i \geq n_i$$

$$(\mathrm{B}_i) \qquad \forall n \geq n_i \ : \ d(x_n^i, x^i) \leq 1/2^i$$

$$(\mathrm{C}_i) \quad \forall (x_n) \in E^{\mathbb{N}} : (x_0, x_1, \ldots, x_{m_i}) = (x_0^i, x_1^i, \ldots, x_{m_i}^i) \Rightarrow d(t_{n_i}, a)/d(x_{n_i}, a) \geq 1/3.$$

On considère alors la suite (x_n) définie par :

$$(x_n) = (x_0^0, x_1^0, \ldots, x_{m_0}^0, x_{m_0+1}^1, \ldots, x_{m_1}^1, x_{m_1+1}^2, \ldots, x_{m_2}^2, x_{m_2+1}^2, \ldots)$$

Grâce à (A_i) et (B_i) on a :

$$(x_n) \in Conv^*(E) \, ; \qquad \lim_{n \to \infty} x_n = a \, .$$

Grâce à (C_i) on a :

$$\forall i \in \mathbb{N} \qquad d(t_{n_i}, a)/d(x_n, a) \geq 1/3$$

ce qui interdit à la suite (x_n) d'être accélérée par (t_n).

BIBLIOGRAPHIE

1. O. Aberth, *Analysis in the computable number field*, J.A.C.M., vol. 15, n° 2, April 1968, p. 275-299.
2. A. Arnold et M. Nivat, *Metric interpretations of infinite trees and semantic of non deterministic recursive programs*, Theoretical Computer Science, vol. 11, 1980, p. 181-205.
3. L. Blum et M. Blum, *Toward a mathematical theory of inductive inference information and control*, vol. 28, 1975, p. 125-155.
4. L. Boasson et M. Nivat, *Adhérences of languages*, Journal of Computer and System Science, vol. 20, 1980, p. 285-309.
5. C. Brezinski, *Accélération de la convergence en analvse numérique*, Lecture notes in Mathematics, vol. 584, Springer Verlag, Heidelberg, 1977.
6. C. Brezinski, *Algorithmes d'accélération de la convergence*. Étude numérique Technip, Paris, 1978.
7. G. Comyn, *Objets infinis calculables*, Thèse d'État, Lille, 1982.
8. G. Comyn et M. Dauchet, *Metric approximations in ordered domains*, Équipe Lilloise d'Informatique Théorique, I.T., n° 59, octobre 1983. Université de Lille-I.
9. G. Comyn et M. Dauchet, *Approximation of infinitary objects*, Ninth Colloquium ICALP, Lecture Notes in Computer Science. Springer Verlag, vol. 140, 1982, p. 116-127.
10. J.-P. Delahaye, *Algorithmes pour suites non convergentes*, Numer. math., vol. 34, 1980, p. 333-347.
11. J.-P. Delahaye, *Automatic selection of sequences transformations*, Mathematics of computation, vol. 37, 1981, p. 197-204.
12. J.-P. Delahaye, *Optimalité du procédé Δ^2 d'Aitken pour l'accélération de la convergence linéaire*, R.A.I.R.O., Analyse numérique, vol. 15, 1981, p. 321-330.

13. J.-P. DELAHAYE, *Théorie des transformations de suites en analyse numérique*, Applications thèse d'État, Lille, 1982.
14. J.-P. DELAHAYE et B. GERMAIN-BONNE, *Résultats négatifs en accélération de la convergence* Numér. Math., vol. 35, 1980, p. 443-457.
15. J.-P. DELAHAYE et B. GERMAIN-BONNE, *The set of lagarithmically convergent sequences cannot be accelerated*, S.I.A.M. J. Num. Anal., vol. 1982, p. 840-844.
16. E. M. GOLD, *Limiting recursion*, The Journal of symbolic logic, vol. 30, 1965, p. 28-48.
17. E. M. GOLD, *Language identification in the limit*, Information and control, vol. 10, 1967, p. 447-474.
18. E. MINICOZZI, *Some natural properties of strong identification in inductive inference*, Theoretical Computer Science, vol. 2, 1976, p. 345-360.
19. M. NIVAT, *Infinite words, infinite trees, infinite computations*, Foundations of Computer Science III. Part. 2 Languages, logic, semantics, J. W. De Bakker (Ed.), J. Van Leeuwen (Ed.), Mathematical Centre Tract, 1979, p. 1-52.
20. H. ROGERS, *Recursive functions and effective computability*, McGraw Hill, New York, 1967.
21. L. SCHWARTZ, *Analyse. Topologie générale et analyse fonctionnelle*, Hermann, Paris, 1970.
22. E. WIEDMER, *Computing with infinite objects*, Theoretical Computer Science, vol. 10, 1980, p. 133-155.
23. J. WIMP, *Sequence transformations and their applications*, Academic press, New York, 1981.