DIDIER ARQUES

Dénombrements de chemins dans $\mathbb{R}^2$ soumis à contraintes

Informatique théorique et applications, tome 20, nº 4 (1986), p. 473-482

<http://www.numdam.org/item?id=ITA_1986__20_4_473_0>

Informatique théorique et Applications/Theoretical Informatics and Applications
(vol. 20, n° 4, 1986, p. 473 à 482)

DÉNOMBREMENTS DE CHEMINS DANS $\mathbb{R}^2$ SOUMIS A CONTRAINTES (*)

par Didier ARQUES (1)

Communiqué par R. CORI

Résumé. – *On propose une méthode très simple, fondée sur le principe de réflection d'André, pour dénombrer des familles de chemins dans le plan. On retrouve ainsi le dénombrement des chemins sous-diagonaux, récemment obtenu par D. Gouyou-Beauchamps; on obtient également des formules sommatoires pour le problème des « deux piles ».*

Abstract. – *We give a simple method, based on Andre's reflection principle, for counting planar paths. As an application, we give an elementary proof of the recent enumeration (by D. Gouyou-Beauchamps) of paths which belong to the region of the plane bounded by the positive x-axis and the first diagonal (ie the first octant). More over, we give sums formulaes associated to the well known two stacks problem.*

INTRODUCTION

Des travaux récents (*cf.* [1], [4]) et plus anciens (*cf.* [6]) ont posé le problème du dénombrement de familles de chemins du plan soumis à différents types de contraintes. Ces problèmes de dénombrement apparaissent liés à des problèmes de mélange de mots, de dénombrements de tableaux de Young (*cf.* [5]), ou des problèmes informatiques comme celui de la concurrence d'accès à une base de données (*cf.* [3]), ou de l'accès de plusieurs processus à des ressources partagées (*cf.* [2]).

Nous proposons ici une méthode très simple, fondée sur le principe de symétrie (« d'André »), pour dénombrer des familles de chemins soumis à contraintes. On retrouve, par exemple, les résultats établis récemment par D. Gouyou-Beauchamps donnant le nombre de chemins du plan sous diagonaux (*cf.* [4]).

(*) Reçu mars 1985.
(1) Institut des Sciences Exactes et Appliquées, 4, rue des Frères-Lumière, 68093 Mulhouse Cedex, France.

Au paragraphe I sont étudiés les chemins dans $\mathbb{R}^2$. Au paragraphe II, une généralisation à $\mathbb{R}^m$ est proposée. Ces résultats sont les préliminaires d'autres plus détaillés, à paraître.

I. CHEMINS DANS LE PLAN

1. Chemins du plan sans contraintes

Soit dans $\mathbb{R}^2$, $e_1=(1, 0)$ et $e_2=(0, 1)$. On note $O=(0, 0)$, l'origine de $\mathbb{R}^2$. On note $x_1(M)$ et $x_2(M)$, les coordonnées du point M. On confond dans la suite, pour tout point M de $\mathbb{R}^2$, les notations M et $(x_1(M), x_2(M))$.

Un chemin de longueur n du plan est une suite $A_0, A_1, \ldots, A_n$, de $n+1$ points du plan, à coordonnées dans $\mathbb{Z}$, telle que pour tout i dans $0, 1, \ldots, n-1$, A_{i+1} se déduise du point A_i par la translation associée à l'un des quatre vecteurs $e_1, -e_1, e_2, -e_2$.

On dit qu'un tel chemin joint le point A_0 au point A_n, est issu du point A_0.

On note $P_{n, M, N}$ le nombre de chemins de longueur n joignant M à N dans le plan.

Proposition 1 : (*a*) *Le nombre de chemins du plan de longueur n joignant l'origine $O=(0, 0)$ au point $M=(p, q)$ est*

$$P_{n, O, M}=\binom{n}{\frac{n-p-q}{2}}\cdot\binom{n}{\frac{n+p-q}{2}}$$

Cette quantité étant nulle lorsque les conditions habituelles de définition des coefficients binomiaux ne sont pas vérifiées.

(*b*) *La série génératrice $\mathscr{P}(y_1, y_2, z)$ des chemins issus de l'origine et décomptés en fonction de leur longueur (variable z), de l'abscisse (resp. ordonnée) du point d'arrivée (variable y_1, resp. y_2) est*

$$\mathscr{P}(y_1, y_2, z)=\sum_{n\geq 0}\sum_{\substack{p\in\mathbb{Z}\\ q\in\mathbb{Z}}} P_{n, O, (p, q)}\, y_1^p y_2^q z^n=\frac{1}{1-z((1+y_1 y_2)/y_1 y_2)(y_1+y_2)}.$$

Remarque : Si $A=(a, b)$ et $M=(p, q)$, on a (évident)

$$P_{n, A, M}=P_{n, O, (p-a, q-b)}.$$

Démonstration : (*b*) Par définition d'un chemin, si $n\geqq 1$

$$P_{n,O,(p,q)}=P_{n-1,O,(p-1,q)}+P_{n-1,O,(p,q-1)}+P_{n-1,O,(p+1,q)}+P_{n-1,O,(p,q+1)}.$$

On en déduit

$$\mathscr{P}(y_1, y_2, z)=1+z\,(y_1^{-1}\mathscr{P}+y_1\mathscr{P}y_2^{-1}\mathscr{P}y_2\mathscr{P})$$

d'où le résultat.

(*a*) La valeur de $P_{n,O,(p,q)}$ est le coefficient de $y_1^p y_2^q$ dans

$$\frac{(1+y_1 y_2)^n}{y_1^n y_2^n}(y_1+y_2)^n=\sum_{i,j=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{j}y_1^{i-j}y_2^{n-i-j}.$$

Ce coefficient est dans la somme précédente, le terme associé à i et j tels que

$$i-j=p \qquad \text{et} \qquad n-i-j=q.$$

C.Q.F.D.

2. Chemins du plan soumis à contraintes

– On note C_r le r-ième nombre de Catalan.

– On note $D_{n,M,N}$, $Q_{n,M,N}$, $H_{n,M,N}$ les chemins du plan de longueur n, joignant M à N et respectivement inclus dans le demi-plan $\{(x_1, x_2)/x_1 \geqq 0\}$, le quart de plan $\{(x_1, x_2)/x_1 \geqq 0, x_2 \geqq 0\}$, et le huitième de plan $\{(x_1, x_2)/x_1 \geqq 0, x_2 \geqq 0, x_1 \geqq x_2+1\}$.

– Si $M=(p, q)$ est un point du plan, on note

$$M^1=(-p-2, q), \qquad M^2=(-p-2, -q-2), \qquad M^3=(p, -q-2).$$

On a alors la proposition :

Proposition 2 : (*a*) $D_{n,A,M}=P_{n,A,M}-P_{n,A,M^1}$ *et* $D_{2r,0,0}=\binom{2r+1}{r}C_r$

(*b*) $Q_{n,A,M}=P_{n,A,M}-P_{n,A,M^1}+P_{n,A,M^2}-P_{n,A,M^3}$ *et* $Q_{2r,0,0}=C_r C_{r+1}$.

(*c*) *Soit, pour* $i \geqq 1$, M_i *le point* $(i, 0)$. *Alors,*

$$\sum_{i \geqq 1} H_{2r,M_1,M_i}=P_{2r,M_1,M_1}+P_{2r,M_1,(-2,1)}-P_{2r,M_1,(0,1)}-P_{2r,M_1,(3,-2)}$$
$$=C_r C_{r+1}.$$

$$\sum_{i \geqq 1} H_{2r+1,M_1,M_i}=P_{2r+1,M_1,(2,0)}+P_{2r+1,M_1,(4,0)}$$
$$-P_{2r+1,M_1,(2,-2)}-P_{2r+1,M_1,(0,2)}=C_{r+1}C_{r+1}.$$

Remarque : Les résultats du (*b*), resp. (*c*), sont ceux établis dans [6], resp. [4].

Démonstration : (*a*) Soient A et M des points du demi-plan $\{(x_1, x_2)/x_1 \geqq 0\}$.

Soit $A=A_0, \ldots, A_n=M$, un chemin joignant A à M dans le plan tel qu'il existe i avec $x_1(A_i) \leqq -1$.

Soit i_0 le premier indice tel que $x_1(A_{i_0})=-1$. On note $A_{i_0}, B_{i_0+1}, \ldots, B_n=M^1$, le chemin symétrique du chemin $A_{i_0}, \ldots, A_n=M$ par rapport à la droite $x_1=-1$.

L'application qui au chemin $A_0=A, \ldots, A_n=M$, associe le chemin $A_0, \ldots, A_{i_0}, B_{i_0+1}, \ldots, B_n=M^1$, définit une bijection de l'ensemble des chemins joignant A à M dans le plan en traversant la droite $x_1=-1/2$, sur l'ensemble des chemins joignant A à M^1 dans le plan. D'où l'égalité annoncée.

On déduit alors de la proposition 1, la valeur de $D_{2r, 0, 0}$.

(*b*) Par le même raisonnement qu'au (*a*), en faisant une symétrie par rapport à la droite $x_2=-1$, on obtient, si A et M sont des points du quart de plan considéré,

$$Q_{n, A, M}=D_{n, A, M}-D_{n, A, M^3}.$$

Or par (*a*),

$$D_{n, A, M^3}=P_{n, A, M^3}-P_{n, A, (M^3)^1}=P_{n, A, M^3}-P_{n, A, M^2}.$$

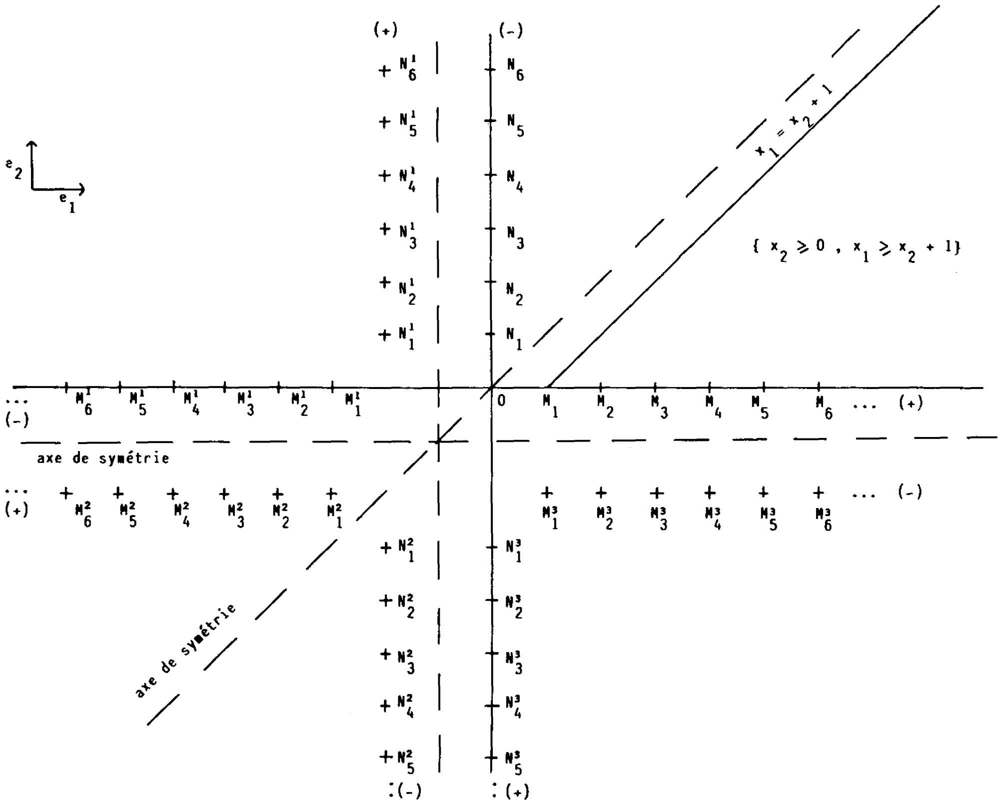
D'où le résultat.

On déduit alors la valeur de $Q_{2r, 0, 0}$ par la proposition 1.

(*c*) En utilisant la symétrie par rapport à la droite $x_1=x_2$, on montre comme au (*a*), que (cf. *fig.* 1)

pour $i \geqq 1$,

$$H_{n, M_1, M_i}=Q_{n, M_1, M_i}-Q_{n, M_1, N_i} \qquad \text{où} \quad N_i=(0, i).$$



1. — Chemins sous-diagonaux.

Donc,

$$\sum_{i \geqq 1} H_{n,\, M_1,\, M_i} = \sum_{i \geqq 1} Q_{n,\, M_1,\, M_i} - \sum_{i \geqq 1} Q_{n,\, M_1,\, N_i}$$

Or par (*b*), on a pour $i \geqq 1$,

$$Q_{n,\, M_1,\, M_i} = P_{n,\, M_1,\, M_i} - P_{n,\, M_1,\, M_i^1} + P_{n,\, M_1,\, M_i^2} - P_{n,\, M_1,\, M_i^3}$$

avec

$$M_i = (i,\ 0), \qquad M_i^1 = (-i-2,\ 0), \qquad M_i^2 = (-i-2,\ -2), \qquad M_i^3 = (i,\ -2).$$

De plus, par symétrie,

$$P_{n,\,M_1,\,M_{i+4}}=P_{n,\,M_1,\,M_i^1} \qquad \text{et} \qquad P_{n,\,M_1,\,M_i^2}=P_{n,\,M_1,\,M_{i+4}^3}.$$

Donc après simplification,

$$\sum_{i\geqq 1} Q_{n,\,M_1,\,M_i}=\sum_{i=1}^{4} P_{n,\,M_1,\,M_i}-\sum_{i=1}^{4} P_{n,\,M_1,\,M_i^3}.$$

On démontre de même que

$$\sum_{i\geqq 1} Q_{n,\,M_1,\,N_i}=P_{n,\,M_1,\,N_1}+P_{n,\,M_1,\,N_2}-P_{n,\,M_1,\,N_1^1}-P_{n,\,M_1,\,N_2^1}.$$

En utilisant les égalités, conséquences de symétries évidentes,

$$P_{n,\,M_1,\,M_3}=P_{n,\,M_1,\,M_1^3} \qquad \text{et} \qquad P_{n,\,M_1,\,N_2^1}=P_{n,\,M_1,\,M_4^3},$$

on en déduit,

$$\sum_{i\geqq 1} H_{n,\,M_1,\,M_i}=\sum_{i=1,\,2,\,4} P_{n,\,M_1,\,M_i}-\sum_{i=2,\,3} P_{n,\,M_1,\,M_i^3}-\sum_{i=1,\,2} P_{n,\,M_1,\,N_i}+P_{n,\,M_1,\,N_1^1}.$$

Pour $n=2r$, certains termes sont nuls et il reste

$$\sum_{i\geqq 1} H_{2r,\,M_1,\,M_i}=P_{2r,\,M_1,\,M_1}-P_{2r,\,M_1,\,M_3^3}-P_{2r,\,M_1,\,N_1}+P_{2r,\,M_1,\,N_1^1}.$$

D'où le résultat annoncé en utilisant la proposition 1.

En faisant $n=2r+1$, on obtient de même

$$\sum_{i\geqq 1} H_{2r+1,\,M_1,\,M_i}=C_{r+1}\,C_{r+1}.$$

Remarque : Les deux sommes calculées au (*c*), décomptent respectivement le nombre de chemins de longueur paire et impaire, joignant dans le huitième de plan (chemins restant sous la diagonale $x_1=x_2+1$ et au-dessus de l'axe $x_2=0$), le point $M_1=(1,\,0)$ à un point quelconque du demi-axe $\{x_2=0,\ x_1\geqq 1\}$.

L'article [4] donne une preuve bijective de ce résultat.

On peut généraliser le résultat du (*c*) de la proposition 2, en cherchant le nombre $H_{n,\,M_1}^{(m)}$ des chemins de longueur *n*, qui dans le huitième de plan

$$\{(x_1,\ x_2)/x_2\geqq 0,\ x_1\geqq x_2+1\}$$

joignent le point $M_1=(1, 0)$, à un point quelconque de la demi-droite

$$\{(x_1, x_2)/x_2=m, x_1 \geqq m+1\}, \quad m \text{ entier de } \mathbb{N} \text{ fixé.}$$

La démonstration précédente du (c) (correspondant au cas $m=0$), se transpose telle quelle dans le cas m quelconque, et l'on obtient,

$$H_{2r, M_1}^{(m)}=(m+1)\frac{(2r+2)!}{(r-m)!\,(r+m+2)!}\,\frac{(2r)!}{(r+1)!\,(r+1)!}$$

et,

$$H_{2r+1, M_1}^{(m)}=(m+1)\frac{(2r+2)!}{(r-m)!\,(r+m+2)!}\,\frac{2.(2r+1)!}{(r+1)!\,(r+2)!}.$$

Pour $m=0$, on retrouve respectivement $C_r C_{r+1}$ et $C_{r+1} C_{r+1}$.

3. Autre exemple d'application

Considérons l'ensemble des chemins de longueur $2r$ joignant l'origine à l'origine, en restant dans le triangle $\{x_1 \geqq 0, x_2 \geqq 0, x_1+x_2 \leqq m\}$, m étant un entier positif donné (cf. *fig.* 2).

On note $T_{2r, 0, 0}^{(m)}$ leur nombre.

Un tel chemin est la traduction du problème de l'accès de deux processus à un même ensemble de m ressources (problème des deux piles).

Le dénombrement de ces chemins a été étudié par P. Flajolet en faisant une première symétrie par rapport à la droite $x_1+x_2=m+1$, puis en utilisant les résultats classiques sur les réduites de fractions continues afin de déterminer la série génératrice du nombre de ces chemins (*cf.* [2]).

On peut déterminer une formule exacte du nombre de ces chemins en se ramenant par des symétries successives, comme dans les exemples de la proposition 2, à décompter des chemins *du plan* (sans contraintes) de longueur $2r$, joignant l'origine aux points du plan déduits de l'origine par ces symétries successives.

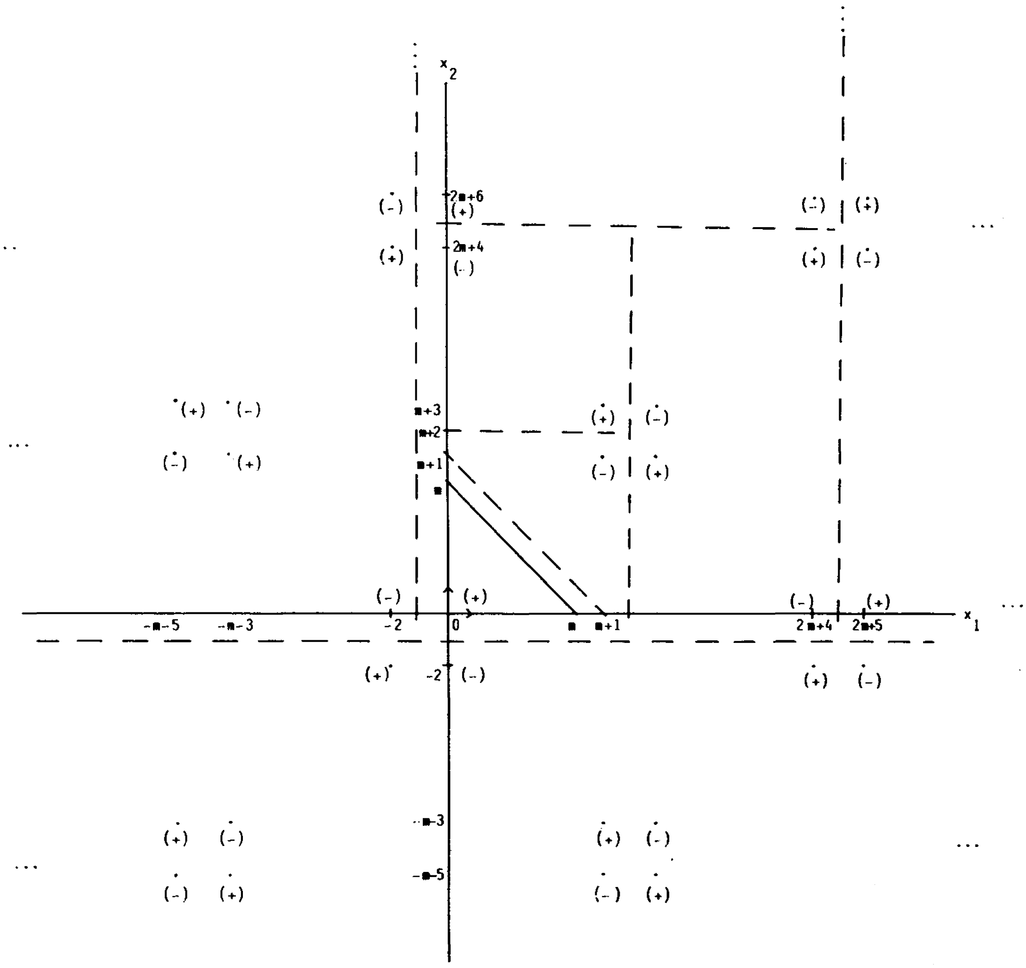
Pour $M=(p, q)$, point de $\mathbb{Z}^2$, on note

$$M_1=(p+2, q), \qquad M_2=(p+2, q+2), \qquad M_3=(p, q+2),$$

et

$$C_{n, O, M}=P_{n, O, M}-P_{n, O, M_1}+P_{n, O, M_2}-P_{n, O, M_3}.$$

L'interprétation de $C_{n, O, M}$ en termes de chemins du plan est évidente (*cf.* proposition 1).



2. — Problème des deux piles.

Alors par la proposition 1, on a

$$C_{n,\,O,\,M}=(p+1)(q+1)$$
$$\times n!\,\frac{(n+2)!}{((n-p-q)/2)!\,([(n+p+q)/2]+2)!\,([(n+p-q)/2]+1)!\,([(n-p+q)/2]+1)!}$$

En transformant le problème initial de dénombrement des chemins du triangle par toutes les symétries possibles [de façon à recouvrir tout le plan à partir du triangle de départ (cf. *fig.*)], on en déduit la formule donnant

$$T^{(m)}_{2r, O, O} = \sum_{p, q \in \mathcal{N}} C_{2r, O, (p, q)} - \sum_{p, q \in \mathcal{M}} C_{2r, O, (p, q)}$$

avec

$$\mathcal{N} = \{ 2(km + 3k - 1), k \in \mathbb{Z} \}$$

et

$$\mathcal{M} = \{ (2k+1)m + 6k + 1, k \in \mathbb{Z} \}.$$

Dans la figure, les axes en pointillés sont les axes successifs que l'on a utilisé pour déterminer les points d'arrivée des chemins dont la somme algébrique (puisque ces chemins sont soit ajoutés, soit retranchés) donne $T^{(m)}_{2r, O, O}$.

Le signe indiqué près de chaque point, est celui dont sont affectés dans le décompte final, les chemins arrivant en ce point.

Les quatre points constituant chaque carré dans la figure ci-dessous sont les points M, M_1, M_2, M_3 permettant de définir les quantités $C_{2r, O, M}$.

II. CHEMINS DANS $\mathbb{R}^m$

Soit dans $\mathbb{R}^m$, e_i le vecteur $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ où 1 est placé en i-ème position, $1 \leqq i \leqq m$.

On note $x_i(M)$, $1 \leqq i \leqq m$, les coordonnées d'un point M.

Un chemin de longueur n dans $\mathbb{R}^m$ est une suite $A_0, \ldots, A_n$ de $(n+1)$ points de $\mathbb{R}^m$ à coordonnées dans Z, telle que pour j dans $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, A_{j+1} se déduise de A_j par l'addition de l'un des vecteurs de base e_i où $-e_i$, $1 \leqq i \leqq m$.

On dit qu'un tel chemin joint A_0 à A_n.

On note $R_{n, M, N}$ le nombre de chemins dans $\mathbb{R}^m$ de longueur n joignant M à N.

PROPOSITION 3 : *Soit $\mathcal{R}((y_i)_{1 \leqq i \leqq m}, z)$ la série génératrice du nombre de chemins dans $\mathbb{R}^m$ issus de l'origine, décomptés en fonction de leur longueur (variable z) et des coordonnées $(p_1, \ldots, p_m)$ de leur extrémité finale (variables $y_1, \ldots, y_m$).*

$$\mathcal{R}((y_i)_{1 \leqq i \leqq m}, z) = \sum_{n \geqq 0} \sum_{\substack{p_i \in \mathbb{Z} \\ 1 \leqq i \leqq m}} R_{n, 0, (p_i)_{1 \leqq i \leqq m}} \cdot \prod_{i=1}^{m} y_i^{p_i} \cdot z^n.$$

Alors,

$$\mathcal{R}=\frac{1}{1-z\sum_{i=1}^{m}(y_i+1/y_i)}$$

et, si $M=(p_1, \ldots, p_m)$, *alors*

$$R_{n,\,O,\,M}=\sum_{\mathscr{E}}\binom{n}{\frac{n_1+p_1}{2}, \frac{n_1-p_1}{2}, \ldots, \frac{n_i+p_i}{2}, \frac{n_i-p_i}{2}, \ldots, \frac{n_m-p_m}{2}}$$

avec,

$$\mathscr{E}=\left\{(n_i)_{1\leqq i\leqq m}\quad \sum_{i=1}^{m} n_i=n\right\}.$$

Démonstration : Elle est analogue à celle faite dans le cas $m=2$.

REMERCIEMENTS

Ce qui précède doit beaucoup aux problèmes soulevés au sein de l'équipe d'informatique de l'Université de Haute-Alsace.

BIBLIOGRAPHIE

1. R. Cori, S. Dulucq et G. Viennot, *Shuffle of Parenthesis Systems and Baxter Permutations*, Rapport C.N.R.S.-L.A. n° 226, Bordeaux, 1984.
2. P. Flajolet, *The Evolution of two Stacks in Bounded Space and Random Walk in a Triangle*, I.N.R.I.A., Manuscrit.
3. J. Françon, *Sérialisabilité, commutation, mélange et tableaux de Young*, Rapport U.H.A. n° 27.
4. D. Gouyou-Beauchamps, *Produit de nombres de Catalan et chemins sous diagonaux*, Manuscrit, Bordeaux.
5. D. Gouyou-Beauchamps, *Standard Young Tableaux of Height* 4 *and* 5, Manuscrit, Bordeaux.
6. W. T. Tutte, *A Census of Hamiltonian Polygons*, Canad. J. Maths, vol. 14, 1962, p. 402-417.