INFORMATIQUE THÉORIQUE ET APPLICATIONS

DIDIER CAUCAL

Graphes canoniques de graphes algébriques

Informatique théorique et applications, tome 24, nº 4 (1990), p. 339-352

<http://www.numdam.org/item?id=ITA_1990__24_4_339_0>

Informatique théorique et Applications/Theoretical Informatics and Applications
(vol. 24, n° 4, 1990, p. 339 à 352)

GRAPHES CANONIQUES DE GRAPHES ALGÉBRIQUES (*)

par Didier CAUCAL [1]

Communiqué par J. E. PIN

Résumé. – *Baeten, Bergstra, Klop ont montré que la bisimulation des graphes des dérivations gauches des grammaires algébriques réduites est décidable. On établit que le quotient par sa plus grande bisimulation, appelé le graphe canonique, de tout graphe des dérivations gauches d'une grammaire G algébrique et réduite est isomorphe à un graphe des dérivations gauches d'une grammaire H algébrique et réduite, et on peut de façon effective transformer G en H.*

Abstract. – *Concerning algebraic grammars in reduced form, bisimulation in the graph of left derivations is known to be decidable. The quotient of the above graph by its greatest bisimulation, called the canonical graph, is indeed isomorphic to the graph of left derivations for another algebraic grammar in reduced form, produced by an effective procedure.*

INTRODUCTION

Un graphe algébrique [7] est le graphe des transitions d'un automate à pile. On condidère ici les graphes des dérivations gauches, gdg en abrégé, des grammaires algébriques. Le gdg d'une grammaire algébrique G à partir d'un mot α est le graphe ayant α, comme sommet et tel que pour tout sommet $A\beta$, $\gamma\beta$ est un sommet du graphe et $(A\beta, a, \gamma\beta)$ est un arc du graphe si et seulement si $(A, a\gamma)$ est une règle de G ou est le couple (a, a), avec a une lettre terminale (ou bien a est le mot vide si le mot droit de la règle ne commence pas par une lettre terminale). La classe des gdg des grammaires algébriques est une sous-classe propre de celle des graphes algébriques.

Un graphe (orienté et à arcs étiquetés) $\mathscr{G}$ se réduit en un graphe $\mathscr{H}$ s'il existe une application surjective h des sommets de $\mathscr{G}$ sur les sommets de $\mathscr{H}$, et tel que pour tout sommet s de $\mathscr{G}$ et pour toute étiquette d'arc a, l'ensemble

(*) Reçu mai 1988, révisé en novembre 1988.
[1] I.R.I.S.A., Campus de Beaulieu, F-35042 Rennes Cedex, France.

des sommets $h(t)$ pour un arc (s, a, t) de $\mathcal{G}$ est égal à l'ensemble des sommets r pour un arc $(h(s), a, r)$ de $\mathcal{H}$. Le graphe canonique d'un graphe $\mathcal{G}$ est le quotient de $\mathcal{G}$ par sa plus grande bisimulation [8]. C'est aussi le (à isomorphisme près) graphe réduit de $\mathcal{G}$ et irréductible. Ainsi, deux graphes sont bisimulables si et seulement si ils se réduisent en un même troisième, ou encore si leurs graphes canoniques sont isomorphes.

On considère la bisimulation en tant que relation binaire sur les mots d'une seule grammaire algébrique : deux mots α et β sont bisimulables s'il existe une bisimulation R de leurs gdg associés tels que $\alpha R \beta$. On montre que la bisimulation pour une grammaire algébrique réduite est une congruence de Thue, c'est-à-dire la plus petite congruence contenant un ensemble fini de paires, et qu'à partir de la grammaire on peut extraire effectivement un système générateur de la bisimulation. Tout comme [1], on en déduit que la bisimulation est décidable mais de plus, on peut de façon effective transformer toute grammaire G algébrique et réduite en une grammaire H algébrique et réduite de sorte que le graphe canonique de tout gdg de G soit isomorphe à un gdg de H.

Indiquons les motivations de ce travail. On sait [3] que le graphe des transitions d'un automate à pile est un graphe à motifs, c'est-à-dire un graphe pouvant être produit à partir d'un graphe fini en itérant l'adjonction parallèle et déterministe d'une famille finie de graphes finis (les motifs), et on peut extraire de façon effective un système de motifs du graphe des transitions à partir des règles de l'automate. Il en est donc de même du graphe canonique des dérivations gauches d'une grammaire algébrique réduite. Un tel résultat est une première approche vers l'extraction effective de motifs des graphes canoniques des solutions algébriques de schémas récursifs de programmes [6].

1. PRÉLIMINAIRES

Étant donné un ensemble A de parties d'un ensemble E, on note $\bigcup A = \{ x \in B \mid B \in A \}$ la partie de E réunion de A. Par abus de notation, on pourra écrire x à la place de $\{ x \}$.

Étant donné une relation $R \subseteq E \times F$, on pourra noter $x R y$ au lieu de $(x, y) \in R$, et l'inverse de R est $R^{-1} = \{ (y, x) \mid x R y \}$. L'image $R(A)$ d'un ensemble A par R est $\{ y \mid \exists x \in A, x R y \}$. On note $\mathrm{Dom}(R) = R^{-1}(F)$ le domaine de R et $\mathrm{Im}(R) = R(E)$ l'image de R. La relation identité sur E est notée $\iota_E = \{ (x, x) \mid x \in E \}$. La composée d'une relation $R \subseteq E \times F$ par une relation $S \subseteq F \times G$ est la relation $R \circ S = \{ (u, v) \mid \exists w \in F, u R w \text{ et } w S v \}$. Le noyau d'une relation R est défini par la relation

$$\operatorname{Ker}(R)=R\circ R^{-1}=\{(u, v)\mid R(u)\cap R(v)\neq\varnothing\}.$$

Une relation R est fonctionnelle si $\operatorname{Ker}(R^{-1})$ est inclus dans ι_F, c'est-à-dire l'image $R(u)$ d'un élément u de $\operatorname{Dom}(R)$ a un seul élément.

Pour un monoïde $(M, .)$ d'élément neutre 1, le produit d'une partie A par une partie B de M est $A.B=\{uv\mid u\in A \text{ et } v\in B\}$ et l'étoile d'une partie A est $A^*=\bigcup\{A^i\mid i\geqq 0\}$ avec $A^0=\{1\}$ et $A^{i+1}=A^i.A$.

Considérons le monoïde $(2^{E\times E}, \circ)$ des parties de $E\times E$, muni du produit de composition $\circ$. Une relation R est un préordre si elle est réflexive ($\iota_E\subseteqq R$) et est transitive ($R\circ R\subseteqq R$); une équivalence est un préordre symétrique ($R^{-1}\subseteqq R$). Une relation R est dite canonique si elle est nœthérienne [il n'existe pas de suite infinie $(u_n)_{n\geq 0}$ telle que $u_n R u_{n+1}$] et confluente ($(R^{-1})^*\circ R^*\subseteqq R^*\circ(R^{-1})^*$).

Soient X un alphabet et $(X^*, .)$ le monoïde libre engendré par X. On considère le monoïde produit $(X^*\times X^*, .)$ défini par $(u, v).(x, y)=(ux, vy)$. Ainsi pour $R, S\subseteqq X^*\times X^*$, $R.S=\{(ux, vy)\mid uRv \text{ et } xSy\}$ est le produit composante à composante. Une partie R est dite compatible (avec la concaténation de tout mot) si elle est compatible à gauche ($\iota_{X^*}.R\subseteqq R$) et compatible à droite ($R.\iota_{X^*}\subseteqq R$). Une équivalence compatible est appelée une congruence. On définit

$\underset{R}{\rightarrow}=\iota_{X^*}.R.\iota_{X^*}$ la plus petite relation contenant R et compatible

$\overset{*}{\underset{R}{\rightarrow}}=(\underset{R}{\rightarrow})^*$ le plus petit préordre contenant R et compatible.

$\underset{R}{\leftrightarrow}=\underset{R}{\rightarrow}\cup(\underset{R}{\rightarrow})^{-1}$ et $\overset{*}{\underset{R}{\leftrightarrow}}=(\underset{R}{\leftrightarrow})^*$ la plus petite congruence contenant R.

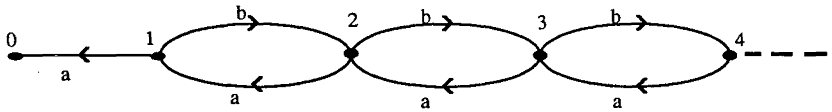
Une relation S est une congruence de Thue s'il existe une relation *finie* R telle que $S=\overset{*}{\underset{R}{\leftrightarrow}}$. Étant donné une relation $\underset{R}{\rightarrow}$ canonique, on note $x\downarrow R$ l'unique forme normale (irréductible) selon $\underset{R}{\rightarrow}$ de x.

2. BISIMULATION ET MINIMISATION DE GRAPHES

On considère les graphes (infinis) orientés et à arcs étiquetés sur un ensemble X quelconque.

DÉFINITION : Un *graphe* $\mathcal{G}$ sur un ensemble X est un couple $(S_{\mathcal{G}}, \mathrm{Arc}_{\mathcal{G}})$ où $S_{\mathcal{G}}$ est un ensemble quelconque, dit des sommets de $\mathcal{G}$, et $\mathrm{Arc}_{\mathcal{G}}$ est une partie de $S_{\mathcal{G}} \times X \times S_{\mathcal{G}}$. Un élément (s, a, t) de $\mathrm{Arc}_{\mathcal{G}}$ est un arc de $\mathcal{G}$, de source s, de but t et d'étiquette a.

X = {a,b} , S est l'ens. des entiers naturels ; Arc = { (n+1,a,n) | n ≥ 0 } ∪ { (n+1,b,n+2) | n ≥ 0 }



L'ensemble des mots étiquetants les chemins du sommet 1 au sommet 0 est le langage de Luckasiewicz (grammaire A = a + bAA)

Figure 2.1. — Représentation d'un graphe.

La bisimulation de graphes a été introduite par Park [8] :

DÉFINITION : Une *bisimulation* R d'un graphe $\mathcal{G}$ sur un graphe $\mathcal{H}$ est une partie du produit $S_{\mathcal{G}} \times S_{\mathcal{H}}$ telle que :

(i) $\mathrm{Dom}(R) = S_{\mathcal{G}}$ et $\mathrm{Im}(R) = S_{\mathcal{H}}$;

(ii) si $s\,R\,t$ et $(s, a, s') \in \mathrm{Arc}_{\mathcal{G}}$ alors il existe $(t, a, t') \in \mathrm{Arc}_{\mathcal{H}}$ tel que $s'\,R\,t'$;

(iii) si $s\,R\,t$ et $(t, a, t') \in \mathrm{Arc}_{\mathcal{H}}$ alors il existe $(s, a, s') \in \mathrm{Arc}_{\mathcal{G}}$ tel que $s'\,R\,t'$.

Les graphes $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ sont dits bisimulables et on note $\mathcal{G} \underline{\leftrightarrow} \mathcal{H}$.

L'inverse d'une bisimulation de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{H}$ est une bisimulation de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{G}$. Toute union (finie ou non) de bisimulations de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{H}$ est une bisimulation de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{H}$. La composée d'une bisimulation de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{H}$ par une bisimulation de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{I}$ est une bisimulation de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{I}$. Par conséquent le noyau $\mathrm{Ker}(R)$ d'une bisimulation R de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{H}$ est une bisimulation de $\mathcal{G}$ (une bisimulation d'un graphe étant une bisimulation du graphe sur lui-même). De même, la fermeture réflexive et transitive R^* d'une bisimulation R de $\mathcal{G}$ est une bisimulation de $\mathcal{G}$. Enfin, tout graphe $\mathcal{G}$ admet $\bigcup \{ R \mid R$ est une bisimulation de $\mathcal{G} \}$ comme plus grande bisimulation de $\mathcal{G}$.

Les bisimulations fonctionnelles sont les homomorphismes surjectifs de graphes, usuellement appelés réductions de graphes.

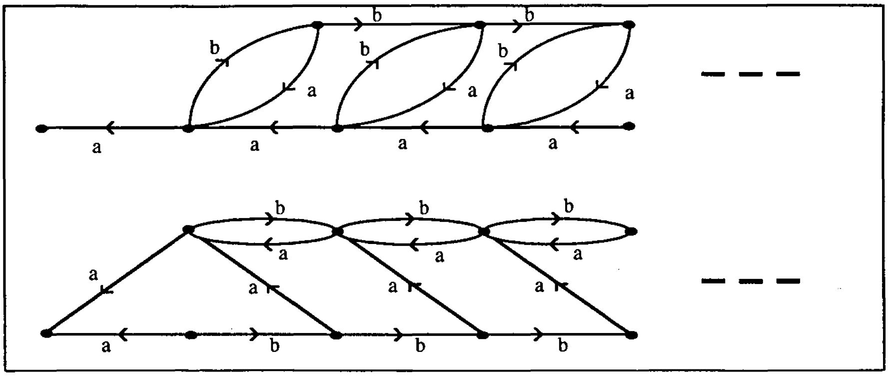


Figure 2.2. — Graphes bisimulables.

DÉFINITION : Une *réduction* d'un graphe $\mathcal{G}$ en un graphe $\mathcal{H}$ est une application surjective $h : S_{\mathcal{G}} \to S_{\mathcal{H}}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

(i) si $(s, a, t) \in \mathrm{Arc}_{\mathcal{G}}$ alors $(h(s), a, h(t)) \in \mathrm{Arc}_{\mathcal{H}}$

(ii) si $h(s), a, t') \in \mathrm{Arc}_{\mathcal{H}}$ alors il existe $(s, a, t) \in \mathrm{Arc}_{\mathcal{G}}$ tel que $h(t) = t'$.

On dit que $\mathcal{G}$ se réduit en $\mathcal{H}$ et on note $\mathcal{G} \to \mathcal{H}$.

Si de plus h est injective alors $\mathcal{G}$ est dit isomorphe à $\mathcal{H}$ et on note $\mathcal{G} \leftrightarrow \mathcal{H}$.

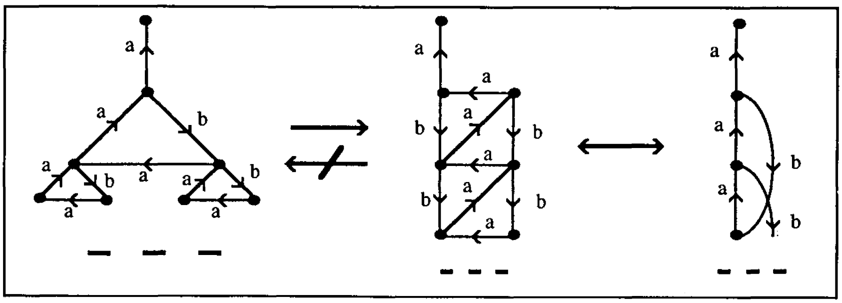


Figure 2.3. — Réduction et isomorphisme de graphes.

La réduction est un préordre sur les graphes et l'isomorphisme est une relation d'équivalence sur les graphes. On remarquera qu'il existe des graphes (infinis) inter-réductibles mais non isomorphes.

DÉFINITION : Une *congruence* d'un graphe $\mathcal{G}$ est une bisimulation de $\mathcal{G}$ qui est une équivalence sur $S_{\mathcal{G}}$.

On vérifie que les congruences de graphes sont les noyaux des réductions. Si R et S sont des congruences d'un graphe $\mathcal{G}$ alors $(R \cup S)^*$ est une congruence de $\mathcal{G}$, mais $R \cap S$ peut ne pas être une congruence de $\mathcal{G}$. Le quotient $\mathcal{G}/R = (\{R(s) \mid s \in S_{\mathcal{G}}\}, \{(R(s), a, R(t)) \mid (s, a, t) \in \mathrm{Arc}_{\mathcal{G}}\})$ d'un graphe $\mathcal{G}$ par une congruence R est le graphe réduit de $\mathcal{G}$ par la projection naturelle de R. On a alors le résultat usuel [4] suivant : si h est une réduction d'un graphe $\mathcal{G}$ en un graphe $\mathcal{H}$ alors $\mathcal{H}$ est isomorphe à $\mathcal{G}/\mathrm{Ker}(h)$. Remarquons que la plus grande bisimulation R d'un graphe $\mathcal{G}$ est aussi la plus grande congruence de $\mathcal{G}$ parce que toute congruence est une bisimulation et que $(R \cup R^{-1})^*$ contient R et est une bisimulation de $\mathcal{G}$, donc $R = (R \cup R^{-1})^*$ *i.e.* R est une équivalence.

DÉFINITION : Le *graphe canonique* $\mathrm{Min}(\mathcal{G})$ d'un graphe $\mathcal{G}$ est le quotient de $\mathcal{G}$ par sa plus grande bisimulation.

Le graphe canonique d'un graphe $\mathcal{G}$ est aussi l'unique (à isomorphisme près) graphe irréductible, réduit de $\mathcal{G}$.

PROPOSITION 2.1 : *Soit $\mathcal{G}$ un graphe. Si $\mathcal{H}$ est un graphe tel que :*

(i) *$\mathcal{H}$ est réduit de $\mathcal{G}$: $\mathcal{G} \to \mathcal{H}$;*

(ii) *$\mathcal{H}$ est irréductible : si $\mathcal{H} \to \mathcal{I}$ alors $\mathcal{H} \leftrightarrow \mathcal{I}$*

alors $\mathcal{H} \leftrightarrow \mathrm{Min}(\mathcal{G})$.

Deux graphes sont bisimulables si et seulement si leurs graphes canoniques sont isomorphes, ou bien s'ils sont réductibles en un même troisième.

PROPOSITION 2.2 : *Soient $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ des graphes. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathcal{G} \underline{\leftrightarrow} \mathcal{H}$;

(ii) $\exists \mathcal{I}$ *tel que* $\mathcal{G} \to \mathcal{I} \leftarrow \mathcal{H}$;

(iii) $\mathrm{Min}(\mathcal{G}) \leftrightarrow \mathrm{Min}(\mathcal{H})$.

Par exemple, le graphe canonique des graphes de la figure 2.2 est celui de la figure 2.1.

3. GRAPHES DE DÉRIVATIONS GAUCHES D'UNE GRAMMAIRE ALGÉBRIQUE

Une grammaire algébrique G sur un alphabet Σ de lettres terminales, est une relation finie de $N \times (\Sigma \cup N)^*$ où $N = \mathrm{Dom}(G)$ est un alphabet disjoint de Σ, dit des lettres non terminales de G.

DÉFINITION : Soient G une grammaire algébrique sur Σ et $N = \mathrm{Dom}(G)$.

Le *graphe des dérivations gauches*, gdg en abrégé, de G à partir de $\alpha \in (\Sigma \cup N)^*$ est le graphe $\mathscr{D}(\mathrm{G}, \alpha)$ sur $\Sigma \cup \{1\}$ dont l'ensemble des sommets $S_{\mathscr{D}(\mathrm{G}, \alpha)}$ et l'ensemble des arcs $\mathrm{Arc}_{\mathscr{D}(\mathrm{G}, \alpha)}$ sont les plus petits ensembles tels que :

(i) $\alpha \in S_{\mathscr{D}(G, \alpha)}$

(ii) $(B\beta, a, \gamma) \in \mathrm{Arc}_{\mathscr{D}(G, \alpha)}$ et $\gamma \in S_{\mathscr{D}(G, \alpha)}$ si et seulement si $B\beta \in S_{\mathscr{D}(G, \alpha)}$ et

$$B = a, \qquad \gamma = \beta, \qquad a \in \Sigma$$

ou

$$B G a \delta, \qquad \gamma = \delta\beta, \qquad \delta \notin \Sigma(\Sigma \cup N)^* \quad \text{si } a = 1.$$

Un exemple de gdg de grammaire algébrique est donné à la figure 3.1.

Soit la grammaire algébrique G = { (A,aa) , (A,BbAA) , (B,1) } sur l'alphabet {a,b} .

Le graphe des dérivations gauches de G à partir de A a pour représentation :

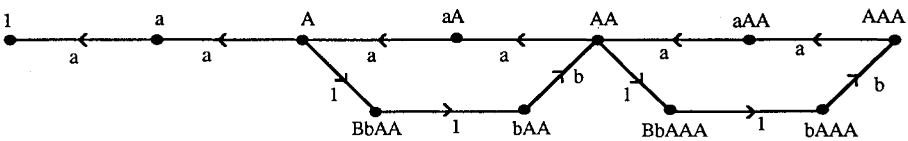


Figure 3.1. — Graphe des dérivations gauches d'une grammaire algébrique.

Considérons les grammaires algébriques sur $\{a, b\}$ suivantes :

$G = \{ (A, a), (A, b\,AA) \}$

$G_1 = \{ (A, a), (A, b\,BA), (B, a\,A), (B, b\,BB) \}$

$G_2 = \{ (A, a), (A, b\,AB), (B, a\,A), (B, b\,BB) \}$

$G_3 = \{ (A, a), (A, b\,AAA) \}$

$$H = \{ (A, a), (A, b\,B), (B, a\,A), (B, b\,BA) \}$$

$$H' = \{ (A', a), (A', b\,A'\,B'), (B', a), (B', b\,B'\,B') \}$$

$\mathscr{D}(G, A)$ est isomorphe au graphe de la figure 2.1. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, $\mathscr{D}(G_i, A)$ est isomorphe au i-ème graphe de la figure 2.3. $\mathscr{D}(H, A)$ et $\mathscr{D}(H', A')$ sont isomorphes respectivement au premier et deuxième graphe de la figure 2.2. Aussi

$$\mathscr{D}(H, A) \;\underline{\leftrightarrow}\; \mathscr{D}(H', A') \quad i.e. \quad \mathscr{D}(H \cup H', A) \;\underline{\leftrightarrow}\; \mathscr{D}(H \cup H', A').$$

De façon générale, on a

$$\mathscr{D}(G, \alpha) \;\underline{\leftrightarrow}\; \mathscr{D}(H, \beta) \quad \text{ssi} \quad \mathscr{D}(G \cup H', \alpha) \;\underline{\leftrightarrow}\; \mathscr{D}(G \cup H', \beta').$$

avec $\mathrm{Dom}(G) \cap \mathrm{Dom}(H') = \varnothing$ et (H', β') est obtenu à partir de (H, β) par renommage des lettres de $\mathrm{Dom}(G) \cap \mathrm{Dom}(H)$.

Par conséquent et sans perte de généralité, on restreint l'étude de la bisimulation des graphes des dérivations gauches à une seule grammaire algébrique.

4. BISIMULATION POUR UNE GRAMMAIRE ALGÉBRIQUE

Dorénavant G est une grammaire algébrique sur Σ, $N = \mathrm{Dom}(G)$ et $V = \Sigma \cup N$ est l'ensemble des lettres terminales et non terminales de G. On définit la bisimulation en tant que relation binaire sur V^*, définie par :

$\alpha \underline{\leftrightarrow} \beta$ si il existe une bisimulation R de $\mathscr{D}(G, \alpha)$ sur $\mathscr{D}(G, \beta)$ telle que $\alpha R \beta$. La valuation $\tau(\alpha)$ d'un mot α est la plus petite longueur des chemins de $\mathscr{D}(G, \alpha)$ allant de α à 1 s'il existe un tel chemin, et sinon $\tau(\alpha) = \infty$. La proposition ci-dessous indique que la valuation τ est un homomorphisme de $(V^*, .)$ dans $(N \cup \{\infty\}, +)$ et que la bisimulation $\underline{\leftrightarrow}$ est une congruence incluse dans le noyau de la valuation.

PROPOSITION 4.1 : *On a les propriétés suivantes :*

(*a*) $\tau(\alpha\beta) = \tau(\alpha) + \tau(\beta)$;

(*b*) *si* $\alpha \underline{\leftrightarrow} \beta$ *alors* $\tau(\alpha) = \tau(\beta)$;

(*c*) *si* $\alpha \underline{\leftrightarrow} \beta$ *et* $\gamma \underline{\leftrightarrow} \delta$ *alors* $\alpha\gamma \underline{\leftrightarrow} \beta\delta$.

La preuve ne présente pas de difficulté. L'ensemble des successeurs d'un mot α de V^* par l'étiquette $a \in \Sigma \cup \{1\}$ est l'ensemble $D(\alpha, a) = \{\beta \mid (\alpha, a, \beta) \in \mathrm{Arc}_{\mathscr{D}(G, \alpha)}\}$. On adapte la notion de relation auto-prouvable [5] à la relation de bisimulation. Une relation R binaire sur V^* est auto-bisimulable si la plus petite congruence sur V^* contenant R peut bisimuler les sommets successeurs des paires de R. On rappelle qu'une partition d'un ensemble E est un ensemble $\{E_i \mid i \in I\}$ éventuellement vide de parties non vides de $E (\forall i \in I, \varnothing \neq E_i \subseteq E)$ tel que $\cup \{E_i \mid i \in I\} = E$ et $E_i \cap E_j = \varnothing$ pour $i \neq j$.

DÉFINITION : Une relation R binaire sur V^* est *auto-bisimulable* si pour tout (α, β) de R et pour tout a de $\Sigma \cup \{1\}$, $D(\alpha, a) = \varnothing \Leftrightarrow D(\beta, a) = \varnothing$, et dans le cas non vide, il existe des partitions $\{E_i \mid i \in I\}$ et $\{F_i \mid i \in I\}$ de respectivement $D(\alpha, a)$ et $D(\beta, a)$ telles que

$$\forall i \in I, \quad E_i \times F_i \subseteqq \underset{R}{\overset{*}{\leftrightarrow}}$$

Aussi (remarque de Hans Huttel), une relation R binaire sur V^* est auto-bisimulable

si pour tout (α, β) de R et pour tout a de $\Sigma \cup \{1\}$,

si $\alpha' \in D(\alpha, a)$ alors il existe $\beta' \in D(\beta, a)$ tel que $\alpha' \underset{R}{\overset{*}{\leftrightarrow}} \beta'$

si $\beta' \in D(\beta, a)$ alors il existe $\alpha' \in D(\alpha, a)$ tel que $\alpha' \underset{R}{\overset{*}{\leftrightarrow}} \beta'$.

L'intérêt d'une relation auto-bisimulable est donné par la proposition ci-dessous.

PROPOSITION 4.2 : *Si R est auto-bisimulable alors* $\underset{R}{\overset{*}{\leftrightarrow}} \subseteqq \underline{\leftrightarrow}$.

Preuve : Soient $\alpha \underset{R}{\overset{*}{\leftrightarrow}} \beta$ pour une relation R auto-bisimulable, et considérons la relation

$$S = \underset{R}{\overset{*}{\leftrightarrow}} \cap (S_{\mathscr{D}(G, \alpha)} \times S_{\mathscr{D}(G, \beta)}).$$

Par récurrence sur $n \geqq 0$, on montre

si $\lambda \underset{R}{(\rightarrow)^n} \mu$ et $\lambda' \in D(\lambda, a)$ alors il existe $\mu' \in D(\mu, a)$ et $\lambda' \underset{R}{\overset{*}{\leftrightarrow}} \mu'$.

Par symétrie, on en déduit que S est une bisimulation de $\mathscr{D}(G, \alpha)$ sur $\mathscr{D}(G, \beta)$ avec $\alpha S \beta$, d'où $\alpha \underline{\leftrightarrow} \beta$.

5. BISIMULATION POUR UNE GRAMMAIRE ALGÉBRIQUE RÉDUITE

Dorénavant la grammaire algébrique G est (faiblement) réduite, c'est-à-dire qu'il existe un mot terminal engendré par G à partir de toute lettre non terminale, i. e. $\forall A \in N$, $\tau(A) < \infty$.

L'avantage de se restreindre à une grammaire réduite est que la bisimulation associée est simplifiable.

PROPOSITION 5.1 : *Si* $\alpha\gamma \underline{\leftrightarrow} \beta\gamma$ *ou* $\gamma\alpha \underline{\leftrightarrow} \gamma\beta$ *alors* $\alpha \underline{\leftrightarrow} \beta$.

Preuve : (i) Soit $\gamma\alpha \underline{\leftrightarrow} \gamma\beta$. Considérons un chemin de $\mathscr{D}(G, \gamma)$ de longueur $\tau(\gamma)$ allant de γ à 1. Comme un tel chemin est de longueur minimale et que $\gamma\alpha \underline{\leftrightarrow} \gamma\beta$, il existe un chemin de $\mathscr{D}(G, \gamma)$ de longueur $\tau(\gamma)$ allant de γ à δ et $\alpha \underline{\leftrightarrow} \delta\beta$. D'après ($b$) de la proposition 4.1, $\tau(\gamma\alpha) = \tau(\gamma\beta)$ et $\tau(\alpha) = \tau(\delta\beta)$. Par ($a$) de la proposition 4.1 et du fait que G est réduite, on a $\tau(\delta) = 0$ *i. e.* $\delta = 1$, donc $\alpha \underline{\leftrightarrow} \beta$.

(ii) Soit $\alpha\gamma \underline{\leftrightarrow} \beta\gamma$. Il existe une bisimulation R de $\mathscr{D}(G, \alpha\gamma)$ sur $\mathscr{D}(G, \beta\gamma)$ telle que $\alpha\gamma R \beta\gamma$. Alors $S = \{(\lambda, \mu) \mid \lambda\gamma R \mu\gamma\} \cap (S_{\mathscr{D}(G, \alpha)} \times S_{\mathscr{D}(G, \beta)})$ est une bisimulation de $\mathscr{D}(G, \alpha)$ sur $\mathscr{D}(G, \beta)$ telle que $\alpha S \beta$; d'où $\alpha \underline{\leftrightarrow} \beta$.

La bisimulation pour une grammaire algébrique réduite étant une congruence simplifiable, on en déduit une propriété de découpage des paires de mots bisimulables.

PROPOSITION 5.2 : *Soient* $A\alpha \underline{\leftrightarrow} B\beta$ *avec* $A, B \in V$ *et* $\tau(A) \geqq \tau(B)$. *Il existe* $\gamma \in V^*$ *tel que* $A \underline{\leftrightarrow} B\gamma$ *et* $\gamma\alpha \underline{\leftrightarrow} \beta$.

Preuve : Considérons un chemin de $\mathscr{D}(G, B)$ de longueur $\tau(B)$ allant de B à 1. Comme $\tau(A) \geqq \tau(B)$ et $A\alpha \underline{\leftrightarrow} B\beta$, il existe un chemin de $\mathscr{D}(G, A)$ de longueur $\tau(B)$ allant de A à γ et tel que $\gamma\alpha \underline{\leftrightarrow} \beta$. Par ($c$) de la proposition 4.1, $A\alpha \underline{\leftrightarrow} B\beta \underline{\leftrightarrow} B\gamma\alpha$ et par la proposition 5.1, $A \underline{\leftrightarrow} B\gamma$.

On va établir que la bisimulation est finiment engendrée et qu'un système générateur est effectivement constructible à partir de la grammaire. Pour cela, on définit une classe constructible de relations, contenant des systèmes générateurs de la bisimulation.

DÉFINITION : Une relation R binaire sur V^* est dite *fondamentale* si elle vérifie les trois conditions suivantes :

(i) $\mathrm{Dom}(R) \subseteq N$ et $\mathrm{Im}(R) \subseteq (V\text{-}\mathrm{Dom}(R))^*$.

(ii) R est fonctionnelle : si $AR\alpha$ *et* $AR\beta$ alors $\alpha = \beta$.

(iii) $R \subseteq \mathrm{Ker}(\tau)$: si $AR\alpha$ alors $\tau(A) = \tau(\alpha)$.

PROPOSITION 5.3 : *On a les trois propriétés suivantes :*

(*a*) *toute relation R fondamentale est finie, et $\underset{R}{\rightarrow}$ est canonique;*

(*b*) *l'ensemble des relations fondamentales et auto-bisimulables est constructible effectivement à partir de G.*

Preuve : Soit une relation R fondamentale. R est finie comme ensemble de paires de mêmes valuations [condition (iii)] et au plus égales à la valuation maximale des lettres non terminales. D'après la condition (i) de la définition, toute dérivation selon R à partir de $\alpha \in V^*$ est de longueur au plus égale à celle du mot α, donc $\underset{R}{\rightarrow}$ est nœthérienne. Comme $\mathrm{Dom}(R) \subseteq N$ et R est fonctionnelle, $\underset{R}{\rightarrow}$ est confluente. En définitive $\underset{R}{\rightarrow}$ est canonique.

On peut construire effectivement à partir de la grammaire G, l'ensemble fini des relations fondamentales, et comme pour toute relation R fondamentale $\underset{R}{\rightarrow}$ est canonique, alors $\overset{*}{\underset{R}{\leftrightarrow}}$ est décidable et on peut décider si une relation fondamentale est auto-bisimulable.

Il nous reste à indiquer les relations fondamentales et auto-bisimulables qui sont systèmes générateurs de la bisimulation.

THÉORÈME 1 : *Toute relation fondamentale, auto-bisimulable et maximale pour l'inclusion engendre la bisimulation.*

Preuve : D'après la proposition 4.1 *b* et la proposition 5.2, on peut considérer une relation R fondamentale, incluse dans $\underline{\leftrightarrow}$ et qui soit maximale pour l'inclusion, *i. e.*

$$\text{si } R \subseteq S \subseteq \underline{\leftrightarrow} \text{ et } S \text{ est fondamentale alors } S = R.$$

(i) Montrons $\overset{*}{\underset{R}{\leftrightarrow}} = \underline{\leftrightarrow}$. Par définition $R \subseteq \underline{\leftrightarrow}$ et comme $\underline{\leftrightarrow}$ est une congruence, $\overset{*}{\underset{R}{\leftrightarrow}} \subseteq \underline{\leftrightarrow}$. Inversement, soit $\alpha \underline{\leftrightarrow} \beta$. D'après (*a*) de la proposition 5.3, $\underset{R}{\rightarrow}$ est canonique, donc les formes normales $\alpha \downarrow R$ et $\beta \downarrow R$ de α et β existent, et comme $\overset{*}{\underset{R}{\leftrightarrow}} \subseteq \underline{\leftrightarrow}$, on a $\alpha \downarrow R \underline{\leftrightarrow} \beta \downarrow R$. Supposons $\alpha \downarrow R \neq \beta \downarrow R$. D'après (*b*) de la proposition 4.1, $\tau(\alpha \downarrow R) = \tau(\beta \downarrow R)$, aussi $\alpha \downarrow \mathrm{R} = \lambda x \gamma$, $\beta \downarrow R = \lambda y \delta$, $x, y \in V$ et $x \neq y$. Par la proposition 5.1, $x\gamma \underline{\leftrightarrow} y\gamma$ et sans perte de généralité, on suppose $\tau(x) \geqq \tau(y)$. Par la proposition 5.2, il existe $\rho \in V^*$ tel que $x \underline{\leftrightarrow} y \rho$, ce qui est en contradiction avec la maximalité de R. Par conséquent, $\alpha \downarrow R = \beta \downarrow R$, d'où $\alpha \overset{*}{\underset{R}{\leftrightarrow}} \beta$.

(ii) Soit une relation S fondamentale, auto-bisimulable et maximale pour l'inclusion. Par la proposition 4.2, $S \subseteqq \underline{\leftrightarrow}$. On peut donc considérer une relation R contenant S, fondamentale, incluse dans $\underline{\leftrightarrow}$ et maximale pour l'inclusion. Par (i), $\overset{*}{\underset{R}{\leftrightarrow}} = \underline{\leftrightarrow}$ donc R est auto-bisimulable et par maximalité de S, $S = R$, d'où le théorème 1.

De la proposition 5.3 et du théorème 1, on déduit le résultat de [1].

COROLLAIRE : *La bisimulation pour toute grammaire algébrique réduite est décidable.*

Il reste à déduire le résultat annoncé à l'introduction. A partir d'une grammaire algébrique réduite G, on extrait effectivement une relation R fondamentale, auto-bisimulable et maximale pour l'inclusion. Si G est en forme de Greibach, *i.e.* $\mathrm{Im}(G) \subseteqq \Sigma . V^* \cup \{1\}$, alors la grammaire suivante

$$G \downarrow R = \{(A, \alpha \downarrow R) \mid A G \alpha \text{ et } A \notin \mathrm{Dom}(R)\}$$

convient parce que l'on aura pour tout mot α de V^*, $\mathrm{Min}(\mathscr{D}(G, \alpha))$ isomorphe à $\mathscr{D}(G \downarrow R, \alpha \downarrow R)$. Cependant pour $G = \{(A, a), (A, B), (B, b)\}$, on a $R = \{(B, b)\}$ et $G \downarrow R = \{(A, a), (A, b)\}$, donc $\mathrm{Min}(\mathscr{D}(G, A))$ n'est pas isomorphe à $\mathscr{D}(G \downarrow R, A)$. Une façon de préserver les transitions du mot vide est que les mots de R ne possèdent plus de lettre terminale : chaque lettre terminale est remplacée par une lettre non terminale la produisant. Pour se faire, on considère une bijection f de Σ sur un alphabet Γ disjoint de V. On étend f en un homomorphisme alphabétique de V^* sur $(\Gamma \cup N)^*$ avec f constant sur N. On définit

$$S = \{(A, f(\alpha)) \mid A R \alpha\}$$

une application g de V^* sur $(\Gamma \cup N)^*$ définie par $g(\alpha) = (f(\alpha)) \downarrow S = f(\alpha \downarrow R)$

$$\begin{aligned} G \downarrow R = \{(A, a g(\alpha)) \mid & A G a \alpha,\ A \notin \mathrm{Dom}(R), \\ & a \in \Sigma \text{ ou } (a = 1 \text{ si } a\alpha \notin \Sigma . V^*)\} \cup \{(f(a), a) \mid a \in \Sigma\}. \end{aligned}$$

La grammaire $G \downarrow R$ convient : le graphe canonique de $\mathscr{D}(G, \alpha)$ pour tout mot α de V^* est isomorphe à $\mathscr{D}(G \downarrow R, g(\alpha))$.

PROPOSITION 5.4 : $\forall \alpha \in V^*$, $\mathrm{Min}(\mathscr{D}(G, \alpha)) \leftrightarrow \mathscr{D}(G \downarrow R, g(\alpha))$.

Preuve : La relation $S = \{(\lambda, g(\lambda)) \mid \lambda \in S_{\mathscr{D}(G, \alpha)}\}$ est une réduction de $\mathscr{D}(G, \alpha)$ sur $\mathscr{D}(G \downarrow R, g(\alpha))$, et par la proposition 2.2, on a $\mathrm{Min}(\mathscr{D}(G, \alpha)) \leftrightarrow \mathrm{Min}(\mathscr{D}(G \downarrow R, g(\alpha)))$.

Soient λ et μ des sommets bisimulables de $\mathscr{D}(G \downarrow R, g(\alpha))$. De façon identique à la preuve (i) du théorème, on obtient $\lambda = \mu$; et par la proposition 2.1, $\mathscr{D}(G \downarrow R, g(\alpha))$ a un graphe canonique isomorphe à lui-même.

Exemple : Soit la grammaire (algébrique réduite)

$$G = \{(A, a), (A, BC), (B, b), (C, aA), (C, bCA)\}.$$

Un système générateur de la bisimulation selon G est $R = \{(C, AA), (B, b)\}$ et la transformée de G selon R est $G \downarrow R = \{(A, a), (A, YAA), (X, a), (Y, b)\}$. Par la proposition 5.4, $\mathrm{Min}(\mathscr{D}(G, A))$ est isomorphe à $\mathscr{D}(G \downarrow R, A)$.

Du (*b*) de la proposition 5.3, du théorème 1 et de la proposition 5.4, on aboutit au résultat principal de cet article.

THÉORÈME 2 : *On peut transformer de façon effective toute grammaire G algébrique et réduite en une grammaire H algébrique et réduite de sorte que le graphe canonique du gdg de G à partir de tout mot α soit isomorphe au gdg de H à partir d'un mot déterminé effectivement à l'aide de G et de α.*

CONCLUSION

La méthode présentée ici est applicable pour décider de la bisimulation des gdg des grammaires simples quelconques (réduites ou non) [2]. Cependant, sa généralisation à n'importe quelle grammaire algébrique (non réduite) pose de sérieuses difficultés.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. C. M. BAETEN, J. A. BERGSTRA et J. W. KLOP, *Decidability of Bisimulation Equivalence for Processes Generating Context-free Languages*, LNCS 259, 1987, p. 94-111.

[2] D. CAUCAL, *Décidabilité de l'égalité des langages algébriques infinitaires simples*, LNCS 210, 1986, p. 37-48.

[3] D. CAUCAL, *On the regular structure of prefix rewritings*, *Rapport interne* 507, *CAAP* 90, paraîtra dans LNCS, 1990.

[4] P. M. COHN, *Universal Algebra*, Klumer Academic Publishers Group, 1981.

[5] B. Courcelle, *An Axiomatic Approach to the KH Algorithms*, Math. Systems Theory, vol. 16, 1983, p. 191-231.

[6] I. Guessarian, *Algebraic Semantics*, LNCS 99, 1981.

[7] D. Muller et P. Schupp, *The Theory of Ends, Pushdown Automata, and Second Order Logic*, TCS 37, 1985, p. 51-75.

[8] D. Park, *Concurrency and Automata on Infinite Sequences*, LNCS 104, 1981, p. 167-183.