

# JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

JACQUES FARAUT

## **Analyse harmonique sur les hyperboloïdes et équations différentielles singulières**

*Journées Équations aux dérivées partielles* (1976), p. 1-13

[http://www.numdam.org/item?id=JEDP\\_1976\\_\\_\\_A7\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1976___A7_0)

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ANALYSE HARMONIQUE SUR LES HYPERBOLOIDES  
ET EQUATIONS DIFFERENTIELLES SINGULIERES

J. FARAUT

---

1. Pour deux points  $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  et  $y = (y_0, y_1, \dots, y_n)$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , nous notons

$$[x, y] = x_0 y_0 - x_1 y_1 - \dots - x_n y_n .$$

Soit  $X$  l'hyperboloïde à une nappe défini par

$$X = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid [x, x] = -1\} .$$

C'est une variété de dimension  $n$ , qui est un espace homogène du groupe  $G = O(1, n)$  :

$$X = O(1, n) / O(1, n-1) .$$

Il existe sur  $X$  une mesure invariante par  $G$ , notée  $dx$ , qui dans l'ouvert  $\{x_0 \neq 0\}$  a pour expression

$$dx = \frac{dx_1 dx_2 \dots dx_n}{|x_0|} .$$

Il existe sur  $X$  un opérateur différentiel invariant du second ordre, qui est un pseudo-laplacien, c'est-à-dire le laplacien d'une structure pseudo-riemannienne qui est invariante par  $G$  : nous le notons  $\Delta$ . On peut définir cet opérateur  $\Delta$  de la façon suivante : soit  $f$  une fonction de classe  $C^2$  sur  $X$ ,  $\tilde{f}$  la fonction définie dans l'ouvert  $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid [x, x] < 0\}$ , homogène de degré 0 qui coïncide avec  $f$  sur  $X$ ,  $\Delta f$  est la restriction à  $X$  de

$$\square \tilde{f} = \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x_1^2} - \dots - \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x_n^2} .$$

L'opérateur  $\Delta$  est localement du type de l'opérateur des ondes avec  $n-1$  variables d'espace.

L'invariance de l'opérateur  $\Delta$  sous l'action de  $G$  permet de montrer que  $\Delta$ , muni du domaine  $\mathcal{D}(X)$  (espace des fonctions de classe  $C^\infty$  sur  $X$ , à support compact), est essentiellement autoadjoint dans  $L^2(X)$ . Considérons la décomposition spectrale du plus petit prolongement fermé de  $(\mathcal{D}(X), \Delta)$ . D'après les théorèmes spectraux de Von Neumann et de Maurin ([6]), il existe une famille  $K_\lambda$  de noyaux hermitiens continus sur  $\mathcal{D}(X)$  et une mesure positive  $\sigma$  sur  $\mathbb{R}$  telle que

$$\int_X f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} K_\lambda(f, g) d\sigma(\lambda) .$$

Pour presque tout  $\lambda$  le noyau  $K_\lambda$  vérifie

$$K_\lambda(\Delta f, g) = K_\lambda(f, \Delta g) = \lambda K_\lambda(f, g) .$$

Nous allons dans cet exposé étudier la structure de ces noyaux  $K_\lambda$ .

2. Soit  $f$  une fonction de  $\mathcal{B}(X)$ , et  $\gamma$  un élément de  $G$ .

Nous notons  $\tau_\gamma f$  la fonction définie par

$$\tau_\gamma f(x) = f(\gamma^{-1}x).$$

DEFINITION 1. Un noyau sphérique est une forme bilinéaire symétrique continue  $\Phi$  sur  $\mathcal{B}(X)$  telle que

$$(1) \quad \forall f, g \in \mathcal{B}(X), \forall \gamma \in G, \Phi(\tau_\gamma f, \tau_\gamma g) = \Phi(f, g)$$

c'est-à-dire que  $\Phi$  est un noyau invariant

$$(2) \quad \exists \lambda \in \mathbb{C}, \forall f, g \in \mathcal{B}(X), \Phi(\Delta f, g) = \Phi(f, \Delta g) = \lambda \Phi(f, g).$$

Nous disons que le noyau sphérique  $\Phi$  correspond à la valeur propre  $\lambda$ .

Considérons une fonction  $F$  de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$ , et posons

$$\Phi(f, g) = \int_X \int_X F([x, y]) f(x) g(y) dx dy.$$

La forme  $\Phi$  est bilinéaire symétrique continue sur  $\mathcal{B}(X)$  et vérifie

(1). Pour que  $\Phi$  vérifie (2), il faut et il suffit que  $F$  soit solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle de Legendre

$$LF = (t^2 - 1) \frac{d^2 F}{dt^2} + nt \frac{dF}{dt} = \lambda F.$$

Cette équation différentielle est singulière en  $t=1$  et  $t=-1$ , et en fait, sauf pour une suite de valeurs de  $\lambda$ , elle n'admet pas de solutions de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$ . Nous sommes amenés à remplacer  $F$  par une distribution. Pour cela, nous allons introduire les espaces fonctionnels  $\mathcal{D}_\mu$ .

Posons  $\mu = \frac{n}{2} - 1$ . Soit  $\delta$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\delta(t) = (t^2 - 1)^\mu \operatorname{Log}|t^2 - 1|, \text{ si } n \text{ est pair ( } \mu \text{ est entier)}$$

$$\delta(t) = (t^2 - 1)^\mu Y(t^2 - 1), \text{ si } n \text{ est impair ( } \mu \text{ n'est pas entier)}$$

(  $Y$  est la fonction d'Heaviside,  $Y(t) = 1$  si  $t \geq 0$ ,  $Y(t) = 0$  si  $t < 0$  ).

DEFINITION 2. L'espace  $\mathcal{D}_\mu$  est l'espace des fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  de la forme

$$\varphi(t) = \varphi_0(t) + \delta(t) \varphi_1(t)$$

où  $\varphi_0$  et  $\varphi_1$  sont deux fonctions de  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ .

L'espace  $\mathcal{D}_\mu$  est muni d'une topologie pour laquelle il est une limite inductive d'espaces de Fréchet. Pour la définition de cette topologie, on peut consulter [13], p. 205 et [4].

THEOREME 1. a) L'égalité

$$\int_X \int_X F([x,y]) f(x) g(y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} F(t) f \# g(t) dt$$

définit une application linéaire continue

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(X) \times \mathcal{D}(X) &\longrightarrow \mathcal{D}_\mu \\ (f, g) &\longmapsto f \# g . \end{aligned}$$

b) Cette application possède les propriétés suivantes :

$$f \# g = g \# f$$

$$\Delta f \# g = f \# \Delta g = L^*(f \# g)$$

où  $L^*$  est l'opérateur adjoint de l'opérateur de Legendre  $L$  :

$$L^* \varphi = (t^2 - 1) \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + (4-n)t \frac{d\varphi}{dt} + (2-n)\varphi .$$

Soit  $a = (0, 1, 0, \dots, 0)$  et soit  $H$  le sous-groupe de  $G$  qui stabilise  $a$ ,  $H \cong O(1, n-1)$ . Si  $f$  est une fonction de  $\mathcal{D}(X)$  il existe une fonction  $f_1$  de  $\mathcal{D}(G)$  telle que

$$f(\gamma a) = \int_H f_1(\gamma h) dh$$

où  $dh$  désigne une mesure de Haar sur  $H$ . Pour des mesures de Haar convenablement normalisées sur  $G$  et sur  $H$

$$\int_X \int_X F([x, y]) f(x) g(y) dx dy = \int_X F([a, y]) \varphi(y) dy$$

où  $\varphi$  est la fonction de  $\mathcal{B}(X)$  définie par

$$\varphi(y) = \int_G g(\gamma y) f_1(\gamma) d\gamma .$$

Nous sommes ainsi amenés à étudier l'application  $M$  qui à une fonction  $f$  de  $\mathcal{B}(X)$  fait correspondre la fonction  $Mf$  définie (presque partout) sur  $R$  telle que pour toute fonction continue  $F$  définie sur  $R$

$$\int_X F(x_1) f(x) dx = \int_R Mf(t) F(t) dt$$

ce qui peut s'écrire avec la notation de Gelfand

$$Mf(t) = \int f(x) \delta(x_1 - t) dx .$$

La fonction  $x \rightarrow x_1$ , définie sur  $X$ , a deux valeurs critiques qui sont  $+1$  et  $-1$ . Pour étudier le comportement de  $Mf$  au voisinage de  $+1$ , considérons une fonction  $f$  de  $\mathcal{B}(X)$  dont le support est contenu dans  $\{x \in X | x_1 > 0\}$ . Dans cet ouvert, nous pouvons prendre  $x_0, x_2, \dots, x_n$  comme coordonnées. Posons

$$f_1(x_0^2, x_2, \dots, x_n) = f(x_0, x_2, \dots, x_n) + f(-x_0, x_2, \dots, x_n)$$

$$f_2(x_0^2, r^2) = \int_S f_1(x_0^2, ru_2, \dots, ru_n) du$$

où  $S$  est la sphère unité de  $\mathbb{R}^{n-1}$ , et  $du$  une mesure uniforme sur  $S$ . La fonction  $f_2$  est de classe  $C^\infty$  sur  $[0, \infty[ \times [0, \infty[$ , à support compact. Pour  $t > 1$ ,  $\varepsilon = t^2 - 1$ , nous avons

$$Mf(t) = c \int_0^\infty f_2(r^2 + \varepsilon, r^2) \frac{r^{n-2} dr}{\sqrt{r^2 + \varepsilon}}$$

et pour  $t < 1$ ,  $\varepsilon = 1-t^2$

$$Mf(t) = c \int_0^\infty f_2(x_0^2, x_0^2 + \varepsilon) (x_0^2 + \varepsilon)^{\frac{n-3}{2}} dx_0 .$$

D'après [13] (Lemma 4.3, p. 210)  $M$  est une application continue de  $\mathcal{B}(X)$  sur  $\mathcal{D}_\mu$ . (Voir aussi [7], [1], [4], [5]). La partie a) du théorème 1 en résulte.

Comme l'opérateur  $\Delta$  est symétrique, pour toute fonction  $f$  de  $\mathcal{B}(X)$  et toute fonction  $F$  de classe  $C^2$  définie sur  $\mathbb{R}$

$$\int F(x_1) \Delta f(x) dx = \int LF(x_1) f(x) dx$$

et par suite

$$M \Delta f = L^* M f$$

la partie b) du théorème 1 en résulte.

COROLLAIRE. Soit  $S$  une forme linéaire continue sur  $\mathcal{D}_\mu$  telle que

$$LS = \lambda S$$

alors le noyau sphérique  $\Phi$  défini par

$$\Phi(f, g) = S(f \# g)$$

est un noyau sphérique correspondant à la valeur propre  $\lambda$ .

3. La réciproque est vraie car :

THEOREME 2. Soit  $\Phi$  un noyau continu invariant sur  $\mathcal{A}(X)$ . Il existe une forme linéaire continue  $S$  unique sur  $\mathcal{A}_\mu$  telle que

$$\Phi(f, g) = S(f \# g) .$$

Pour une fonction  $f$  de  $\mathcal{A}(G)$  soit  $\tilde{f}$  la fonction de  $\mathcal{A}(X)$  définie par

$$\tilde{f}(\gamma a) = \int_H f(\gamma h) dh , \quad \gamma \in G$$

et posons, pour deux fonctions  $f$  et  $g$  de  $\mathcal{A}(G)$

$$\Psi(f, g) = \Phi(\tilde{f}, \tilde{g})$$

le noyau  $\Psi$  défini sur  $\mathcal{A}(G)$  est continu et invariant. D'après le théorème des noyaux de Schwartz, il existe une distribution  $T_1$  sur  $G \times G$  telle que

$$\forall f, g \in \mathcal{A}(G) , \quad \Psi(f, g) = T_1(f \otimes g) .$$

Soit  $\theta$  une fonction de  $\mathcal{A}(G)$  telle que

$$\int_G \theta(\gamma) d\gamma = 1$$

et soit  $T$  la distribution définie sur  $G$  par

$$T(\varphi) = T_1[\theta(u) \varphi(u^{-1}v)] .$$

Nous avons, en posant  $\check{f}(\gamma) = f(\gamma^{-1})$

$$\begin{aligned} T(\check{f} * g) &= T_1[\theta(u) \int_G \check{f}(\gamma u) g(\gamma v) d\gamma \\ &= \int_G T_1[\theta(u) f(\gamma u) g(\gamma v)] d\gamma . \end{aligned}$$



A cause de l'invariance du noyau  $\Psi$ , la distribution  $T_1$  est invariante par le sous-groupe diagonal de  $G \times G$ , par suite

$$\begin{aligned} T(f \overset{\vee}{*} g) &= \int_G T_1[\theta(\gamma^{-1}u) f(u) g(v)] d\gamma \\ &= T_1 \left[ \left( \int_G \theta(\gamma^{-1}u) d\gamma \right) f(u) g(v) \right] \\ &= T_1(f \otimes g) = \Psi(f, g) . \end{aligned}$$

La distribution  $T$  est biinvariante par  $H$ , elle peut donc être considérée comme une distribution sur  $X$  invariante par  $H$ .

L'application transposée de l'application  $M$

$$M' : \mathcal{D}'_{\mu} \longrightarrow \mathcal{D}'(X)$$

est injective et a pour image l'espace des distributions sur  $X$  invariantes par  $H$  (c'est une adaptation d'un résultat de Tengstrand, [13], théorème 5.1, p. 213, voir aussi [7] et [1]). Il existe un élément unique  $S$  de  $\mathcal{D}'_{\mu}$  tel que

$$T = M'S .$$

De plus, pour deux fonctions  $f$  et  $g$  de  $\mathcal{D}(G)$

$$M[(f \overset{\vee}{*} g) \sim] = \tilde{f} \# \tilde{g}$$

si bien que

$$\Phi(\tilde{f}, \tilde{g}) = S(\tilde{f} \# \tilde{g}) .$$

Le résultat est bien démontré car l'application  $f \mapsto \tilde{f}$  de  $\mathcal{D}(G)$  dans  $\mathcal{D}(X)$  est surjective.

Pour que le noyau  $\Phi$  soit un noyau sphérique correspondant à la valeur propre  $\lambda$ , il faut et il suffit que la forme linéaire  $S$  soit solution de

$$LS = \lambda S .$$

Soit  $\bar{\Phi}$  le noyau invariant continu sur  $\mathcal{A}(X)$  défini par

$$\bar{\Phi}(f, g) = \int_X f(x) g(x) dx$$

alors nous avons

$$\bar{\Phi}(f, g) = c_n \gamma(f \# g)$$

où  $\gamma$  est la forme linéaire continue sur  $\mathcal{L}_\mu$  définie par

$$\gamma(\varphi_0 + \delta\varphi_1) = \varphi_1(1)$$

et où  $c_n$  est une constante ne dépendant que de  $n$  (voir [7], p. 251, [1], p. 351, [13], p. 213).

4. Il reste donc à étudier les solutions dans l'espace  $\mathcal{D}'_{\mu}$  de l'équation

$$LS = \lambda S .$$

Une telle solution coïncide, dans chacun des intervalles  $]-\infty, -1[$ ,  $]-1, 1[$ ,  $]1, \infty[$  avec une solution ordinaire. On construit une telle solution à l'aide de partie finie à partir de solutions ordinaires. On démontre que ces solutions constituent un espace vectoriel de dimension 2. Plus précisément, il existe deux fonctions  $u_0(t, \lambda)$  et  $u_1(t, \lambda)$ , solutions ordinaires de

$$Lu = \lambda u$$

sur chacun des intervalles  $]-\infty, -1[$ ,  $]-1, 1[$ ,  $]1, \infty[$  vérifiant

$$u_0(t, \lambda) = u_0(-t, \lambda) , u_0(0, \lambda) = 1$$

$$u_1(t, \lambda) = -u_1(-t, \lambda) , \frac{du_1}{dt}(0, \lambda) = 1$$

telles que les formes linéaires  $S_0^\lambda$  et  $S_1^\lambda$  définies pour une fonction  $\varphi$  de  $\mathcal{D}'_{\mu}$  par

$$S_0^\lambda(\varphi) = \text{Pf}_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{||t|-1| > \varepsilon} u_0(t, \lambda) \varphi(t) dt \right]$$

$$S_1^\lambda(\varphi) = \text{Pf}_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{||t|-1| > \varepsilon} u_1(t, \lambda) \varphi(t) dt \right]$$

constituent une base de l'espace des solutions de  $LS = \lambda S$  dans l'espace  $\mathcal{D}'_{\mu}$ . Par suite, les noyaux  $\Phi_0^\lambda$  et  $\Phi_1^\lambda$  définis par

$$\Phi_0^\lambda(f, g) = S_0^\lambda(f \# g)$$

$$\Phi_1^\lambda(f, g) = S_1^\lambda(f \# g)$$

constituent une base de l'espace des noyaux sphériques correspondant à la valeur propre  $\lambda$ .

5. Considérons maintenant les noyaux hermitiens  $K_\lambda$  qui interviennent dans la décomposition spectrale du plus petit prolongement fermé de  $(\mathcal{B}(X), \Delta)$  (voir le paragraphe 1). Soit  $\Psi_\lambda$  le noyau défini sur  $\mathcal{B}(X)$  par

$$\Psi_\lambda(f, g) = K_\lambda(f, \bar{g}) .$$

Pour presque tout  $\lambda$  (relativement à la mesure scalaire  $\sigma$ )

$$\Psi_\lambda(\Delta f, g) = \Psi_\lambda(f, \Delta g) = \lambda \Psi_\lambda(f, g) .$$

De plus, par suite de l'invariance du noyau

$$B(f, g) = \int_X f(x) g(x) dx$$

pour presque tout  $\lambda$  le noyau  $\Psi_\lambda$  est invariant, si bien que pour presque tout  $\lambda$  le noyau  $\Psi_\lambda$  est un noyau sphérique. Par conséquent, pour un tel  $\lambda$ , il existe deux nombres  $a_0^\lambda$  et  $a_1^\lambda$  tels que

$$K_\lambda(f, g) = \Psi_\lambda(f, \bar{g}) = a_0^\lambda \bar{\phi}_0^\lambda(f, \bar{g}) + a_1^\lambda \bar{\phi}_1^\lambda(f, \bar{g}) .$$

Pour la détermination explicite de la décomposition spectrale de cet opérateur, on peut consulter [11], [12], [3], [8] et [9], [10], [2].

REFERENCES

- [1] G. de RHAM                      Solution élémentaire d'opérateurs différentiels du second ordre.  
Ann. Inst. Fourier 8 (1958), 337-366.
- [2] J. FARAUT                        Noyaux sphériques sur un hyperboloïde à une nappe.  
Dans : Analyse harmonique sur les groupes de Lie, Lecture Notes 497, Springer, 1975.
- [3] I.M. GUELFAND,  
M.I. GRAEV,  
N.Ja. VILENKIN                    Les distributions, tome 5.  
Dunod.
- [4] P. JEANQUARTIER                Développement asymptotique de la distribution de Dirac attachée à une fonction analytique.  
C.R.A.S. 271 (9/12/70), 1159-1161 (série A).
- [5] H.M. MAIRE                        Sur les distributions images réciproques par une fonction analytique.  
C.R.A.S. 281 (22/9/75), 427-430 (série A).
- [6] K. MAURIN                        General eigenfunctions expansions and unitary representations of topological groups.  
Warszawa (1968).
- [7] P.D. METHEE                      Sur les distributions invariantes dans le groupe des rotations de Lorentz.  
Commentarii Mathematici Helvetici 28 (1954), 225-269.
- [8] V.F. MOLCANOV                    Harmonic analysis on a hyperboloïd of one sheet.  
Soviet. Math. Dokl. 7 (1966), 1553-1556.
- [9] V.F. MOLCANOV                    Analogue of the Plancherel formula for hyperboloïds.  
Soviet Math. Dokl. 9 (1968), 1382-1385.

- [10] W. ROSSMANN                      Analysis on real hyperbolic spaces.  
Queen's mathematical preprints, n° 1976-14.  
Queen's University, Kingston, Ontario.
- [11] T. SHINTANI                      On the decomposition of regular representation  
of the Lorentz group on a hyperboloid of one  
sheet.  
Proc. Japan Acad. 43 (1967), 1-5.
- [12] R.S. STRICHARTZ                  Harmonic analysis on hyperboloids.  
J. of Functional Analysis, 12 (1973), 341-383.
- [13] A. TENGSTRAND                   Distributions invariant under an orthogonal  
group of arbitrary signature.  
Math. Scand. 8 (1960), 201-218.