JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

BERNARD HELFFER
JEAN NOURRIGAT

Hypoellipticité pour des opérateurs quasi-homogènes à coefficients polynomiaux

Journées Équations aux dérivées partielles (1979), p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1979____A10_0>

HYPOELLIPTICITE POUR DES OPERATEURS QUASI-HOMOGENES A COEFFICIENTS POLYNOMIAUX

par B. HELFFER et J. NOURRIGAT

Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie admettant une décomposition en somme directe de sous-espaces $\mathcal{G}_i$ $(i = 1,\dots,r)$ $(r \in \mathbb{N})$ tels que :

(1)
$$[\mathcal{G}_i,\mathcal{G}_j] \subset \mathcal{G}_{i+j} \qquad \text{si } i+j \leq r$$
$$[\mathcal{G}_i,\mathcal{G}_j] = 0 \qquad \text{si } i+j > r$$

$\mathcal{G}$ est muni d'une famille de dilatations δ_t $(t > 0)$ définie par :

(2)
$$\delta_t\left(\sum_{i=1}^{r} x_i\right) = \sum_{i=1}^{r} t^i x_i \qquad \text{si } x_i \in \mathcal{G}_i \ .$$

On désigne, pour tout x dans $\mathcal{G}$, par (adx) l'application linéaire de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$

(3)
$$y \to (\text{ad}x)y = [x,y]$$

$\mathcal{G}^*$ désignera le dual de $\mathcal{G}$ et δ_t^* la transposée de l'application δ_t. Pour tout ξ dans $\mathcal{G}^*$ et x dans $\mathcal{G}$, on définit $(\text{ad}x)^*\xi$ par :

(4)
$$\langle(\text{ad}x)^*\xi,y\rangle = \langle\xi,(\text{ad-}x)y\rangle \qquad \forall y \in \mathcal{G}$$

On note $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ l'algèbre enveloppante complexifiée, $\mathcal{U}_m(\mathcal{G})$ le sous-espace des éléments P de $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ homogènes de degré m pour δ_t et on pose

$$\mathcal{U}^m(\mathcal{G}) = \sum_{j=o}^{m} \mathcal{U}_j(\mathcal{G}) \ .$$

Soit G le gourpe connexe, simplement connexe associé à $\mathcal{G}$ par l'application exponentielle. Le groupe G agit dans $\mathcal{G}^*$ par :

(5)
$$\forall x \in \mathcal{G} \ , \ (\exp x).\xi = \exp(\text{ad}x)^*.\xi \ .$$

On appelle orbite de ξ et on note $O(\xi)$ ou $G.\xi$ l'ensemble des points de $\mathfrak{G}^*$ de la forme $\exp(\mathrm{ad}x)^*\xi$ avec x dans $\mathfrak{G}$.

On désigne par $\mathfrak{G}^*/G$ l'espace des orbites muni de la topologie quotient de $\mathfrak{G}^*$ (muni de sa topologie usuelle). Soit $\hat{G}$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles. Kirillov [6] a montré comment on pouvait définir une application β_o de $\mathfrak{G}^*$ dans $\hat{G}$ par sa fameuse méthode des orbites. Par passage au quotient, β_o définit une application de $\mathfrak{G}^*/G$ dans $\hat{G}$ qui est un homéomorphisme (Th. de D. Brown [1]). On pose la définition suivante :

<u>Définition</u> : On appelle fermé conique G-stable dans $\mathfrak{G}^*$ un sous-ensemble F de $\mathfrak{G}^*$ tel que :

(6) F est une réunion d'orbites

(7) F est stable par les dilatations δ_t^* de $\mathfrak{G}^*$

(8) F est fermé dans $\mathfrak{G}^*$.

On appellera cône fermé dans G un élément de la forme $\beta_o(F)$ avec F vérifiant (6), (7), (8).

L'objet de cet exposé est d'étudier dans le cas des algèbres de Lie nilpotentes de rang 3, la forme "microlocale" suivante de la conjecture de Rockland :

<u>Conjecture</u> : Soit $\mathfrak{G}$ une algèbre de Lie vérifiant (1) et (2) et $\hat{F}$ un cône fermé dans $\hat{G}$. Soit P dans $\mathcal{U}_m(\mathfrak{G})$ (m multiple assez grand de r!) tel que :

(9) Pour toute représentation π dans $\hat{F}$ non triviale, $\pi(P)$ est injectif dans l'espace $\mathcal{S}_\pi$ des vecteurs C^∞ de π.

Alors, si $(A_j)_{j\in J}$ désigne une base de $\mathcal{U}_m(\mathfrak{G})$, il existe une constante C strictement positive telle que l'on ait, pour tout π dans $\hat{F}$ et tout u dans $\mathcal{S}_\pi$:

(10) $$\sum_j \|\pi(A_j)u\|^2_{\mathcal{H}_\pi} \leq C\,\|\pi(P)u\|^2_{\mathcal{H}_\pi}$$

où $\mathcal{H}_\pi$ est l'espace de la représentation.

<u>Remarque</u> : Cette conjecture est démontrée dans les deux cas suivants :

a) $\hat{F} = \hat{G}$ (cf.[2]).

On déduit alors de (10) que P est hypoelliptique dans G.

b) Le rang de nilpotence de $\mathcal{G}$ est inférieur ou égal à 3

c) Dans le cas du rang 1, c'est simplement une version microlocalisée dans des cônes, des estimations pour les opérateurs elliptiques homogènes.

Application aux opérateurs quasi-homogènes à coefficients polynomiaux

Soit $\mathcal{H}$ une sous-algèbre graduée de $\mathcal{G}$, et H le sous-groupe connexe, simplement connexe associé à $\mathcal{H}$. On veut étudier le problème de l'hypoellipticité maximale pour des éléments P de $\mathcal{U}_m(\mathcal{G})$ opérant sur des distributions invariantes par H (à gauche) $\mathcal{D}'(H\backslash G)$. On note alors $\pi_{(0,\mathcal{H})}(P)$ l'opérateur défini sur $\mathcal{D}'(H\backslash G)$. On dira que $\pi_{(0,\mathcal{H})}(P)$ est hypoelliptique maximal, si pour tout Q dans $\mathcal{U}^m(\mathcal{G})$, il existe une constante C_Q, telle que pour tout u dans $C_0^\infty(H\backslash G)$, on ait :

$$(11) \qquad \|\pi_{(0,\mathcal{H})}(Q)u\|^2_{L^2(H\backslash G)} \leq C_Q(\|\pi_{(0,\mathcal{H})}(P)u\|^2_{L^2(H\backslash G)} + \|u\|^2) .$$

De telles inégalités impliquent l'hypoellipticité de $\pi_{(0,\mathcal{H})}(P)$.

Spectres

Soit $\mathcal{H}^\perp$ l'ensemble des éléments ξ dans $\mathcal{G}^*$ qui s'annulent sur $\mathcal{H}$. On pose :

$\tilde{\Omega}_{(0,\mathcal{H})} = \widetilde{G.\mathcal{H}^\perp}$ où $\widetilde{G\mathcal{H}^\perp}$ désigne l'adhérence de Zariski de $G.\mathcal{H}^\perp$

$\bar{\Omega}_{(0,\mathcal{H})} = \overline{G.\mathcal{H}^\perp}$ où $\overline{G.\mathcal{H}^\perp}$ désigne l'adhérence usuelle de $G.\mathcal{H}^\perp$

On pose :

$\widetilde{Sp}\,\pi_{(0,\mathcal{H})} = \beta_0(\tilde{\Omega}_{(0,\mathcal{H})})$ spectre "algébrique" de $\pi_{(0,\mathcal{H})}$

$Sp\,\pi_{(0,\mathcal{H})} = \beta_0(\bar{\Omega}_{(0,\mathcal{H})})$ spectre de $\pi_{(0,\mathcal{H})}$

$Sp\,\pi_{(0,\mathcal{H})}$ est un fermé conique de $\hat{G}$. On a obtenu les théorèmes suivants :

<u>Théorème 1</u> : Soit P dans $\mathcal{U}_m(\mathcal{G})$, si $\pi_{(0,\mathcal{H})}(P)$ est hypoelliptique maximal dans $H\backslash G$, alors pour toute représentation π non triviale de $Sp\,\pi_{(0,\mathcal{H})}$, $\pi(P)$ est injectif dans $\mathcal{S}_\pi$.

Le théorème 1 est démontré dans [3].

Exemple (question de L. P. Rothschild) :

Soit $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} - y_i(x_i^2 + y_i^2)\frac{\partial}{\partial t}$, $i = 1,2$

$Y_i = \frac{\partial}{\partial y_i} + x_i(x_i^2 + y_i^2)\frac{\partial}{\partial t}$, $i = 1,2$

Alors $P = \sum_{i=1}^{2} (X_i^2 + Y_i^2) + i[X_1,Y_1] - i[X_2,Y_2]$ n'est pas hypoelliptique maximal.

Théorème 2 : Soit P dans $\mathcal{U}_m(\mathcal{G})$. Si pour toute représentation π non triviale dans $\widetilde{Sp}\,\pi_{(0,\mathcal{H})}$, $\pi(P)$ est injectif dans $\mathcal{S}_\pi$, alors $\pi_{(0,\mathcal{H})}(P)$ est hypoelliptique.

Ce théorème est démontré dans [4], il utilise la caractérisation de $\widetilde{Sp}\,\pi_{(0,\mathcal{H})}$ suivante. Soit $I_{(0,\mathcal{H})}$ l'idéal dans $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ des A tels que : $\pi_{(0,\mathcal{H})}(A) = 0$. Alors $\widetilde{Sp}\,\pi_{(0,\mathcal{H})} = \{\pi \in \hat{G}, \pi(I_{(0,\mathcal{H})}) = 0\}$. Si (A_i) désigne un système de générateurs "sympathiques" de $I_{(0,\mathcal{H})}$, on peut montrer que l'hypoellipticité de $\pi_{(0,\mathcal{H})}(P)$ se déduit de l'hypoellipticité du système (P,A_i) sur G.

Théorème 3 : Soit P dans $\mathcal{U}_m(\mathcal{G})$. Si $\mathcal{G}$ est de rang de nilpotence au plus 3, et si m est un multiple non nul de 6. Si, pour toute représentation π non triviale dans $Sp\,\pi_{(0,\mathcal{H})}$, $\pi(P)$ est injectif dans $\mathcal{S}_\pi$, alors $\pi_{(0,\mathcal{H})}(P)$ est hypoelliptique maximal dans $H\backslash G$.

Le théorème 3 est démontré dans [5]. C'est un corollaire de la conjecture (qui est démontrée dans le cas du rang 3).

---

[1] I. D. Brown : Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4ème série, t.6, 1973, p.407-411.

[2] B. Helffer, J. Nourrigat : Comm. in P. D. E., vol. 3, n°8, 1978 et (1979).

[3] B. Helffer, J. Nourrigat : Hypoellipticité pour des opérateurs à coefficients polynomiaux quasihomogènes I

[4] B. Helffer : Hypoellipticité pour des opérateurs à coefficients polynomiaux quasihomogènes II

[5] B. Helffer, J. Nourrigat : Hypoellipticité pour des opérateurs à coefficients polynomiaux quasihomogènes III.

[6] A. A. Kirillov : Russian Math. Surveys 17 (1962), p.53-104.

[7] C. Rockland : Trans. of the A. M. S., vol. 240, n°517, p.1-52 (1978).

*
* *
*